4. 開放端系のシミュレーション

片 沼 伊佐夫

(筑波大学プラズマ研究センター)

相 澤 正 満

(日本大学原子力研究所)

(1985年7月11日受理)

Computer Simulation in Open Ended Systems

Isao Katanuma and Masamitsu Aizawa[†]

(Received July 11, 1985)

Abstract

Principles and methods of simulating a transport process in tandem mirrors with collisions and external sources are reviewed. In particular numerical scheme of two dimensional bounce averaged Fokker-Planck code and its applications are shown. Three dimensional Monte Carlo code is also introduced with numerical scheme of magnetic field and particle orbit calculations. The radial transport code is briefly referred with its references.

4-1. はじめに

磁力線の端が開いているミラー型核融合の研究は古くから行われているが磁力線の端が開いている故に起こるプラズマの端損失が大きな欠点であった。しかし1970年代にタンデムミラーの概念が発表^{1, 2)}されて以来ミラー型核融合の大きな欠点である端損失が大幅に改善される可能性がでて来た。これは主に中央ミラーの両端に小さなミラーを加え中央ミラー内のプラズマの端損失を両端の小さなミラー内に形成される静電ポテンシャルによって抑えようとするものである。タンデムミラーの実験は世界においてもまだ歴史は古いとは言えず計算機シミュレーションの課題は一つは将来のタンデムミラー型核融合炉の設計に寄与することであるが、当面の重要な課題としてタンデムミラープラズマの巨視的な平衡, 安定性, 微視的な安定性さらに輸送現象の物理過程の定量的な解明がある。本稿ではミラーの特徴を良く表わしたシミュレーションの技法としては最も進んでいると思われる輸送に関するものを取り上げる。

まず磁力線に沿った輸送を考える場合, タンデムミラーのように磁力線が端で開いている系ではプラズマ

Plasma Research Center, The University of Tsukuba, Ibaraki 305.

[†] *Atomic Energy Research Institute, Nihon University, Tokyo 101.*

分布関数が熱平衡状態のマクスウェル分布から大きくずれた分布関数を定常状態として考える必要がある。この定常な分布関数は中性粒子ビーム入射、波動加熱等の外部ソースによって維持される。

上で述べたように中央ミラー内のイオンを閉じ込めるために、両端のミラー内に中央ミラーに対して正の静電ポテンシャルを形成する必要がある。その正の静電ポテンシャルが形成される領域をプラグ部と言いその静電ポテンシャルをプラグポテンシャルと言う。プラグポテンシャルはプラグ部の電子温度を上げることによって大きくすることができるが、特に両端ミラー部にサーマルバリア³⁾と呼ばれる静電ポテンシャルの谷を作り中央部の電子とプラグ部の電子の間で熱のやりとりを少なくすると、効率よくプラグ部の電子温度を上げてプラグポテンシャルを大きくすることができる³⁾。特に両端にある単一ミラー内にサーマルバリア及びプラグポテンシャルを形成する場合を考えてみる。イオン・電子ともマクスウェル分布をしていると単一ミラー内では密度・温度は軸方向(磁力線方向)に沿って一定になり静電ポテンシャルも軸に沿って一様になる。従ってサーマルバリア及びプラグポテンシャルをタンデムミラーの両端ミラー内で形成するためにはイオン及び電子の分布関数をマクスウェル分布から大きくずれたものにして維持することが本質になる。このためタンデムミラーの軸方向の輸送を正確に把握するためにはフォッカープランク方程式を数値的に解く必要がでてくる。

開放端系の軸方向の輸送がタンデムミラーにすることによって大幅に改善されると、今まで無視されて来た径方向(磁力線を横切る方向)の輸送が重要になってくる。タンデムミラーでは巨視的な安定性を確保するためその中に非軸対称磁場の領域を加えている。ローレンスリバモア国立研究所のTMX upgrade 装置⁴⁾ではタンデムミラーの両端が非軸対称磁場でできており、筑波大学プラズマ研究センターのGAMMA 10装置⁵⁾では両端ミラーは軸対称磁場で構成してその内側にアンカーと呼ばれる別の非軸対称磁場でできているミラーを持つ。このため粒子のドリフト面と磁気面の間にずれが生じて、径方向のプラズマ輸送が増大する。特にGAMMA 10 装置はプラズマの巨視的な安定性を確保しながら径方向の輸送をできるだけ小さくするように設計された装置であるので、実際どのくらい改善されたかを調べることは極めて重要である。径方向の輸送は個々の実験装置で大きさが違うことが予想されるので、それぞれの磁場配位において、粒子軌道を調べさらにそれが衝突によってどのように軌道がずれていくかを調べることによって輸送に対する影響を評価する必要がある。

2節ではタンデムミラーで使われるフォッカープランクコード、3節ではモンテカルロコードについて述べる。

4-2. フォッカープランクコード

フォッカープランクコードの歴史はかなり古くさまざまな差分方程式で解かれておりその性質も良く分かっている⁶⁾。しかしそのどれもが磁力線方向の情報を落とした速度空間2次元($v_{\parallel}$, $v_{\perp}$)のモデルか、その情報を含んでいたとしても静電ポテンシャルを正確に取り入れていないコードである。従ってタンデムミラ

一の軸方向の輸送を把握するために磁力線方向の情報を取り入れ、静電ポテンシャル分布を自己無撞着に求めることのできるコードを作る必要がある⁷⁾。これによってサーマルバリアー及びプラグポテンシャルの形成過程や外部ソースのパワー等の要求を調べることができる。

フォッカープランクの衝突項を含む運動論的方程式は次のようになる

$$\frac{\partial}{\partial t} f_t + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} f_t + \frac{\mathbf{F}}{m_t} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f_t = \left(\frac{\partial f_t}{\partial t} \right)_c + D_h f_t \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial f_t}{\partial t} \right)_c = \sum_{\alpha} \left\{ -\frac{\partial}{\partial v_i} \left(f_t \frac{\partial h_{\alpha}}{\partial v_i} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} \left(f_t \frac{\partial^2 g_{\alpha}}{\partial v_i \partial v_j} \right) \right\} \Gamma_{\alpha}, \quad (2)$$

$$g_{\alpha}(\tilde{v}) = \int d\tilde{v}' f_{\alpha}(\tilde{v}') |\tilde{v} - \tilde{v}'|, \quad (3)$$

$$h_{\alpha}(\tilde{v}) = \frac{m_t + m_{\alpha}}{m_{\alpha}} \int d\tilde{v}' \frac{f_{\alpha}(\tilde{v}')}{|\tilde{v} - \tilde{v}'|}, \quad (4)$$

$$\Gamma_{\alpha} = \frac{4\pi q_{\alpha}^2 q_t^2}{m_t^2} \ln A_{\alpha t}. \quad (5)$$

