3. プラズマの分光測定入門 (Ⅲ)*

大 塚 正 元

(名古屋大学プラズマ研究所)

(1985年9月7日受理)

Introduction to the Spectroscopic Measurement of Plasma (Ⅲ)

Masamoto Otsuka

(Received September 7, 1985)

§ 5. 点光源による放射照度

5.5 鏡による反射

5.5.2 球面鏡(つづき)

照度分布を与える式(32), (34), (36)は $X=Y=0$ で無限大になるのでいわゆる半値幅というものは定義できない。反射光の届く範囲が点光源の像となるから、像の形は鏡の形と大きさによってきまる。x, y方向の幅が $2x_0$, $2y_0$ の矩形の小さい鏡をその中心を原点に一致させておいた場合の像のひろがり、式(32)に対しては、

$$\left. \begin{aligned} a &\equiv \frac{3(R \cos \theta - \rho_q) \sin \theta}{R(2\rho_q - R \cos \theta)}, \\ b &\equiv \frac{\sin \theta}{2\rho_q - R \cos \theta} \left(\cos \theta - \frac{\rho_q}{R} \cos 2\theta \right), \\ c &\equiv \frac{2\rho_q \sin^2 \theta}{2\rho_q - R \cos \theta} \end{aligned} \right\} \quad (5-37)$$

* 脚注 この論文は、本誌第52巻1号～53巻6号に連載された講座「プラズマ診断」プラズマ分光測定入門Ⅰ・Ⅱ(第52巻3号・第53巻4号)のつづきである。

としたとき、二つの放物線

$$X = \frac{b}{c} Y^2 \quad \text{と} \quad X = a x_0^2 + \frac{b}{c} Y^2$$

と二つの直線

$$Y = c y_0 \quad \text{と} \quad Y = -c y_0$$

(5-38)

とで囲まれた領域であり、式(34)に対しては

$$a' = \frac{\sin^2 \theta}{R^2 \cos \theta}, \quad b' = \frac{1}{2R \sin \theta}, \quad c' = \frac{2 - \cos 2\theta}{2R^2 \sin \theta \sin 2\theta} \quad (5-39)$$

として

$$X = -a' x_0^3 + (b' - c' x_0) Y^2,$$

$$X = a' x_0^3 + (b' + c' x_0) Y^2,$$

$$Y = -2 y_0 \sin^2 \theta,$$

$$Y = 2 y_0 \sin^2 \theta$$

(5-40)

で囲まれた領域である。式(36)に対しては半径 r_0 の鏡の場合、像の半径 r_A は

$$r_A = \frac{(\rho_Q - R)^2}{\rho_Q R^2 (2\rho_Q - R)} \cdot r_0^3 \quad (5-41)$$

で与えられる。

5.5.3 円柱面鏡

曲率半径 R の円柱面の母線を y 軸にとると、 $R_x = R$, $1/R_y = 0$ であり、簡単のため、入射面を $x-z$ 面とした場合、式(24)から

$$\frac{1}{\rho_{\parallel}} + \frac{1}{\rho_Q} = \frac{2}{R \cos \theta} \quad (5-42)$$

$$\frac{1}{\rho_{\perp}} + \frac{1}{\rho_Q} = 0 \quad (5-43)$$

を得る。 θ は入射角である、球面鏡の場合と同様に ρ_+ , ρ_- を $\rho_{\parallel}$, $\rho_{\perp}$ と書いた。式(42)は式(29)と同形であり、式(43)は $K_{\perp}$ が虚の焦点であることを示す。 $K_{\parallel}$ における非点収差 ΔY_{As} は

$$\Delta Y_{As} = \frac{|\rho_{\perp}| + \rho_{\parallel}}{|\rho_{\perp}|} \Delta y = \frac{2\rho_Q}{2\rho_Q - R \cos \theta} \Delta y \quad (5-44)$$

である。

A が $K_{\parallel}$ にあり、 $\theta_A = 0$ の時には $K_{\parallel}$ の近傍での放射照度 $E_{K_{\parallel}}(X, Y)$ は、球面鏡の場合にならって座標軸 X, Y をとると、次のようになる：

(i) $\rho_Q \neq R \cos \theta$ の時

$$E_{K\parallel}(X, Y) = R_f J \frac{\cos \theta |2\rho_Q - R \cos \theta|^{3/2}}{2\sqrt{3} \rho_Q^3 (\sin \theta)^{1/2} |\rho_Q - R \cos \theta|^{1/2}} \left(\pm \frac{R}{X} \right)^{1/2}, \quad (5-45)$$

こゝで複号は $R \cos \theta \geq \rho_Q$ に応じて±ととる。従って像は非対称である。

(ii) $\rho_Q = R \cos \theta$ の時には $\rho_{\parallel} = R \cos \theta$ であり, $Q, K_{\parallel}$ 共にローランド円上にある。

$$E_{K\parallel}(X, Y) = R_f J \frac{1}{6 (\sin \theta \cos \theta)^{2/3} R^{4/3} X^{2/3}}, \quad (5-46)$$

