連結カusp磁場により作られる トーラス磁場配位

渡辺二太, 菅野 聡*, 濱松清隆

(広島大学核融合理論研究センター)
(* 広島大学理学部)

(1983年12月12日 受理)

Toroidal Magnetic Field Configuration Produced by Multiply Linked Cusp Magnetic Fields

Tsuguhiro Watanabe, Satoshi Sugano[†],
and Kiyotaka Hamamatsu

(Received December 12, 1983)

Abstract

We show that $l=2$ stellarator magnetic field configuration can be formed by superposition of a toroidal magnetic field and a series of toroidally linked cusp magnetic fields, which are successively rotated by forty-five degrees around the toroidal axis. The cusp field is generated by the current flowing in the opposite directions in a pair of rectangular coils facing each other. The proposed configuration has the following features ; i) the coil system is completely modular, ii) it allows easy access to the plasma, iii) a relatively large rotational transform is possible and iv) the aspect ratio can be made large, which implies possibility of high beta plasma confinement. Examples of the numerical calculation of magnetic surfaces are shown.

Institute for Fusion Theory and [†] Faculty of Science Hiroshima University,
Hiroshima 730, Japan

摘要

一対の対向する矩形状コイルに互に逆方向の電流を通電してカスプ型磁場を作る。このカスプ型磁場を磁気軸に沿って一定の距離だけ移動し、その後、磁気軸を回転軸として 45° だけ回転する。この操作を繰り返し、 45° ずつ向きの異なるカスプ型磁場をトラス状に連結し、さらにトロイダルコイルで縦磁場を重畳すれば閉磁気面を有する $\ell=2$ のステラレータ型磁場配位が得られる。この磁場配位は、コイルシステムが完全分割型であること、プラズマへの接近性のよいこと、回転変換角を比較的大きくとれること、アスペクト比を大きくとれることなどの特徴を有する。数値解析例を示す。

§ 1. 序

核融合炉という観点から見たとき、ステラレータ型磁場配位によるプラズマ閉じ込めは定常運転が可能であるという利点を持つ。また、ステラレータ型磁場によって閉じ込められるプラズマは、トカマクに優るとも劣らぬプラズマ閉じ込め時間の達成が可能とされ、ヘオトロンE¹⁾、WENDEL-STEIN VII-A²⁾等により実験的にも確認され始めた。

現在のヘリオトン実験装置、ステラレータ実験装置においてはヘリカルコイルによって磁場を作り出している。しかしながら核融合炉という観点からは分割型コイルを用いる方が望ましいと指摘されている³⁾。

分割型コイルを用いるステラレータ磁場配位についてのアイデアはすでにいくつか報告されている。楕円型コイルあるいは三角形コイルを回転させながらトラス状に配置するもの⁴⁾、あるいはよじれたトロイダルコイルを配置してステラレータ磁場を作ること⁵⁾などが提案されている。しかしながら、これらの分割コイルによるヘリカル磁場は回転変換を大きくとることが出来ていない。

ここでは図1に示すように一対の矩形状のコイルを基本として、その連結により閉じた磁気面を作り出す方式について報告する。この一対の矩形状コイルには互に逆の電流を流してカスプ磁場となるようにする。このカスプ磁場に縦磁場を重畳すると、作られる磁気面は $\ell=2$ のステラレータ型となる。当方式の特徴には

図1. 連結カスプ磁場を作るコイル群のモデル。この4組の互に 45° ずつ回転して設置したコイルそれぞれに、互に逆向きの電流を流しカスプ磁場を作る。このカスプ磁場をZ軸方向に周期的に重ねる。このカスプ磁場に縦磁場を重畳すると $\ell=2$ のステラレータ型磁場が作られる。

1. コイルが分割型であること。
2. 回転変換を比較的大きくとれること。
3. 矩形コイルのため、プラズマへの接近性が良いこと。
4. アスペクト比を大きくし、高ベータプラズマ保持の可能性を持つこと。

等が挙げられる。なお、このままでは磁気シアを作ることができないが、若干の工夫により、 $\ell = 3$ のステラレータ配位にするなど、磁気シアの強い配位とすることも可能と思われる。

§2においては、連結カスプ磁場で $\ell = 2$ のステラレータ型磁気面の出来ることを示し、回転変換角、磁気面の形状について考察する。§3では、連結カスプ磁場コイルをトーラス状に配置したときの磁気面の数値計算を行う。§4でまとめを行う。