添字 t , α は粒子の種類で, v_i , v_j は速度成分を表わす。他の変数は標準的な表示を用いている。(1) 式の $D_h f$ は外部ソースによる項である。また(1)式の左辺第2, 第3項は磁力線に沿った粒子のバウンス時間の時間スケールで変動する項である。粒子の衝突時間がバウンス時間に比べて充分長いと仮定すると、衝突時間の時間スケールで現象を考えると一本の磁力線上の分布関数は粒子の速度差等によるバウンス時間の違いによって phase mixing を起こし局所的な準定常状態が実現するはずである。この状態では分布関数は時間を含まないでブラソフ方程式の近似解になっていると考えることができる。さらに粒子の運動に対して案内中心近似が成り立ち、粒子の運動エネルギーと磁気モーメントがバウンス時間の時間スケールで保存すると仮定するならば、(1)式は次のように書ける⁸⁾。

$$\frac{\partial}{\partial t} f(v_b, \theta_b) = \int_{\text{orbit}} \frac{dz}{v_{\parallel}} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c + D_h f \right\} / \int_{\text{orbit}} \frac{dz}{v_{\parallel}}. \quad (6)$$

積分は磁力線に沿った粒子の案内中心の軌道に沿って行う。 $f(v_b, \theta_b)$ は磁気中央面(ミラー磁場において磁場の強さが最も小さい所)における分布関数である。つまり $f(v_b, \theta_b) = f(v, \theta, z=0)$ である。以後速度空間について (v, θ, φ) の球座標を用いる。粒子のラーモア回転の効果はラーモア振動数が他の特徴的な振動数に比べて大きいと仮定すると、 f は φ に関して平均化されて分布関数は速さ v と磁力線と速度ベクトルのなす角 θ のみの関数と考えることができる。

フォッカープランク衝突項 $\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c$ は次のように書き直すことができる。

$$\left(\frac{\partial f_t}{\partial t} \right)_c = \sum_{\alpha} \left\{ A_{\alpha} \frac{\partial^2 f_t}{\partial v_b^2} + B_{\alpha} \frac{\partial^2 f_t}{\partial v_b \partial \theta_b} + C_{\alpha} \frac{\partial^2 f_t}{\partial \theta_b^2} + D_{\alpha} \frac{\partial f_t}{\partial v_b} + E_{\alpha} \frac{\partial f_t}{\partial \theta_b} + F_{\alpha} f_t \right\}. \quad (7)$$

ここで(7)式の右辺の f_t はすべて磁気中央面での値である。磁力線方向の情報は(7)式の右辺の係数に

含まれている。(1)式の $D_h f$ の項も(7)式に含めることができる。(6)式及び(7)式より係数 $A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha, D_\alpha, E_\alpha, F_\alpha$ を数値的にバウンス平均すれば磁力線に沿った情報を取り入れたことになる。(7)式の係数を具体的に書くとな次のようになる。

$$\begin{aligned}
 A_\alpha &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial v^2} \Gamma_\alpha, \\
 B_\alpha &= \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial v \partial \theta} - \frac{1}{v^3} \frac{\partial g_\alpha}{\partial \theta} \right) \Gamma_\alpha, \\
 C_\alpha &= \left(\frac{1}{2v^4} \frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial \theta^2} + \frac{1}{2v^3} \frac{\partial g_\alpha}{\partial v} \right) \Gamma_\alpha, \\
 D_\alpha &= \left(\frac{1}{2v^3} \frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial \theta^2} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial g_\alpha}{\partial v} + \frac{1}{2v^3 \tan \theta} \frac{\partial g_\alpha}{\partial \theta} + \frac{\partial I_\alpha}{\partial v} \right) \Gamma_\alpha, \\
 E_\alpha &= \left(\frac{1}{v^4 \sin^2 \theta} \left[1 - \frac{1}{2} \cos^2 \theta \right] \frac{\partial g_\alpha}{\partial \theta} - \frac{1}{v^3} \frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial v \partial \theta} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2v^3 \tan \theta} \frac{\partial g_\alpha}{\partial v} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial I_\alpha}{\partial \theta} \right) \Gamma_\alpha, \\
 F_\alpha &= 4\pi \frac{m_t}{m_\alpha} f_\alpha \Gamma_\alpha,
 \end{aligned} \tag{8}$$

ただし,

$$I_\alpha = \left(2 \frac{m_\alpha}{m_t + m_\alpha} - 1 \right) h_\alpha.$$

(3), (4)式を解いて g_α, h_α を求める方法は幾つかあるが⁶⁾ ここではルジャンドル多項式で展開する方法を紹介する。分布関数をルジャンドル多項式で展開すると,

$$\begin{aligned}
 f(v, \theta) &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(v) P_k(\cos \theta), \\
 \alpha_k(v) &= \int_{-1}^1 d \cos \theta f P_k(\cos \theta) / \int_{-1}^1 d \cos \theta P_k^2(\cos \theta)
 \end{aligned} \tag{9}$$

従って(3), (4)式は次のように書ける^{9, 10)}。

$$\begin{aligned}
 g_\alpha(v, \theta) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2k+1} v^4 P_k(\cos \theta) \left[\frac{1}{2k+3} \left\{ \frac{1}{v^{5+k}} \int_0^v \alpha_k(v') v'^{4+k} dv' \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{v^{2-k}} \int_v^\infty \alpha_k(v') v'^{1-k} dv' \right\} - \frac{1}{2k-1} \left\{ \frac{1}{v^{3+k}} \int_0^v \alpha_k(v') v'^{2+k} dv' \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{v^{4-k}} \int_v^\infty \alpha_k(v') v'^{3-k} dv' \right\} \right],
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$h_{\alpha}(v, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2k+1} v^2 P_k(\cos \theta) \left\{ \frac{1}{v^{2-k}} \int_v^{\infty} \alpha_k(v') v'^{1-k} dv' \right. \\ \left. + \frac{1}{v^{3+k}} \int_0^v \alpha_k(v') v'^{2+k} dv' \right\}. \quad (11)$$