像はY軸に関して対称である。

(iii) Q がZ軸上にある時

$$E_{K\parallel} = R_f J \frac{R^{2/3} (2\rho_Q - R)^{4/3}}{6 \rho_Q^{8/3} (\rho_Q - R)^{2/3} X^{2/3}} \quad (5-47)$$

像の大きさは, $2x_0 \times 2y_0$ の鏡の場合には(i)では

$$\left. \begin{aligned} X=0, \quad X &= \frac{3(R \cos \theta - \rho_Q) \sin \theta}{R(2\rho_Q - R \cos \theta)} x_0^2 \\ Y &= \pm \frac{2\rho_Q}{2\rho_Q - R \cos \theta} \end{aligned} \right\} \quad (5-48)$$

の四直線で囲まれた領域, (ii)では

$$\left. \begin{aligned} X &= \pm \frac{\sin^2 \theta}{R^2 \cos \theta} x_0^3, \\ Y &= \pm 2y_0 \end{aligned} \right\} \quad (5-49)$$

で囲まれた領域, (iii)では

$$\left. \begin{aligned} X &= \pm \frac{(\rho_Q - R)^2}{R^2 \rho_Q (2\rho_Q - R)} x_0^3, \\ Y &= \pm \frac{2\rho_Q}{2\rho_Q - R} y_0 \end{aligned} \right\} \quad (5-50)$$

で囲まれた領域にわたる。

5.5.4 円環面鏡 (toroidal mirror)

小半径 r , 大半径 $R - r$ ($R > r$) の円環体を, その回軸対称軸が z 軸上の点 $(0, 0, R)$ を通り y 軸に平行になるようにおかれた時の原点近傍での円環面による反射を考える。この場合 $R_x = R, R_y = r$ である。

入射面を $x-z$ 面にとると, 式(24)から

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho_+} + \frac{1}{\rho_Q} &= \frac{2}{R \cos \theta} \\ \frac{1}{\rho_-} + \frac{1}{\rho_Q} &= \frac{2 \cos \theta}{r} \end{aligned} \right\} \quad (5-51)$$

が得られるが,

$$\cos \theta = \left(\frac{r}{R} \right)^{1/2}$$

の方向に対しては両火点は一致する. この位置をKとし $\rho_{\pm}$ を ρ_K と書くと

$$\frac{1}{\rho_K} + \frac{1}{\rho_Q} = \frac{2}{(rR)^{1/2}} \quad (5-52)$$

である, Kを通りOKに垂直な面上, Kの近傍での放射照度 $E_K(X, Y)$ は前と同様の座標系に関して次のようになる.

(i) $\rho_Q \neq (Rr)^{1/2}$ の時

$$E_K(X, Y) = \alpha R_f J \frac{r}{\rho_Q^2} \left(\frac{R}{R-r} \right)^{1/2} \frac{[2\rho_Q - (Rr)^{1/2}]}{|\rho_Q - (Rr)^{1/2}| (X^2 - 3Y^2)^{1/2}} \quad (5-53)$$

照度は $X^2 - 3Y^2 \geq 0$ の領域以外では0であり, いわゆるコマ(coma)収差を呈する, $\rho_Q \leq (Rr)^{1/2}$ に応じて $X \geq 0$ の領域にだけ光が集まる. $2x_0 \times 2y_0$ の矩形の鏡の場合, α は下記の領域Iでは1, IIでは1/2である.

$$C \equiv \frac{R^{3/2} [2\rho_Q - (Rr)^{1/2}]}{3x_0^2 (R-r)^{1/2} |\rho_Q - (Rr)^{1/2}|}, \quad \beta \equiv \left(\frac{R}{3r} \right)^{1/2} \frac{y_0}{x_0} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ X' \equiv CX, \quad Y' \equiv CY \end{array} \right\} \quad (5-54)$$

とおけば, $\rho_Q < (Rr)^{1/2}$ の時には

$$X' = \sqrt{3} Y' \quad (a), \quad X' = 1 + \frac{3}{4} Y'^2 \quad (b), \quad X' = \beta^2 + \frac{3}{4\beta^2} Y'^2 \quad (c) \quad (5-55)$$

を境界線として, 次のような座標点を通る領域と X' 軸に関するその鏡像とを合せたものが該当する領域を与える. $\beta \leq 1$ の時

$$\text{領域 I : } (0, 0) \xrightarrow{(a)} \left(2\beta^2, \frac{2}{\sqrt{3}}\beta^2 \right) \xrightarrow{(c)} (\beta^2, 0) \xrightarrow{X' \text{ 軸}} (0, 0).$$

$$\text{II : } (\beta^2, 0) \xrightarrow{(c)} \left(2\beta^2, \frac{2}{\sqrt{3}}\beta^2 \right) \xrightarrow{(c)} \left(1+\beta^2, \frac{2}{\sqrt{3}}\beta \right) \xrightarrow{(b)} (1, 0) \xrightarrow{X' \text{ 軸}} (\beta^2, 0).$$

$\beta \geq 1$ の時

$$\text{領域 I : } (0, 0) \xrightarrow{(a)} \left(2, \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \xrightarrow{(b)} (1, 0) \xrightarrow{X' \text{ 軸}} (0, 0).$$

$$\text{II : } (1, 0) \xrightarrow{(b)} \left(2, \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \xrightarrow{(b)} \left(1+\beta^2, \frac{2}{\sqrt{3}}\beta \right) \xrightarrow{(c)} (\beta^2, 0) \xrightarrow{X' \text{ 軸}} (1, 0).$$

$\rho_Q > (Rr)^{1/2}$ の時は上記図形の Y 軸に関する鏡像が該当する領域となる.