この磁場の数値解析には、新しく開発した磁場計算コードを用いた。この磁場計算コードはコイルの各部分を直線状部と円弧状部とに分けて計算する。電流はコイルの断面（矩形）内を一様に流れているとする（線電流近似は使わない）。当研究の目的の一部は、この新開発のコイル磁場計算コードの有効性を実証することにもある。磁気面を計算するために必要な磁力線の追跡には6次のルンゲクッタ法を利用した。なお、この新開発の磁場計算コードの詳細の報告は別に行う予定である。

§2. 連結カスプ磁場コイルにより作られる磁気面

ここでは、図1のように連結したカスプ磁場コイルの作る磁気面を簡単なモデルで解析し、閉磁気面を作り出す条件を求める。図1のコイルシステムは全長が L で周期的に配置するものとする。このとき、カスプ型の真空磁場 B_C の最も簡単なモデルは、

$$B_C(\mathbf{X}) = \frac{B_{C0}}{a} \begin{bmatrix} x \\ -y \\ 0 \end{bmatrix} : 0 < z < \frac{L}{4} \quad , (1)$$

で与えられる。この磁場はコイルシステムの前 $1/4$ 周期の部分に存在しているものとする。次の $1/4$ 周期の部分では、(1)式の磁場を 45° だけ z 軸のまわりに回転させた磁場になるようにする：

$$B_C(\mathbf{X}) = \frac{B_{C0}}{a} \begin{bmatrix} y \\ x \\ 0 \end{bmatrix} : \frac{L}{4} < z < \frac{L}{2} \quad . (2)$$

同様のプロセスを続けると、

$$\mathbf{B}_C(\mathbf{X}) = \frac{B_{C0}}{a} \begin{bmatrix} -x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} : \frac{L}{2} < z < \frac{3}{4}L \quad , (3)$$

$$\mathbf{B}_C(\mathbf{X}) = \frac{B_{C0}}{a} \begin{bmatrix} -y \\ -x \\ 0 \end{bmatrix} : \frac{3}{4}L < z < L \quad , (4)$$

という連結カスプ磁場も得る。もとより、コイルで作られる磁場には上のモデル磁場 $\mathbf{B}_C(\mathbf{X})$ の $z=0, \frac{1}{4}L, \frac{1}{2}L, \frac{3}{4}L, L$ に現れるような不連続性は存在しないが、ここではその影響は無視する。このモデルカスプ磁場に、さらに縦磁場として一様な z 方向の磁場 B_0 を重畳する。すると、磁力線の式は

$$\frac{dx}{dz} = \frac{B_{C0}}{B_0} \cdot \frac{1}{a} \cdot \begin{cases} x : 0 < z < \frac{L}{4} \\ y : \frac{L}{4} < z < \frac{L}{2} \\ -x : \frac{L}{2} < z < \frac{3}{4}L \\ -y : \frac{3}{4}L < z < L \end{cases} \quad , (5)$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{B_{C0}}{B_0} \cdot \frac{1}{a} \cdot \begin{cases} -y : 0 < z < \frac{L}{4} \\ x : \frac{L}{4} < z < \frac{L}{2} \\ y : \frac{L}{2} < z < \frac{3}{4}L \\ -x : \frac{3}{4}L < z < L \end{cases} \quad , (6)$$

で与えられる。磁力線の式 (5), (6) を $x(z=0) = x_0, y(z=0) = y_0$ を出発点として $z=L$ まで解くと次のようになる：

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv x(z=L) \\ &= a_{11} x_0 + a_{12} y_0 \end{aligned} \quad , (7)$$

$$\begin{aligned} y_1 &\equiv y(z=L) \\ &= a_{21} x_0 + a_{22} y_0 \end{aligned} \quad , (8)$$

$$a_{11} = \frac{1}{4} \left[\frac{(1+d)^2}{d} - (1-d)^2 \right], \quad a_{12} = -\frac{(1+d)(1-d)^2}{4d^2} \quad , (9)$$

$$a_{21} = \frac{(1+\Delta)(1-\Delta)^2}{4\Delta}, \quad a_{22} = \frac{1}{4} \left[\frac{(1+\Delta)^2}{\Delta} - \frac{(1-\Delta)^2}{\Delta^2} \right], \quad (10)$$

$$\Delta \equiv e\mu L/2, \quad \mu = \frac{B_{C0}}{B_0} \frac{1}{a}, \quad (11)$$