(10), (11) 式において v' に関する積分は数値的に行う。 $\partial^2 g_{\alpha} / \partial v^2$, $\partial h_{\alpha} / \partial v$ も (10), (11) 式と同じように v' に関する積分形に書くことができ数値積分により求めることができる。しかし $\partial g_{\alpha} / \partial \theta$ 等 θ に関する微分はそのまま差分式にして計算することにする。この方が数値誤差が少なくなる。

次に (6), (7) 式より

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = \sum_{\alpha} \left\{ \langle A_{\alpha} \rangle \frac{\partial^2 f_t}{\partial v_b^2} + \langle B_{\alpha} \rangle \frac{\partial^2 f_t}{\partial v_b \partial \theta_b} + \langle C_{\alpha} \rangle \frac{\partial^2 f_t}{\partial \theta_b^2} \right. \\ \left. + \langle D_{\alpha} \rangle \frac{\partial f_t}{\partial v_b} + \langle E_{\alpha} \rangle \frac{\partial f_t}{\partial \theta_b} + \langle F_{\alpha} \rangle f_t \right\}, \quad (12)$$

$$\langle A \rangle \equiv \int_{\text{orbit}} A \frac{dz}{v_{\parallel}} / \int_{\text{orbit}} \frac{dz}{v_{\parallel}}. \quad (13)$$

(12) 式は 2 階偏微分方程式であるので ADI 法または time splitting and fractional step 法^{6, 11)}を用いて解くことができる。特に ADI 法に関しては文献 (6) に詳細な記述があるのでここでは省略する。

磁気中央面の分布関数に対する境界条件として

$$\frac{\partial}{\partial \theta} f(v=0, \theta) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial v} f(v=0, \theta=\pi/2) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} f(v, \theta=0) = \frac{\partial}{\partial \theta} f(v, \theta=\pi/2) = 0, \quad (14)$$

を用いる。さらに $\theta = \pi/2$ の面に対して対称性を仮定して分布関数を $0 \leq v \leq v_{\max}$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$ の領域で解く。

磁気中央面よりずれた所において $F = \int \tilde{v}^n f(\tilde{v}, t) d\tilde{v}$ の型の積分を実行する場合に特別な注意が必要になる。たとえば単純に (v, θ) を磁気中央面での変数 (v_b, θ_b) に変換して積分を書き直すと

$$F = \int d\tilde{v}_b \frac{\partial(\tilde{v})}{\partial(\tilde{v}_b)} \left\{ \tilde{v}_b^2 - \frac{2q}{m} (\varphi - \varphi_b) \right\}^{n/2} f(\tilde{v}_b), \quad (15)$$

ただし

$$\frac{\partial(\tilde{v})}{\partial(\tilde{v}_b)} = \cos \theta_b / \sqrt{\psi(\cos^2 \theta_b - 1 + \psi v^2 / v_b^2)}, \\ \psi = B_b / B,$$

ここで B_b, φ_b は磁気中央面での磁場の強さ及び静電ポテンシャルの値である。(15) 式はヤコビアン $\partial(\tilde{v})/\partial(\tilde{v}_b)$ より現われる特異点を持つので、その近傍で数値誤差が増大する。従って(15) 式のような (v_b, θ_b) への変換は行わずに次のような方法を用いる。

数値的には分布関数 $f(v_b, \theta_b)$ は磁気中央面上の速度空間内の格子点上で定義されている。磁気中央面よりずれた点における分布関数 $f(v, \theta, z)$ はリュービルの定理によって $f(v_b, \theta_b)$ と結びついている。

$$f(v, \theta, z) = f(v_b, \theta_b) \quad (16)$$

従って速度格子点 (v, θ) 自身を粒子のエネルギー保存則及び磁気モーメント保存則を用いて変換する。

$$\begin{aligned} v^2 &= v_b^2 + \frac{2q}{m} \varphi_b - \frac{2q}{m} \varphi(z), \\ v^2 \sin^2 \theta &= \frac{B(z)}{B_b} v_b^2 \sin^2 \theta_b. \end{aligned} \quad (17)$$

つまり磁気中央面で、ある速度格子点が座標値 (v_b, θ_b) を持っているとき磁気中央面よりずれた位置では(17)の関係式を使って座標値 (v, θ) を持つようにする。そうすると積分 F は (v, θ) 座標を使うことにより積分ができヤコビアンから現われる特異点も持っていないので数値的には問題なくなる。

静電ポテンシャルを求めるために密度分布を計算する必要があるが、このために速度空間内の格子 (v_i, θ_i) に加えてミラーのロスコーン境界上に格子 (v_i, θ_i) を追加する。添字 i, j はそれぞれ v, θ 方向の格子点を表わす。ロスコーン境界上の格子点 (v_i, θ_i) での分布関数は、そのまわりの格子点での分布関数の値より内挿によって求める。ミラー捕捉粒子の密度 n_f はロスコーン外の領域で分布関数を数値積分して求める。

ミラーの端よりミラー内に流入するパッシング粒子及びユシマノフ捕捉粒子の密度は以下のような解析解を用いる。図1(a)に示すような単純ミラー内の典型的な静電ポテンシャル分布を考える。この系の中でイオン・電子のミラー端での分布関数を