(ii) $\rho_Q = (Rr)^{1/2}$ の時

$\rho_K = \rho_Q$ となり, 照度分布は X, Y 両軸に関して対称で

$$E_K(X, Y) = R_f J \frac{(2r)^{1/3}}{3R^{1/3}(R-r)^{2/3}(X^2-4Y^2)^{1/2}} \times \left[\frac{1}{\{|X| + (X^2-4Y^2)^{1/2}\}^{1/3}} + \frac{1}{\{|X| - (X^2-4Y^2)^{1/2}\}^{1/3}} \right] \quad (5-56)$$

で与えられる。角括弧内の第1項は下記の領域Ⅰ'に、第2項はⅡ'に対応し、両領域の重っている部分に対しては両項の和となる。

$$\left. \begin{aligned} D &= \frac{R^{5/2} r^{1/2}}{(R-r)x_0^3}, \quad r = \left(\frac{R}{r}\right)^{1/2} \frac{y_0}{x_0} \\ X' &= DX, \quad Y' = DY \end{aligned} \right\} \quad (5-57)$$

とおくと、

$$X' = 2Y' \quad (a'), \quad X' = 1 + Y'^2 \quad (b'), \quad X' = r^{3/2} Y'^{1/2} + r^{-3/2} Y'^{3/2} \quad (c') \quad (5-58)$$

を境界線とした下記の領域をX, Y軸に対称に拡張した全領域が該当する領域である。

$r \leq 1$ の時

$$\begin{aligned} \text{領域Ⅰ'} : (0, 0) &\xrightarrow{(a')} (2r^3, r^3) \xrightarrow{(c')} (1+r^2, r) \xrightarrow{(b')} (1, 0) \xrightarrow{X' \text{軸}} (0, 0). \\ \text{Ⅱ'} : (0, 0) &\xrightarrow{(a')} (2r^3, r^3) \xrightarrow{(c')} (0, 0). \end{aligned}$$

(Ⅱ'はⅠ'に全く含まれる)。

$r \geq 1$ の時

$$\begin{aligned} \text{領域Ⅰ'} : (0, 0) &\xrightarrow{(a')} (2, 1) \xrightarrow{(b')} (1, 0) \xrightarrow{X' \text{軸}} (0, 0). \\ \text{Ⅱ'} : (0, 0) &\xrightarrow{(a')} (2, 1) \xrightarrow{(b')} (1+r^2, r) \xrightarrow{(c')} (0, 0). \end{aligned}$$

領域Ⅱ'は原点以外ではX'軸を含まないから、式(56)の角括弧内の第2項が、x軸上で ∞ を与えることはあり得ない。

§5で述べたことは、幾何光学的な計算の例を示したもので、特に結像点の周辺の照度分布についての正しい記述は波動光学によらねばならないことはいうまでもない。

§6. スリット関数

分光器で光のスペクトルを観測すると、入射光がたとえ単色光であっても、そのスペクトル線はある程度の波長幅をもっているかのように見える。スリット幅が大きい時にはこれは主としてスリット幅に起因する。モノクロメーターの場合にはこのひろがりやスリット関数という量によって表される。ここでは二種類のモノクロメーターについて述べる。

6.1 シングルモノクロメーター

代表的にツェルニー・ターナー型(Czerny-Turner)のものを模式的に図23に示した。入口スリット S_1 を通った光は凹面鏡 M_1 で平行光線となり、回折格子 G で回折され凹面鏡 M_2 で集束されるが、回折格子の向きに応じた特定の波長の光だけが出口スリット S_2 に集束されてここを通過する。回折格子に対する入射角 α 及び回折角 β を図のようにとり、回折格子の線間隔を d 、回折の次数を N とすると、回折格子の一般的な関係式

$$d(\sin \alpha + \sin \beta) = N\lambda \quad (6-1)$$

が成立つが、モノクロメーターの構造上、両スリットの中心を通過する光については

$$\alpha - \beta = \text{const.} \quad (6-2)$$

の関係がある。入口、出口両スリットの中心を原点とし幅方向にそれぞれ x 軸、 ξ 軸、長さ方向に y 軸、 η 軸をとる。モノクロメーターの設定波長を λ_0 とした時には $x=0$ を通る波長 λ_0 の光は $\xi=0$ を通る。この時の入射角及び回折角を α_0 、 β_0 とする。 λ_0 と少し異なる波長 λ の光が、入口スリットの点 x を通り角 $\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$ 、 $\beta = \beta_0 + \Delta\beta$ を経て出口スリットの点 ξ を通るとすると、式(1)を展開した式と、 M_1 、 M_2 の焦点距離を f とした時の関係式

$$x = -f \Delta\alpha, \quad \xi = f \Delta\beta \quad (6-3)$$

とを用いて

$$\xi = Mx + D\sigma \quad (6-4)$$

を得る*。こゝで

$$\sigma = \lambda - \lambda_0 \quad (6-5)$$

$$M = \frac{\cos \alpha_0}{\cos \beta_0} \quad (6-6)$$

$$D = \frac{f N}{d \cos \beta_0} \quad (6-7)$$

である。 M は分散方向の像の倍率、 D は波長に対する線分散を表す。 α_0 、 β_0 は λ_0 と共に式(1)、(2)を満たすので λ_0 の関数であり、従って M 、 D も λ_0 の関数である。