同様の手続きにより,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &\equiv x(z=[n+1] \cdot L) \\ &= a_{11} x_n + a_{12} y_n \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} y_{n+1} &\equiv y(z=[n+1] \cdot L) \\ &= a_{21} x_n + a_{22} y_n \end{aligned} \quad (13)$$

の関係が成立するので, x_n, y_n は

$$x_n = \alpha_+ \lambda_+^n + \alpha_- \lambda_-^n \quad (14)$$

$$y_n = \beta_+ \lambda_+^n + \alpha_- \lambda_-^n \quad (15)$$

と表わすことが出来るようになる。ここで, $\lambda_{\pm}$ は (12), (13) 式の係数行列

a_{ij} ($i, j = 1, 2$) の固有値で,

$$\lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{12}) + 1 = 0 \quad (16)$$

で決定される。なお, (16) 式の導出にあたっては (9), (10) 式で与えられた a_{ij} について,

$$a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = 1 \quad (17)$$

の関係が常に成立していることを利用した。この (16) 式で与えられる固有値 λ_+, λ_- の間では常に

$$\lambda_+ \lambda_- = 1 \quad (18)$$

となる。よって, (14), (15) 式で与えられる x_n, y_n が閉曲線となる条件は (16) 式の固有値が複素根となることに還元される。よって, 連結カスプ磁場が閉じた磁気面を作る条件は (16) 式の判別式が負となる条件:

$$(a_{11} + a_{12})^2 - 4 < 0 \quad (19)$$

で与えられる ((19) 式の導出には関係式 (17) を利用した)。

ここで、(9)、(10)式を使うと、

$$a_{11} + a_{12} = -\frac{1}{4} \left(\Delta + \frac{1}{\Delta} - 2 \right)^2 + 2 \quad , (20)$$

となるので、(19)式の関係は

$$\Delta + \frac{1}{\Delta} - 2 < 4 \quad , (21)$$

に還元される。よって、磁気面を構成するために必要な条件は、

$$\frac{B_{C0}}{B_0} \frac{L}{a} \leq 2 \ell n (3 + 2\sqrt{2}) = 3.5 \dots\dots \quad , (22)$$

で与えられる。なお、(22)式の導出にあたっては Δ 、 μ の定義式(11)を利用した。

次に、磁気面の回転変換 ϵ を計算する。固有値 λ_+ 、 λ_- を決定する方程式の判別式が負となるときは常に、

$$|\lambda_+| = |\lambda_-| = 1, \quad \lambda_+ = \lambda_-^* \quad (23)$$

が成立する。よって、

$$\lambda_{\pm} = e^{\pm i\varphi}, \quad \varphi : \text{実数}, \quad (24)$$

となる。ここで、 φ は

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{1}{2} (a_{11} + a_{12}) \\ &= 1 - \frac{1}{8} \left(\Delta + \frac{1}{\Delta} - 2 \right)^2 \end{aligned} \quad , (25)$$

で与えられる。ここでは(20)式の関係を利用した。この関係は

$$\varphi = 2 \sin^{-1} \left[\frac{1}{4} \left(\Delta + \frac{1}{\Delta} - 2 \right) \right] \quad , (26)$$

と表わされる。この(26)式で得られた角 φ はカスプ磁場コイルの一周期分を通過したときの磁力線の回転変換角に相当する。この回転変換角は磁気面によらずに一定なのでシアは存在しない。トーラス状にN組のカスプ磁場コイル群が設置されているときには、磁気面の回転変換 ϵ は

$$\epsilon = \varphi \cdot N \cdot \frac{1}{2\pi} = N \cdot \frac{2}{2\pi} \sin^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \left[\cosh \left(\frac{B_{C0}}{B_0} \cdot \frac{L}{2a} \right) - 1 \right] \right\} \quad , (27)$$

で与えられることが推定される。これより、トーラス状に連結したカスプ磁場コイルによる ϵ の上限は

$$\epsilon < \frac{N}{4} \quad , (28)$$

で与えられることが導かれる。また縦磁場が十分に強いとき、すなわち

$$\frac{B_{C0}}{B_0} \cdot \frac{L}{2a} \ll 1 \quad , (29)$$

のときは、(27)式を展開することにより、回転変換を与える近似式

$$\begin{aligned} \epsilon &\sim N \frac{2}{2\pi} \frac{1}{16} \left(\frac{B_{C0}}{B_0} \cdot \frac{L}{a} \right)^2 \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{R^2}{a^2} \cdot \frac{B_{C0}^2}{B_0^2} \end{aligned} \quad , (30)$$