図1. 単一ミラーの模式図。

(a) は軸方向の典型的な磁場強度及び静電ポテンシャル分布。 q は電荷である。
(b) は単一ミラー内の粒子の速度空間を示す。 ϵ と $\mu = \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 / B$ は粒子のエネルギー及び磁気モーメント、 B と ϕ は磁場強度及び静電ポテンシャルの大きさを表わす。添字 0 と b はそれぞれミラー端とミラーの磁気中央面での量を表わしている。

$$f_i = n_m \left(\frac{m_i}{2\pi T_i} \right)^{3/2} \exp \left(\frac{\varepsilon_i - q_i \varphi_0}{T_i} \right),$$

$$f_e = n_m \left(\frac{m_e}{2\pi T_e} \right)^{3/2} \exp \left(\frac{\varepsilon_e - q_e \varphi_0}{T_e} \right), \quad (18)$$

$$\varepsilon_i = \frac{1}{2} m_i v^2 + q_i \varphi, \quad \varepsilon_e = \frac{1}{2} m_e v^2 + q_e \varphi,$$

と仮定する。ただし n_m はミラー端での密度, $q_i \cdot q_e$ はそれぞれイオン・電子の電荷, B_0, φ_0 ミラー端での磁場の強さ及び静電ポテンシャルの値である。以後簡単のために添字 i, e は落す。パシグ粒子は図 1(b) において $\varepsilon \geq \mu B + q \varphi$ かつ $\varepsilon \geq \mu B_0 + q \varphi_0$ の領域に存在する。従ってパシグ粒子の密度 n_p は (18) 式を上領域にわたって積分すれば得られる。

$$n_p = n_m \exp(-\delta \varphi) \left[\operatorname{erfc} \left\{ (-\delta \varphi)^{1/2} \right\} - \left(1 - \frac{1}{R} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{\delta \varphi}{R-1} \right) \operatorname{erfc} \left\{ \left(-\frac{R}{R-1} \delta \varphi \right)^{1/2} \right\} \right], \quad \delta \varphi \leq 0, \quad (19)$$

$$n_p = n_m \exp(-\delta \varphi) \left\{ 1 - \left(1 - \frac{1}{R} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{\delta \varphi}{R-1} \right) \right\}, \quad \delta \varphi > 0.$$

ただし,

$$\delta \varphi = \frac{q(\varphi - \varphi_0)}{T}, \quad R = B_0 / B,$$

$$\operatorname{erfc} \{x\} = 2 \int_x^\infty \exp(-t^2) dt / \sqrt{\pi}.$$

ここで $R \geq 1$ の仮定をした。パシグ粒子の密度は (12) 式を解いて得られる分布関数の数値積分によっても求めることができるが、静電ポテンシャルを計算するための密度分布を求める場合は計算時間及び計算精度の関係から (19) 式を用いる。

ユシマノフ捕捉粒子は磁気中央面を通過しない粒子であるからこれまでに述べて来た方法ではその粒子の分布関数の時間変化を追うことはできない。従ってユシマノフ捕捉粒子は (19) 式と同じ分布関数であると仮定して、その密度 n_y を解析的に求める。ユシマノフ捕捉粒子は図 1(b) において $\varepsilon \leq \mu B_0 + q \varphi_0$, $\varepsilon \leq \mu B_b + q \varphi_b$, $\varepsilon \geq \mu B + q \varphi$ の直線で囲まれた領域にあるから, (19) 式をこの領域で積分すればその密度が求まる。

$$\frac{R_b}{R_b-1} \delta \varphi_b \geq \frac{R}{R-1} \delta \varphi, \quad \frac{R}{R_b-R} (\delta \varphi_b - \delta \varphi) \geq \frac{1}{R_b-1} \delta \varphi_b, \quad \delta \varphi \geq 0,$$

の場合

$$n_y = n_m \sqrt{(R-1)/R} \exp \left(-\frac{R}{R-1} \delta \varphi \right) \left[1 - \operatorname{erfc} \left\{ \left(\frac{R_b}{R_b-1} \delta \varphi_b - \frac{R}{R-1} \delta \varphi \right)^{1/2} \right\} \right]$$

$$- n_m \sqrt{(R_b-R)/R} \exp \left\{ \frac{R}{R_b-R} \delta \varphi - \frac{R_b}{R_b-R} \delta \varphi_b \right\} D_s \left\{ \left(\frac{R}{R_b-R} (\delta \varphi_b - \delta \varphi) - \frac{1}{R_b-1} \delta \varphi_b \right)^{1/2} \right\},$$

$$\frac{R_b}{R_b-1} \delta \varphi_b \geq \frac{R}{R-1} \delta \varphi, \quad \frac{R}{R_b-R} (\delta \varphi_b - \delta \varphi) \geq \frac{1}{R_b-1} \delta \varphi_b, \quad \delta \varphi < 0,$$

の場合

$$\begin{aligned} n_y = & n_m \exp(-\delta \varphi) [1 - \operatorname{erfc} \{(-\delta \varphi)^{1/2}\}] \\ & + n_m \sqrt{(R-1)/R} \exp\left(\frac{R}{R-1} \delta \varphi\right) \left[\operatorname{erfc} \left\{ \left(-\frac{R}{R-1} \delta \varphi\right)^{1/2} \right\} \right. \\ & \left. - \operatorname{erfc} \left\{ \left(\frac{R_b}{R_b-1} \delta \varphi_b - \frac{R}{R-1} \delta \varphi \right)^{1/2} \right\} \right] \\ & - n_m \sqrt{(R_b-R)/R} \exp \left\{ \frac{R}{R_b-R} \delta \varphi - \frac{R_b}{R_b-R} \delta \varphi_b \right\} D_s \left\{ \left(\frac{R}{R_b-R} (\delta \varphi_b - \delta \varphi) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{R_b-1} \delta \varphi_b \right)^{1/2} \right\}, \end{aligned} \quad (20)$$

それ以外の場合

$$n_y = 0,$$

ただし

$$\begin{aligned} D_s \{x\} &= 2 \int_0^x \exp(t^2) dt / \sqrt{\pi}, \\ \delta \varphi_b &= \frac{q(\varphi_b - \varphi_0)}{T}, \quad R_b = B_0 / B_b. \end{aligned}$$

ここで $R \geq 1$, $R_b \geq 1$ を仮定した。

以上より磁力線に沿ったプラズマの密度分布 $n(R, \varphi) = n_t(R, \varphi) + n_p(R, \varphi) + n_y(R, \varphi)$ が計算できる。磁力線に沿った静電ポテンシャル分布はイオンと電子の電荷中性条件 $n_i(R, \varphi) = n_e(R, \varphi)$ を数値的に解くことにより $\varphi = \varphi(R)$ として求めることができる。