図23. シングル・モノクロメーターの模式図。

S_1 : 入口スリット, S_2 : 出口スリット,
 M_1, M_2 : 凹面鏡, G : 回折格子,
 $\vec{n}$: 回折格子面に対する法線, 座標軸 y ,
 η はそれぞれ S_1, S_2 において紙面に垂直である。

* 実際にはスペクトル線は少し彎曲しているので η 軸に完全には平行でないがこゝではこれを無視する。

式(4-1)で与えられる分光器に入った放射束は、分光器内の光学素子を通った後、出口スリットから出るので、出口スリットを通過する放射束を改めて Φ と書くと

$$\Phi = \int T(\lambda) I(\lambda) \cos \theta d\lambda dx dy d\Omega \quad (6-8)$$

で与えられる、ここで $I(\lambda)$ は入口スリットに入る光の分光放射輝度でスリットの開口面内で一様、且つ有効立体角内で等方であるとする。 θ は入射スリット面での入射角、 $T(\lambda)$ は入口スリットから出口スリットまでの透過率であって、光線の経路にはよらないものとする。積分領域は、 x, λ については、入口、出口スリット幅をそれぞれ $\Delta x, \Delta \xi$ として

$$\begin{aligned} -\Delta x/2 \leq x \leq \Delta x/2, \\ -\Delta \xi/2 \leq \xi = Mx + D(\lambda - \lambda_0) \leq \Delta \xi/2, \end{aligned} \quad (6-9)$$

y については、入口スリットの高さを Δy として

$$-\Delta y/2 \leq y \leq \Delta y/2$$

である。出口スリットの長さを $\Delta \eta$ とすると、分光器の非点収差が小さい時には、出口スリットでの放射束の η 方向の長さよりも $\Delta \eta$ を大きく取れば、光路の y 方向の制限はないので、 y についての積分は Δy に等しいが、非点収差が大きい分光器(例えば斜入射の真空分光器)でも、放射束が $\Delta \eta$ からはみ出すことによる損失を $T(\lambda)$ の中に考慮しておけば式の形は変わらない。 Ω については、式(4-1)で述べた有効立体角 Ω_{Lim} が積分領域となるが、近似的に $x=0, y=0$ での Ω_{Lim} の値 $\Omega_{\text{Lim}}(0, 0)$ を用いて、

$$\begin{aligned} \omega &\equiv \int \cos \theta d\Omega \\ \Omega &\leq \Omega_{\text{Lim}}(0, 0) \end{aligned} \quad (6-10)$$

とおく。ここで関数 $U(x, a)$ を

$$U(x, a) \equiv \begin{cases} 1 & |x| \leq |a|/2 \\ 0 & \text{その他の } x \text{ に対し} \end{cases} \quad (6-11)$$

と定義する。 $U(x, a)$ は x 及び a の偶関数であり

$$U(\alpha x + \beta, a) = U\left(x + \frac{\beta}{\alpha}, \frac{a}{\alpha}\right) \quad (6-12)$$

を満す。式(9)の条件に従う式(8)の積分はその被積分関数に $U(x, \Delta x)U(\xi, \Delta \xi)$ をかけることにより、 x, λ の全空間にわたる積分として表される：

$$\Phi = T(\lambda_0) \omega \Delta y \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I(\lambda) U(x, \Delta x) U(\xi, \Delta \xi) dx d\lambda. \quad (6-13)$$

$T(\lambda)$ は λ のゆるやかな関数であり、 λ についての積分領域は後述のように λ_0 の近傍に限られるので、ここでは $T(\lambda)$ を $T(\lambda_0)$ で近似した。式(4)によれば ξ は σ の関数であるから関数 $S(\sigma)$ を

$$S(\sigma) \equiv \frac{1}{\Delta x} \int_{-\infty}^{\infty} U(x, \Delta x) U(\xi, \Delta \xi) dx \quad (6-14)$$

によって定義し、これをスリット関数という。これを用いると式(13)は

$$\Phi = T(\lambda_0) \omega \Delta x \Delta y \int_{-\infty}^{\infty} I(\lambda) S(\lambda - \lambda_0) d\lambda \quad (6-15)$$

となる。\$U(x, a)\$は\$x\$の偶関数であるから

$$S(-\sigma) = S(\sigma) \quad (6-16)$$

となるので、\$\Phi\$はたゞみこみ(convolution)の形で

$$\Phi = T(\lambda_0) \omega \Delta x \Delta y \int_{-\infty}^{\infty} I(\lambda) S(\lambda_0 - \lambda) d\lambda \quad (6-17)$$