を得る。ここでは、 R はトカマクの大半径を表わし、 $NL = 2\pi R$ が成立するとした。

磁気面の断面は(14)、(15)式より楕円となることが導かれる。その長径と短径の比 ϵ は(12)–(15)、(24)、(25)式より

$$\begin{aligned} \epsilon &= | \alpha_+ / \beta_+ | \\ &= \Delta^{-1/2} \\ &= \exp \left[- \frac{1}{4} \frac{B_{C0}}{B_0} \frac{L}{a} \right] \end{aligned} \quad , (31)$$

となる。(27)式で与えられた回転変換 ϵ を使うと楕円の長軸と短軸の比は、

$$\epsilon \sim \exp \left[- \left(\frac{2\pi\epsilon}{N} \right)^{1/2} \right] \quad (32)$$

と表わせる。

§ 3. 連結カスプ磁場コイルによるトロイダルヘリカル磁場の数値計算例

前節においては、簡単なモデル磁場でヘリカルシステムの磁気面を解析した。この解析の妥当性を確かめるため、新しく開発した磁場解析コードを使って磁気面の解析を行った。

まず始めに、図1に示した連結カスプ磁場コイルを使って直線ヘリカル磁場の磁気面を解析した。

磁気面の一例を図2に示す。前節の解析に示されたように、楕円形の切口を持つ磁気面の存在が確認された。

次に、カスプ磁場コイルをトーラス状に配置した磁場について磁気面の解析を行った。トーラス状に配置するために、カスプ磁場を作るコイルを図3に示すように4種用意した。これらを順次トーラス方向に並べて45°ずつ回転するカスプ磁場を作る。縦磁場(トロイダル磁場)は矩形断面のコイルを並べて作り出す。トロイダル磁場コイルの設置状況および、カスプ磁場コイルの設置状況を図4に示す。§2で用いたNの値は8となる。

磁気面の数値計算例を図5に示す。図5にはほぼ最外殻の磁気面もプロットされている。前節での解析では磁気面の最外殻の存在は示されていなかったが、現実のトーラス配位では磁気面の大きさには限度がある。この磁気面はコイル中心($r = 140 \text{ cm}$, $z = 0$)からズレた位置に作られている。このズレは縦磁場コイルの電流を逆転すると、 $z = 0$ の面に対して対称な位置に移動することを確認した。これはカスプ磁場を作る4種のコイルの形状の違いにより、 $\ell = 2$ 以外のヘリカル磁場成分が現われているためと思われる。この4種のコイルに流す電流値を調整すれば、もっと大きな磁気面を容器内に作り出せる可能性がある。

図5に示した磁気面の回転変換 θ を図6に示す。このグラフには(30)式で推定される

図2. 図1のコイルに一樣な縦磁場を重畳したときの磁気面($Z=0$)の数値計算例。 $\ell = 2$ のステラレータ磁場に特徴的な楕円型の磁気面が形成されている。

図3. 連結カスプによるトロイダルシステムを作るための4種の基本カスプ磁場コイル。この4種のコイルをトーラス軸に沿って並べて配置すると、トーラス断面を矩形に保ちながらトーラス軸のまわりに45°ずつ回転したカスプ磁場を作ることができる。

図4. a), b) 縦磁場を作るための矩形状トーラスコイルの配置状況 (全32個中の10個のみを記す)。
 c), d) 連結カスプコイルの配置状況 (全64個中の8個のみを示す)。
 e), f), g) 各コイルの寸法を示す。ただし、鞍形状のコイルは f) と g) のコイルを半分ずつ接続して作られる。
 h), i) 縦磁場 (h) と横磁場 (i) の強度分布の一例 (図4-dの一点鎖線に沿った断面での値)。

回転変換の理論値もプロットした。数値計算と理論値の一致は比較的良い。また、より大きな回転変換を得るためトロイダルコイルの電流値を80%減少させたときの磁気面の回転変換の値も同図に掲載した。これも理論式(30)を良くサポートしている。