次に一例として GAMMA 10⁵⁾ のサーマルバリア一部における高周波による高温電子形成及びサーマルバリアポテンシャル形成のシミュレーション結果を示す¹²⁾。高周波加熱の効果は(1)式において

$$D_h f_t = \frac{1}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} \left(v_{\perp} D \frac{\partial f_t}{\partial v_{\perp}} \right) \quad (21)$$

$$D = \pi \left(\frac{e}{2 m_e \omega} \right)^2 \sum_l l^2 \omega_{ce}^2 |E^+|^2 \delta(\omega - l \omega_{ce} / \gamma) J_{l-1}^2 \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{ce}} \right),$$

$$E^+ = E_x + i E_y,$$

のように準線型な加熱項として取り入れている。ただし $v_{\parallel} = v \cos \theta$, $v_{\perp} = v \sin \theta$, E^+ , ω , $k_{\perp}$ はそれぞれ波の電場, 周波数及び磁場に垂直方向の波数, $\gamma = 1 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$, c は光速, ω_{ce} は電子サイクロトロン周波数を表わしている。 J_{l-1} はベッセル関数である。(21)式において $l = 2$ の第2高調波による加熱のみ

図2. 軸方向の磁場強度分布図。

(a) は GAMMA 10 の磁場強度分布であり、
(b) はシミュレーションで使った磁場強度分布である。

図3. 磁気中央面での (a) 静電ポテンシャル ϕ ,
(b) イオン密度 n , (c) 高温電子 ($\geq 2\text{keV}$) n_h ,
(d) 高温電子平均エネルギー T_h の時間発展を示している。

考える。

図2 (a) は GAMMA 10 の軸方向の磁場の強さの分布図であり、特に $z=0$ に対して磁場の強さは対称であるので中央ミラー部の中心を $z=0$ として $z \geq 0$ の領域のみ示している。図2 (b) がシミュレーションで使った磁場の強度分布図である。 $T_e = T_i = 100\text{ eV}$, $n = 10^{12}\text{ 個/cc}$ の H^+ イオン及び電子が中央ミラー部より端のミラー内に流入していると仮定し、 $t=0$ では図2 (b) のミラー内には $T_e = T_i = 100\text{ eV}$, $n = 10^{12}\text{ 個/cc}$ のイオン及び電子があるとした。さらに $|E^+| = 100\text{ V/cm}$, $k_{\perp}c/\omega = 1$ と仮定して $\omega = 2\omega_{ce}/r$ の共鳴点は図2 (b) の磁気中央面にあると仮定した。またミラー端で $\phi = 0$ とした。

図3 は磁気中央面での静電ポテンシャル ϕ , イオン密度 n , 高温電子 ($\geq 2\text{ keV}$) の密度 n_h , 平均エネルギー T_h の時間変化を示している。高温電子の形成に伴って静電ポテンシャルが負になるが、その谷間にイオンが捕捉されることにより静電ポテンシャルが減衰していくのが分かる。

図4 が定常状態になった時の磁力線方向の静電ポテンシャル、イオン及び高温電子の密度分布図である。高温電子は高周波の共鳴領域である磁気中央面 ($z = 0.5$) に多く存在し、その領域で静電ポテンシャルも負になっているのが分かる。イオンは静電ポテンシャルに捕捉されて磁気中央面に比較的多くのイオンが存在している。

図4. 軸方向の磁場強度分布 (a) 及び定常状態における (b) 静電ポテンシャル, (c) イオン密度及び (d) 高温電子密度の軸方向分布を示している。

図5. 定常状態における磁気中央面での電子分布関数。
c は光速である。

図5が定常状態の電子分布関数であり、波による速度空間内の共鳴線 ($v_{\parallel} = 0$) に沿って加熱しているのが分かる。

4-3 モンテカルロコード

モンテカルロシミュレーションは実にさまざまな種類のものがある¹³⁾がそれをすべて記述するのが目的ではないのでタンデムミラーのプラズマの径方向拡散を研究するためのコードについて紹介する。

モンテカルロ法の原理はタンデムミラーの時間的に変化しない磁場・電場の3次元配位をまず与える。次にその電磁場内でテスト粒子の軌道を計算する。そしてそのテスト粒子をある一定の法則で散乱させ、テスト粒子の拡散過程を調べることである。特にモンテカルロ法は粒子の運動を実際に追跡するのであるから現在の計算機の性能を考えに入れて、粒子の位置での外部電磁場の計算及び粒子軌道計算のアルゴリズムには相当な工夫が必要になる。

まず磁場についてはビオ・サバル則を直接使って運動方程式を解くことは、常微分方程式を離散化して解く際に各時間きざみ Δt ごとに磁場を必要とするため莫大な時間を要する。磁場については静的 ($\partial B / \partial t = 0$) であるとする、1回計算するだけですむはずである。そのために空間の点での磁場値

の記憶を必要とするので、空間格子を設定するのが便利である。粒子が格子点の間にきた場合には補間することにする。磁場の変化の大きい場所では格子を細かくする必要があるから3次元格子の場合にはかなりの記憶容量を要する。ここでは磁場については近軸展開の式を使うことにする。すなわち中央面において円形である磁束面が磁気軸上の場所に依存する楕円率をもった楕円形を維持するものとする。この近似は真空磁場においては通常のプラズマ半径程度まででは実際にビ・サバール則から計算したものと比較すると十分な近似である。このような仮定のもとでは磁気軸上の磁場と楕円の磁気軸方向の変化を実際の磁場を使うことによって求めると、タンデムミラー磁場をきわめて効率よく計算に取り込むことができる。