とも書ける。\$\xi\$に対応する波長尺度として

$$\mu \equiv \frac{\xi}{D} \quad (6-18)$$

を導入し、式(14)での変数\$x\$を式(4)を通じて\$\mu\$に変え、\$\Delta x, \Delta \xi\$を波長尺度に換算したスリット幅

$$\Delta \sigma_x \equiv M \Delta x / D, \quad \Delta \sigma_\xi \equiv \Delta \xi / D \quad (6-19)$$

で書き換え、式(12)を用いて

$$S(\sigma) = \frac{1}{\Delta \sigma_x} \int_{-\infty}^{\infty} U(\mu - \sigma, \Delta \sigma_x) U(\mu, \Delta \sigma_\xi) d\mu \quad (6-20)$$

を得る。あるいはたゞみこみの形では

$$S(\sigma) = \frac{1}{\Delta \sigma_x} \int_{-\infty}^{\infty} U(\mu - \sigma, \Delta \sigma_x) U(\mu, \Delta \sigma_\xi) d\mu \quad (6-21)$$

である。式(20)の被積分関数は\$\mu - \sigma\$面での二直線

$$\mu - \sigma = \pm \Delta \sigma_x / 2 \quad (6-22)$$

と二直線

$$\mu = \pm \Delta \sigma_\xi / 2 \quad (6-23)$$

とで囲まれた平行四辺形の中でだけ値1をとるから、積分値は直線\$\sigma = \sigma\$がこの平行四辺形で限られる線分の長ささに等しい。\$\Delta \sigma_x\$と\$\Delta \sigma_\xi\$との大小関係に応じて\$S(\sigma)\$は図24に示された形を取るが、一つの式にまとめると次のようになる。

図24. シングル・モノクロメーターのスリット関数\$S(\sigma)\$。

縦軸は\$S(\sigma)\$で、三つの図は上から順に\$\Delta \sigma_\xi : \Delta \sigma_x = 3:2, 2:2, 1:2\$の場合を示す。

$$S(\sigma) = \left\{ \begin{array}{ll} \min\left(1, \frac{\Delta\xi}{M\Delta x}\right) = \min\left(1, \frac{\Delta\sigma_\xi}{\Delta\sigma_x}\right) & |\sigma| \leq \frac{1}{2D} |\Delta\xi - M\Delta x| \quad \text{に対して,} \\ \frac{\Delta\xi + M\Delta x - 2D|\sigma|}{2M\Delta x} = \frac{\Delta\sigma_\xi + \Delta\sigma_x - 2|\sigma|}{2\Delta\sigma_x} & \frac{1}{2D} |\Delta\xi - M\Delta x| \leq |\sigma| \\ & \leq \frac{1}{2D} (\Delta\xi + M\Delta x) \\ 0 & |\sigma| \geq \frac{1}{2D} (\Delta\xi + M\Delta x) \quad \text{に対して,} \end{array} \right. \quad (6-24)$$

こゝで $\min(a, b, \dots)$ は $a, b, \dots$ のうちの最小値を意味する。

$I(\lambda)$ が波長 λ_0 の単色光のスペクトル線の場合にはその放射輝度を I_L とすると

$$I(\lambda) = I_L \delta(\lambda - \lambda_0) \quad (6-25)$$

と表すことができるので設定波長が λ_0 の時には式(15)から

$$\Phi = T(\lambda_0) \omega \Delta x \Delta y I_L S(0) \quad (6-26)$$

となる。式(20)あるいは式(24)から

$$\begin{aligned} S(0) &= \frac{1}{\Delta\sigma_x} \int_{-\infty}^{\infty} U(\mu, \Delta\sigma_x) U(\mu, \Delta\sigma_\xi) d\mu = \frac{1}{\Delta\sigma_x} \min(\Delta\sigma_x, \Delta\sigma_\xi) \\ &= \min\left(1, \frac{\Delta\xi}{M\Delta x}\right) \end{aligned} \quad (6-27)$$

である。有効スリット幅 $(\Delta x)_{\text{EFF}}$ を

$$\Phi = T(\lambda_0) \omega (\Delta x)_{\text{EFF}} \Delta y I_L \quad (6-28)$$

で定義すると

$$(\Delta x)_{\text{EFF}} = \Delta x S(0) = \Delta x \min\left(1, \frac{\Delta\xi}{M\Delta x}\right) = \min\left(\Delta x, \frac{\Delta\xi}{M}\right) \quad (6-29)$$

である。

設定波長を λ_0 の近傍で変化させるとき、その際の設定波長を λ とすると、式(15)の Φ は λ の関数として

$$\Phi(\lambda) = T(\lambda_0) \omega \Delta x \Delta y I_L S(\lambda - \lambda_0) \quad (6-30)$$

となる。これは観測されるスペクトル線が $S(\sigma)$ のスペクトルを持っているかのように見えることを示す。

$$Q \equiv \int_{-\infty}^{\infty} S(\sigma) d\sigma \quad (6-31)$$

とおくと

$$\bar{S}(\sigma) \equiv \frac{1}{Q} S(\sigma) \quad (6-32)$$

は規格化されたスリット関数である。式(21)から

$$Q = \frac{1}{\Delta\sigma_x} \int_{-\infty}^{\infty} U(\mu, \Delta\sigma_x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} U(\sigma - \mu, \Delta\sigma_x) d\sigma \right) d\mu = \frac{1}{\Delta\sigma_x} \Delta\sigma_\xi \cdot \Delta\sigma_x = \frac{\Delta\xi}{D} \quad (6-33)$$