磁気面の短軸と長軸の比の理論式は(32)式で与えられている。この式に回転変換の実測値

$$\epsilon \sim 0.6$$

を代入すると

$$\epsilon \simeq 0.63$$

となる。この短軸と長軸の比も図5に示された磁気面の数値計算結果と良く一致している。また、トロイダルコイルの電流値のみを800 A/cm²に低下させたときには、 $\epsilon \sim 0.94$ 、 $\epsilon \sim 0.4$ の磁気面の得られることを確認している。

図5. 図4のコイルシステムに全て同一の電流(1000 A/cm²)を流したときに得られる磁気面の数値計算結果。

図6. 図5に示した磁気面の回転 ϵ の実測値。横軸Dは磁気面の短軸方向の厚みを示す。 ϵ 2で求めた ϵ の理論値(27) (“—”)も記入されている。なおこのときには
 $B_0 \simeq 2300 \text{ Gau}$
 $B_{co}/a = 151 \text{ (G)} / 4 \text{ (cm)}$
 $L = 2\pi \times 140 \text{ (cm)} / 8 \text{ (N = 8に相当)}$

の値を使用した。

なお、“x”はトロイダルコイルの電流を800 A/cm²にしたときの回転変換の実測値を表わす。

§ 4. まとめと討論

連結カスプ磁場コイルにより, $\ell = 2$ のヘリカル磁場システムの作り出されることを数値計算で示した。また, 簡単なモデル磁場でこの磁気面の性質を解析できることを示すことも出来た。

当研究においては対向したカスプ磁場を連結して $\ell = 2$ のステラレータ型磁場を数値解析したが, 同様の手法により $\ell \geq 3$ のステラレータ型磁場も分割コイルで構成できるはずである。この場合は, 磁気シアのある配位が得られると予想される。具体的な数値解析は今後の課題である。

当研究のいま一つの目的は新開発の磁場解析コードの有用性のテストであった。その結果について報告しておく。図5の磁気面の解析は6次のルンゲクッタ法を用いて磁力線の方程式

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \frac{1}{B} \mathbf{B}(\mathbf{X})$$

を解いた。トーラスを1周するのに約30分のCPU時間を必要とした(電子計算機: 名大プラズマ研究所 FACOM M-200)。この間に磁場計算サブルーチンを呼び出した回数は約2480回である。なお, コイル系を構成している要素コイル(円弧状コイルと柱状コイル)の総数は896個である。

謝 辞

当研究の推進にあたっては東大教授宮本健郎氏, 京大ヘリオトロン研究センター教授飯吉厚夫氏, 助教授若谷誠宏氏に有益な助言をいただいた。

当研究は文部省科学研究費補助金および同エネルギー特別研究(核融合)そして日産科学振興財団による支援を部分的に受けた。

参 考 文 献

- 1) K. Uo, A. Iiyoshi, T. Obiki, O. Motojima, S. Morimoto, A. Sasaki, K. Kondo, M. Sato, T. Mutoh, H. Zushi, H. Kaneko, S. Besshou, F. Sano, T. Mizuuchi, S. Sudo, K. Hanatani, M. Nakasuga, I. Ohtake, M. Iima, Y. Nakashima and N. Nishino: 10th International Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, Vienna (1983) CN-41/L-3

- 2) G. Cattanei, D. Dorst, A. Elsner, G. Grieger, H. Hacker, J. Hartruss, H. Jackel, R. Jaenicke, J. Junker, M. Kick, H. Kroiss, C. Mahn, S. Marlier, G. Muller, W. Ohlendopf, F. Rau, H. Renner, H. Ringler, F. Sardei, M. Tutter, A. Weller, H. Wobig, E. Wursching, M. Zippe, K. Freudenberger, G. G. Lister, W. Ott, F. P. Penningsfeld and E. Speth : 10 th International Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, Vienna (1983) CN-41/L-5
- 3) T. K. Chu, H. P. Furth, J. L. Johnson, C. Ludoscler and K. E. Weimer : Nuclear Fusion, 22 (1982) 871
- 4) Yu. N. Pentrenko and A. P. Popryadukhin : in Toroidal Confinement (Proc. 3 rd Int. Symp. Garching, 1973), paper D 8
- 5) S. Rehker and H. Wobig : in Fusion Technology, (Proc. 7 th Symp. Noordwijkerhout, 1974) 345