粒子の運動は案内中心の近似が成り立つと仮定し案内中心の運動方程式を解く。荷電粒子の速度を $\mathbf{V} = \mathbf{V}_\perp + \mathbf{V}_\parallel$ として、 $\mathbf{V}_\parallel$ についてはエネルギー保存式を基礎にする。粒子の全エネルギーを ϵ とすると

$$(1/2) m \mathbf{V}_\parallel^2 = \epsilon - e \phi - \mu B \quad (22)$$

と静電ポテンシャル ϕ と磁気モーメント μ で表現できる。ここで上式の微分をとると、

$$\begin{aligned} m v_\parallel d v_\parallel / d t &= -e d \phi / d t - \mu d B / d t \\ &= -e \left[\partial \phi / \partial t + (d \mathbf{r} / d t) \cdot \nabla \phi \right] \\ &\quad - \mu \left[\partial B / \partial t + (d \mathbf{r} / d t) \cdot \nabla B \right] \end{aligned} \quad (23)$$

となるが、微分記号の相違に注意する。 $\mathbf{r}$ は案内中心の座標を示す。

ここでは $\partial \phi / \partial t = 0$, $\partial B / \partial t = 0$ であると仮定するから、電場 $\mathbf{E} = -\nabla \phi$ を使って次の式を得る。

$$m v_\parallel d v_\parallel / d t = e (d \mathbf{r} / d t) \cdot \mathbf{E} - \mu (d \mathbf{r} / d t) \cdot \nabla B \quad (24)$$

$\nabla \times \mathbf{B} = 0$ の磁場であるとする、

$$d \mathbf{r} / d t = (v_\parallel / B) \mathbf{B} + (c / B^2) \mathbf{E} \times \mathbf{B} + (m c (2 v_\parallel^2 + v_\perp^2) / 2 e B^3) \mathbf{B} \times \nabla B \quad (25)$$

となるが、これを(24)式に代入すると

$$m d v_\parallel / d t = (e \mathbf{E} - \mu \nabla B) \cdot \mathbf{B} / B + (m c v_\parallel / B^3) \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \times \nabla B \quad (26)$$

という運動方程式を得る。右辺第2項の存在に注意する。適当な初期条件のもとで(25)式から粒子の位置が決まり、(26)式から $v_\parallel$ が決まる。磁気モーメント μ の保存を仮定しているから $\mathbf{V}_\perp$ については場所が決まると $\mathbf{V}_\perp^2 = (2/m) \mu B(\mathbf{r})$ から決定する。(26)式から必要な場の量としては、 $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ と ∇B である。簡単のため $x-y-z$ 系を採用し磁気軸を z 軸にとり $z=0$ を中央面とする。近軸展開の式を使うと磁場については x, y の2次までで次のように表現することができる。

$$\begin{aligned} B_x &= -(x/2) [f'(z) - g(z)] \\ B_y &= -(y/2) [f'(z) + g(z)] \end{aligned} \quad (' \equiv d / d z)$$

$$\begin{aligned}
B_z &= f(z) - (x^2/4)(f''(z) - g'(z)) - (y^2/4)(f''(z) + g'(z)) \\
B^2 &= B_x^2 + B_y^2 + B_z^2 \\
\partial B / \partial x &= (x/4f) \{ [f'(z) - g(z)]^2 - 2f(z)[f''(z) - g'(z)] \} \\
\partial B / \partial y &= (y/4f) \{ [f'(z) + g(z)]^2 - 2f(z)[f''(z) + g'(z)] \} \\
\partial B / \partial z &= f'(z) + (x^2/4)[(f' - g)(f'' - g') / f - f'(f' - g)^2 / (2f^2) - (f''' - g'')] \\
&\quad (y^2/4)[(f' + g)(f'' + g') / f - f'(f' + g)^2 / (2f^2) - (f''' + g'')] \\
g(z) &= 2x_*'(z)f(z)/x_*(z) + f'(z) \\
g'(z) &= f''(z) + 2 \{ -[x_*'(z)]^2 f(z) + x_*(z)x_*''(z)f(z) \\
&\quad + x_*(z)x_*'(z)f'(z) \} / (x_*(z))^2
\end{aligned} \tag{27}$$

ここで $f(z)$ は、磁束密度の大きさ B の磁気軸上の分布を表わす。

また $(x_\theta, 0, 0)$ から出発した磁力線の座標 x の変化を z の正方向に追跡するときの x 座標を x_θ で規格化したものを $x_*(z)$ で表わした。 x_θ は考えているプラズマ半径の半分程度の大きさにとると良い。 $x_*(z)$ は楕円率の変化の情報を持っており、このことは四重極磁場成分の大きさの目安になっている。実際のコイル配置において、磁場をビオ・サバル則から B の分布を磁気軸の正方向に沿って計算して1次元配列に貯える。 $x_*(z)$ についても同様である。また z の負方向については対称性を利用して求めることができるので都合が良い。このようにしても実際タンデムミラー GAMMA 10 の磁場の場合、 $+z$ 方向に2000分割した配列に上記の物理量を貯えるのに FACOM M-200 で2時間程度の計算時間を必要とした。だが1回だけの計算なので重要な問題ではない。GAMMA 10 の場合の f, g の例を図6に示す。次に電

図6. GAMMA 10 磁場配位の計算に必要な基本量を示す。図6 (a) は磁気軸上の磁束密度分布、(b) は四重極磁場成分に対応した量で片側だけ示した。(c) は磁力線を示し、実線は $(x_\theta, 0, 0)$ から両 z 方向に追跡したものである。破線は $(0, y_\theta, 0)$ から同様に追跡したものである。 x_θ, y_θ は1 cm のときと4 cm のときが描かれている。

場について考える。静電ポテンシャル ϕ は例として次のように与える。

$$\phi(x, y, z) = \phi_\theta(z) \Phi(\Psi/\Psi_\theta) \quad (28)$$

$$\Phi(\Psi/\Psi_\theta) = 1 - (\Psi/\Psi_\theta)^2$$

$$\Psi(x, y, z) = (f(z)/2) [(x^2/a_*^2) + (y^2/b_*^2)]$$

$$\Psi_\theta = (f_\theta/2) [(x^2/y_\theta^2)]$$

$$a_*^2 = (x_*(z))^2 f(z)/f_\theta$$

$$b_*^2 = (x_*(z))^{-2} f_\theta/f(z)$$

$$f_\theta = f(z=0)$$

このとき B と E は, $\partial\phi_\theta/\partial z=0$ ならば直交し, E と $\nabla\Psi$ は, $\partial\phi_\theta/\partial Z=0$ なら平行である。 B と $\nabla\Psi$ は常に直交していることになる。