となる。一般に $S(\sigma)$ あるいは $\bar{S}(\sigma)$ の形が式(24)に示されるように台形あるいは三角形の場合には、それらの半値幅は

$$\frac{1}{\bar{S}(0)} = \frac{Q}{S(0)} = \frac{1}{D} \max(\Delta \xi, M \Delta x) \quad (6-34)$$

である。

現実のスペクトル線に対しては、式(25)の代りに、有限のひろがりをもった $P(\sigma)$ を用いて

$$I(\lambda) = I_L P(\lambda - \lambda_0) \quad (6-35)$$

となる。 $P(\sigma)$ はスペクトル線の形を表す関数で

$$\int_{\text{Line}} P(\sigma) d\sigma = 1 \quad (6-36)$$

である。この時には式(15)は

$$\Phi = T(\lambda_0) \omega \Delta x \Delta y I_L \int_{-\infty}^{\infty} P(\sigma) S(\sigma) d\sigma \quad (6-37)$$

となる。 $S(\sigma)$ が台形で、 $P(\sigma)$ のひろがりが $S(\sigma)$ のひろがりに比べて十分小さい時には式(37)は式(26)と同形になる。設定波長を λ_0 の近傍で変化させると、観測されるスペクトルは式(15)、(17)から設定波長 λ に対し

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) &= T(\lambda_0) \omega \Delta x \Delta y I_L \int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda' - \lambda_0) S(\lambda' - \lambda) d\lambda' \\ &= T(\lambda_0) \omega \Delta x \Delta y I_L \int_{-\infty}^{\infty} P(\sigma') S(\sigma' - \sigma) d\sigma' \\ &= T(\lambda_0) \omega \Delta x \Delta y I_L \int_{-\infty}^{\infty} P(\sigma') \bar{S}(\sigma - \sigma') d\sigma' \end{aligned} \quad (6-38)$$

となり、観測されるスペクトル線の形 $P_{OB}(\sigma)$ は

$$P_{OB}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\sigma') \bar{S}(\sigma - \sigma') d\sigma' \quad (6-39)$$

で与えられることがわかる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_{OB}(\sigma) d\sigma = 1 \quad (6-40)$$

であるから、観測されたスペクトル線についての積分値

$$\int_{\text{Line}} \Phi(\lambda) d\lambda = T(\lambda_0) \omega \Delta x \Delta y Q I_L = T(\lambda_0) \omega \Delta x \Delta y \Delta \xi I_L / D \quad (6-41)$$

は Δx と $\Delta \xi$ との大小関係や、 $P(\sigma)$ 及び $S(\sigma)$ の形に直接関係していないので Φ の実測値から I_L を評価するには式(41)に依る方が式(26)に依るよりも誤差は少い。

$I(\lambda)$ が連続スペクトルを呈する時には、式(15)の積分領域で $I(\lambda)$ は一定と考えられるので

$$\Phi = T(\lambda_0) \omega \Delta x \Delta y Q I(\lambda_0) = T(\lambda_0) \omega \Delta x \Delta y \Delta \xi I(\lambda_0) / D \quad (6-42)$$

となる。

標準光源と比べて、スペクトル線の放射輝度を測定する場合のように、同じ光学系を用いて連続スペクトル光と線スペクトル光とについて Φ を比較する際に、式(26)と(42)とを用いると、連続スペクトル光にはC、線スペクトル光にはLを添字として

$$\frac{\Phi_L}{\Phi_C} = \frac{I_L S(0)}{I(\lambda_0) Q} = \frac{D I_L}{I(\lambda_0) \max(\Delta \xi, M \Delta x)} \quad (6-43)$$

であるが、一方式(41)と(42)とを用いると

$$\frac{\int_{\text{Line}} \Phi_L d\lambda}{\Phi_L} = \frac{I_L}{I(\lambda_0)} \quad (6-44)$$

となる。式(44)は分光器としてのパラメータを含んでいない。

6.2 ダブル・モノクロメーター (double monochromator)

この型の一例を図25に示す。これは二つのモノクロメーターを中間スリットを通じて直列に配置したものである。図に示すように、入口、中間、出口スリット面に x, y 軸, u, v 軸, ξ, η 軸を取り、スリット幅を $\Delta x, \Delta u, \Delta \xi$ スリット長を $\Delta y, \Delta v, \Delta \eta$ とする。式(8)の y, Ω についての積分は6.1の場合と同様に取り扱うが、 x, λ についての積分領域は u についての条件が加わるので式(9)の代りに

$$\left. \begin{aligned} -\Delta x/2 \leq x \leq \Delta x/2 \\ -\Delta u/2 \leq u \leq \Delta u/2 \\ -\Delta \xi/2 \leq \xi \leq \Delta \xi/2 \end{aligned} \right\} \quad (6-45)$$