$\phi_\theta(z)$ —一定にすれば磁力線に沿って静電ポテンシャルは一定になる。このように磁力線に沿ってポテンシャルの情報を与えることが, 簡単に精度良くできるのがこの方法の利点である。電場は荷電粒子に大きな効果を与えるので注意する必要がある。

また四重極磁場コイルとソレノイドコイル系からなるタンデムミラー系などのようなコイルの組み合わせ配位であっても $f(z)$ と $x_*(z)$ を知るだけで良い。これらの場のもとで運動方程式(26)を, 丸め誤差の集積を考慮した4次のRunge-Kutta-Gill法で解く。格子点間に粒子がいる場合は1次補間をするのが簡単である。TMXタイプの磁場と上記電場中でのドリフト面の例を図7に示す¹⁴⁾。連立常微分方程式の解法にはその他, Adams 法などを使うこともできるであろう¹⁵⁾。

またGAMMA10磁場中でのドリフト面については文献(5)を参照されたい。

次にモンテカルロ法について述べる。すなわち与えられた電場, 磁場の中をテスト粒子が背景となるイオンや電子との衝突により速度の乱雑な散乱を受けつつ進むモデルを考える。テスト粒子どうしの相互作用は考えないので集団現象などは扱うことはできない。

図7. TMX タイプのタンデムミラー磁場配位でのイオンのドリフト面を中央ミラー部における磁気中央面との交点の軌跡としてみたもの。(+Z 方向に通過した粒子のみ描いた。)

粒子に付随した局所座標をとり衝突前の速度ベクトルの方向を z 方向にとるのが便利である。

b 種の背景のもとでの a 種の粒子の散乱の様子は次のモーメントの変化率によって与えられる¹⁶⁾。

$$\begin{aligned} d/dt \langle \Delta V_i \rangle &= [\Delta V_i]^{ab} \\ &= -(1+m_a/m_b) L_{ab} \partial \phi_b / \partial V_i \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} d/dt \langle \Delta V_i \Delta V_j \rangle &= [\Delta V_i \Delta V_j]^{ab} \\ &= -2 L_{ab} \partial^2 \phi_b / \partial V_i \partial V_j \end{aligned} \quad (30)$$

$$L_{ab} = (4\pi e_a e_b / m_a)^2 l n \Lambda$$

$$\phi_b = -(1/4\pi) \int dV' f_b(V') / |\mathbf{V} - \mathbf{V}'|$$

$$\psi_b = -(1/8\pi) \int dV' f_b(V') \cdot |\mathbf{V} - \mathbf{V}'|$$

$$i, j = x, y, z$$

で与えられる。 $f_b(\mathbf{V})$ をMaxwell分布にとると良く知られた次の式を得る。

$$\begin{aligned} [\Delta V_L]^{ab} &= [\Delta V_z]^{ab} \\ &= -2(1+m_a/m_b) G(X_b) V_{tb} / \tau_D^{ab} \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} [(\Delta V_L)^2]^{ab} &= [(\Delta V_z)^2]^{ab} \\ &= 2G(X_b) \cdot V_{tb}^2 / \tau_D^{ab} X_b \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} [(\Delta V_L^2)^{ab} &= 2[(\Delta V_x)^2]^{ab} = 2[(\Delta V_y)^2]^{ab} \\ &= 2\{\phi(X_b) - G(X_b)\} \cdot V_{tb}^2 / \tau_D^{ab} X_b \end{aligned} \quad (33)$$

$$\tau_D^{ab} \equiv m_a^2 T_b^{3/2} / 2^{1/2} \pi e_b^2 e_a^2 m_b^{3/2} n_b l n \Lambda$$

$$G(x) \equiv (\phi(x) - x \phi'(x)) / 2x^2, \quad \phi(x) \equiv 2\pi^{-1/2} \int_0^x \theta^x dy \exp(-y^2)$$

$$V_{tb} \equiv (2T_b / m_b)^{1/2}, \quad X_b \equiv V_a / V_{tb}$$

ここで τ_D^{ab} は偏向時間(deflection time)である。添字 L, T は速度ベクトルに対して平行、垂直成分を示す。背景は1価イオンと電子からなるとしそれぞれ平均密度 $n_i = n_e$ を持つとしよう。そのため(31)~(33)式においては b については i と e (イオンと電子)の和をとることになる。テスト粒子 a の

$(\Delta V_L)^2$ の単位時間あたりの増加割合は $[(\Delta V_L)^2]^{ai} + [(\Delta V_L)^2]^{ae}$ で与えられる。すなわち分散がこの割合に等しいような確率過程となる。他も同様である。これからテスト粒子の微小時間 δt 後の速度変化は(31)~(33)式を使うと、平均0、分散1である正規乱数 ξ_1, ξ_2 を利用すれば次のようになる。

$$\begin{aligned} \Delta V_L &= ([(\Delta V_L)]^{ai} + [(\Delta V_L)]^{ae}) \delta t + \\ &\quad \{[(\Delta V_L)^2]^{ai} + [(\Delta V_L)^2]^{ae}\} \delta t\}^{1/2} \cdot \xi_1 \end{aligned} \quad (34)$$

$$\Delta V_T = \left\{ [(\Delta V_T)^2]^{ai} + [(\Delta V_T)^2]^{ae} \delta t \right\}^{1/2} \cdot \xi_2 \quad (35)$$

微小角散乱であるためには $\delta t \ll \tau \theta^{ai}$ としなければならないし、運動方程式の積分のための時間のきざみ Δt は δ より十分小さくする必要がある。これらの計算に際しては速度に対応したテーブルを作製しておく
と便利である。

衝突前後の速度を V, V' で表わすと図8を参考にして

図8. モンテカルロ法における粒子の速度ベクトルの散乱方法。

$$\begin{aligned} V'^2 &= (V + \Delta V_L)^2 + \Delta V_T^2 \\ V'_\parallel &= V_\parallel + (V_\parallel / V) \Delta V_L - (V_\perp / V) \Delta V_T \cdot \sin \Omega \\ V_\perp'^2 &= V'^2 - V_\parallel'^2 \end{aligned} \quad (36)$$

のようにして衝突後の速度がわかることになる。ここで Ω は $[0, 2\pi]$ での一様乱数である。このような方法をつかってテスト粒子についての統計操作によって開放端系の閉じ込め時間や拡散係数が求められている。^{17, 18, 19)}

4-4 おわりに

紙面の都合でフォッカープランクコードとモンテカルロコードの2つしか紹介できなかった。しかしフォッカープランクコードにしても第2節で述べたコード⁷⁾がすべてではなく、たとえば図1(b)のユシマノフ領域の分布関数の衝突によるマクスウェル分布からのずれを追跡することのできるコード²⁰⁾もできている。しかしそのコードは静電ポテンシャルの時間発展を追うことができない点で第2節のコードに比べてタンデ

ムミラーへの応用範囲は限られる。理想的には静電ポテンシャル、ユシマノフ捕捉粒子、各ミラーセル間の粒子の相互作用を自己無撞着に計算できるコードが完成すれば最も良くて、現在はそれに向けて研究開発が進んでいる。

径方向輸送もフォッカープランク方程式を数值的に解いて、軸方向輸送も含めた空間3次元速度空間2次元($x, y, z, v_{\parallel}, v_{\perp}$)または空間2次元速度空間2次元($r, z, v_{\parallel}, v_{\perp}$)のフォッカープランクコードを作成しようとする動きが外国である。しかしそれは10年の時間スケールの開発計画であって当面は別のもっと単純化した方法に頼らざるを得ない。第3節で述べたモンテカルロ法は径方向輸送を研究する上で現在最も基本的な方法になっている。また粒子のバウンス周波数近傍の波をプラズマ中に入射してプラズマ加熱をしようとする場合、モンテカルロコードが強力な武器になる²¹⁾。しかしモンテカルロ法ではたとえば径方向のプラズマの密度・温度・静電ポテンシャル分布を自己無撞着に求めることは現在のところできていない。従って実際の実験データと比較できる径方向輸送コードが必要になる。

径方向輸送コードというとタンデムミラーの場合には径方向はプラズマに対する拡散方程式を解いて、軸方向は各ミラーセルを点モデルで近似した輸送方程式を解く。特に径方向の共鳴拡散係数はそれぞれの実験装置の磁場電場配位での粒子軌道を解くことによって数值的に求めることができる²²⁾。径方向の静電ポテンシャル分布は径方向の電子とイオンの流速が等しい条件から求めることができる。このタイプの輸送コードの数值的アルゴリズム及び問題点は文献(23)に詳しい記述があるので参考になると思う。

参 考 文 献

- 1) G. I. Dimov, *et al.*: Sov. J. Phys. 2 (1976) 326.
- 2) T. K. Fowler and B. G. Logan: Comments on Plasma Physics & Controlled Fusion 2 (1977) 167.
- 3) D. E. Baldwin and B. G. Logan: Phys. Rev. Lett. 43 (1979) 1318.
- 4) J. H. Foote, *et al.*: J. Fus. Energy, 2 (1981) 383.
- 5) M. Inutake, K. Ishii, A. Itakura, I. Katanuma, T. Kawabe, Y. Kiwamoto, A. Mase, S. Miyoshi, T. Saito, K. Sawada, D. Tsubouchi, K. Yatsu, M. Aizawa, T. Kamimura, R. Itatani and Y. Yasaka: Nucl. Fusion Suppl. 1 (1983) 545.
- 6) J. Killeen and K. D. Marx: *Methods in Computational Physics*, vol. 9 (1970) p. 421. (edited by E. Alder, Academic Press, New York).
- 7) 片沼伊佐夫: 2次元 Bounce Averaged Fokker-Planck code, KAKEN-84-002 筑波大学プラズマ研究センター.

- 8) K. D. Marx : *Solution of a spatially dependent Fokker-Planck equation for mirror confined plasma*, Ph. D Thesis, Univ. California, Davis, California, (1968).
- 9) D. J. BenDaniel and W. P. Allis : *Plasma Phys. Nucl. Energy, C* **4** (1962) 31.
- 10) M. N. Rosenbluth, W. M. MacDonald and D. L. Judd : *Phys. Rev.* **107** (1957) 1.
- 11) R. D. Richtmyer and K. W. Morton : *Diferrence Methods for Initial-value Problem*, second edition, (edited by L. Bers, R. Courant, and J. J. Stoker, a Division of John Wiley & Sons, New York, 1967).
- 12) I. Katanuma, Y. Kiwamoto, K. Sawada and S. Miyoshi : *Institute of Plasma Physics Nagoya Report, IPPJ-726*, (1984).
- 13) 津田孝夫 : 「モンテカルロ法とシミュレーション」培風館 (1974).
- 14) M. Aizawa, Y. Ohsawa, and T. Kamimura : *Annual Rewiew of IPPJ*, p. 156, (1981).
- 15) L. F. Shamping and L. K. Gordon : *Computer Solution of Ordinary Differential Equations, the Initial Value Problem*, (W. H. Freeman Co., 1957).
- 16) B. A. Trubnikov : *Review of Plasma Physics Vol. 1*, (Consultants Bureau, New York, 1965).
- 17) Y. Ohsawa and T. Kamimura : *J. Phys. Soc. Japan*, **343** (1981).
- 18) M. Aizawa, Y. Osawa and T. Kamimura : *Annual Rewiew of IPPJ*, **157** (1981).
- 19) P. B. Lysyanskii, M. A. Tiunov and B. M. Fomel : *Sov. J. Plasma Phys.*, (1982) 376.
- 20) Y. Matsuda and J. J. Stewart, Jr. : *Lowrence Livermore National Laboratory Report, UCRL-92313*, (1985).
- 21) T. D. Rognlien : *Nucl. Fusion*, **23**, (1983) 163.
- 22) R. H. Cohen : *Nucl. Fusion*, **19**, (1979) 1579.
- 23) A. A. Mirin, S. P. Auerbach, R. H. Cohen, J. M. Gilmore, L. D. Pearlstein and M. E. Rensink : *Nucl. Fusion*, **23** (1983) 703.