となる。二つのモノクロメーターは同形であるから、式(4)にならい、座標系の向きに注意して、 x, u, ξ 間の関係式

$$\left. \begin{aligned} u &= -Mx + D\sigma \\ \xi &= Mu + D\sigma \end{aligned} \right\} \quad (6-46)$$

を得る。従って

図25. ダブル・モノクロメーターの模式図。

S_1 : 入口スリット, S_2 : 出口スリット,
 S_3 : 中間スリット, M_1, M_2, M_5, M_6 : 凹面鏡
 M_3, M_4 : 平面鏡, G_1, G_2 : 回折格子,
 $\vec{n}$: 回折格子面に対する法線, 座標 y, η, v はそれぞれ S_1, S_2, S_3 において紙面に垂直である。

$$\xi = -M^2 x + D(M+1)\sigma \quad (6-47)$$

となり, $M \approx 1$ であるから分数が一つのモノクロメーターの約2倍になることがわかる. 式(45)に応じ
てスリット関数の式(14)は

$$S(\sigma) = \frac{1}{\Delta x} \int_{-\infty}^{\infty} U(x, \Delta x) U(u, \Delta u) U(\xi, \Delta \xi) dx \quad (6-48)$$

でおきかえられる. 式(19)の代りに

$$\left. \begin{aligned} \Delta \sigma_x &\equiv M^2 \Delta x / D \\ \Delta \sigma_u &\equiv M \Delta x / D \\ \Delta \sigma_\xi &\equiv \Delta \xi / D \quad (\text{式(19)と同様}) \end{aligned} \right\} \quad (6-49)$$

を定義し, 式(46), (18)を用いると

$$S(\sigma) = \frac{1}{\Delta \sigma_x} \int_{-\infty}^{\infty} U(\mu - (M+1)\sigma, \Delta \sigma_x) U(\mu - \sigma, \Delta \sigma_u) U(\mu, \Delta \sigma_\xi) d\mu \quad (6-50)$$

となる. 式(21)の場合の平行四辺形の代りに, 式(50)では3組の平行線

$$\left. \begin{aligned} \mu - (M+1)\sigma &= \pm \Delta \sigma_x / 2 & \text{i)} \\ \mu - \sigma &= \pm \Delta \sigma_u / 2 & \text{ii)} \\ \mu &= \pm \Delta \sigma_\xi / 2 & \text{iii)} \end{aligned} \right\} \quad (6-51)$$

によって囲まれる図形が切取る線分 $\sigma = \sigma$ の長さが積分値を与える. $\Delta x, \Delta u, \Delta \xi$ の大小関係に応じた種
々の場合を $\Delta x / \Delta u$ と $\Delta \xi / \Delta u$ との関係で分類し(図27), 各々の場合の $S(\sigma)$, Q を図26に示す. Q
は, 式(33)とは異って, 一つの式では表されない. $S(0)$ は式(50)から

$$\begin{aligned} S(0) &= \frac{1}{\Delta \sigma_x} \int_{-\infty}^{\infty} U(\mu, \Delta \sigma_x) U(\mu, \Delta \sigma_u) U(\mu, \Delta \sigma_\xi) d\mu \\ &= \frac{1}{\Delta \sigma_x} \min(\Delta \sigma_x, \Delta \sigma_u, \Delta \sigma_\xi) = \min\left(1, \frac{\Delta u}{M \Delta x}, \frac{\Delta \xi}{M^2 \Delta x}\right) \end{aligned} \quad (6-52)$$

となる. 図27で境界線を含めて, 領域1, 2, 3では $S(0)$ は1であり4, 5, 6, 7では $\Delta u / (M \Delta x)$,
8, 9, 10では $\Delta \xi / (M^2 \Delta x)$ である. 6.1における諸関係式で $S(\sigma)$ の陽な形を含まないものはこゝで
も成立する.

特に領域1及び8では $S(\sigma)$ はシングル・モノクロメーターでの D を $D(1+M)$ で, $M \Delta x$ を $M^2 \Delta x$ で
置きかえたものに等しく, Δu に無関係となる. 従って $Q = \Delta \xi / [D(1+M)]$ であり $S(0)$ は領域1で
は1, 領域8では $\Delta \xi / (M^2 \Delta x)$ となってシングル・モノクロメーターの場合の二つの台形の場合に対応する.
このようにするには与えられた $\Delta x, \Delta \xi$ に対して, 図27の式から

$$\Delta u \geq \frac{M \Delta x + \Delta \xi}{1+M} \quad (6-53)$$

図26. ダブル・モノクロメーターのスリット関数 $S(\sigma)$.

各々の図において縦軸は $S(\sigma)$ で1目盛は 0.2, 横軸は σ で1目盛は 0.02 nm である.

入口, 中間, 出口スリットの幅 Δx , Δu , $\Delta \xi$ の大小関係により分類される $\Delta x/\Delta u$,

$\Delta \xi/\Delta u$ の領域 (図27参照) の番号及び, それらの境界線の番号 (例えば 1-2 は 1 と 2 と

の境界を示す) を各図の左上隅に示す. $\Delta u = 0.1$ mm, $D = 1$ mm/nm, $M = 0.8$ とし,

これらの領域中ならびに境界線上での代表点 (◎印) に対する $S(\sigma)$ が図示されている.

Q の値は各図の右上に示してあるが, 領域 2, 5, 6, 9 と境界線 2-5, 5-6, 6-9

に関しては図の枠外の下に示してある.

のように Δu を選べばよいことがわかる。式(53)は、図28に示すように、式(51)の(i)と(iii)とで囲まれる平行四辺形が(ii)と(iii)とで囲まれる平行四辺形の中に含まれることを意味するので式(50)は

$$S(\sigma) = \frac{1}{\Delta \sigma_x} \int_{-\infty}^{\infty} U(\mu - (\mu + 1)\sigma, \Delta \sigma_x) U(\mu, \Delta \sigma_x) d\mu \quad (6-54)$$

と書きかえられ、このことからシングル・モノクロメータと同様の関係になることがわかる。

$$Q^* = \frac{2M(1+M)\Delta x \Delta u + 2(1+M)\Delta u \Delta \xi + 2M\Delta \xi \Delta x - M^2(\Delta x)^2 - (1+M)^2(\Delta u)^2 - (\Delta \xi)^2}{4DM(1+M)\Delta x}$$

$$Q_{25} = \frac{M[2M(2+M)\Delta x \Delta \xi - M^4(\Delta x)^2 - (\Delta \xi)^2]}{4D^2(1+M)}$$

$$Q_{56} = \frac{(M\Delta x - \Delta \xi)(\Delta \xi - M^3\Delta x)}{DM(1+M)(1-M)^2\Delta x}$$

$$Q_{69} = \frac{2M^2(1+2M)\Delta x \Delta \xi - M^4(\Delta x)^2 - (\Delta \xi)^2}{4DM^3(1+M)\Delta x}$$

図27. ダブルモノクロメーターのスリット幅の大きさの関係。

入口, 中間, 出口スリットの幅 Δx , Δu , $\Delta \xi$ の関係は, $\Delta \xi / \Delta u$ と $\Delta x / \Delta u$ との関係として, 10 領域に分類される. 領域の境界線の傍にはそれを表す式を記入してある. ここでは $M = 0.8$ とした.

図28. 式 (53) の条件と式 (51) との関係。

式 (51) の (i) と (iii) とで囲まれる平行四辺形が (ii) と (iii) とで囲まれる平行四辺形の中に含まれる時には点 P_1 の σ 座標 $(\Delta \sigma_x - \Delta \sigma_\xi) / 2(M+1)$ は P_2 の σ 座標 $(\Delta \sigma_u - \Delta \sigma_\xi) / 2$ よりも小さい. この関係から式 (53) が得られる.

6.3 スリット関数の実際の形

前二小節では、入口スリットの像が出口スリット面上に幾何光学的に、少なくともスリット幅方向には収差なく、結ばれる場合について考察した。波長 λ_0 の単色光に対する式(26), (27)から得られる

$$\Phi = T(\lambda_0) \omega \Delta x \Delta y I_L \frac{1}{\Delta \sigma_x} \int_{-\infty}^{\infty} U(\mu, \Delta \sigma_x) U(\mu, \Delta \sigma_\xi) d\mu \quad (6-55)$$

において $U(\mu, \Delta \sigma_x)$ は入口スリットの出口スリット面上での像を表している。即ち出口スリット面上の $\xi=0$ を中心とし、波長尺度で $\Delta \sigma_x = M \Delta x / D$ の幅をもった像が、幅 $\Delta \sigma_\xi$ の出口スリット $U(\mu, \Delta \sigma_\xi)$ で切取られていることを示す、且つ、

$$\frac{1}{\Delta \sigma_x} \int_{-\infty}^{\infty} U(\mu, \Delta \sigma_x) d\mu = 1 \quad (6-56)$$

であり、 $T(\lambda_0) \omega \Delta x \Delta y I_L$ は出口スリット面上に到達した波長 λ_0 の光の全放射束であるから、

$U(\mu, \Delta \sigma_x) / \Delta \sigma_x$ は出口スリット面上での放射照度を η 方向に積分することによって得られる放射束の ξ 方向の分布を波長尺度で測って規格化したスペクトル線の形を表す。同様にして式(52)では

$U(\mu, \Delta \sigma_x) U(\mu, \Delta \sigma_\xi) / \Delta \sigma_x$ が出口スリット面上での規格化されたスペクトル線の形を表す。しかしながら実際には、光学系の収差や調整不良、本質的には開口による回折のために入口スリットの完全な幾何光学的像は得られない。以下では簡単のためシングルモノクロメーターの場合について(従って、ダブルモノクロメーターにあっては式(54)が適用される場合について)考える。

式(55)での $U(\mu, \Delta \sigma_x)$ が幾何光学的な像から変形されて $\tilde{U}(\mu, \Delta \sigma_x)$ になったとする。こゝでは $\Delta \sigma_x$ は式(19)で定義された入口スリット幅を示す単なるパラメーターであって $\tilde{U}(\mu, \Delta \sigma_x)$ の関数の形の幅を示すものではない。上記と同様に考えると、 $T(\lambda_0) \omega \Delta x \Delta y I_L \tilde{U}(\mu, \Delta \sigma_x) / \Delta \sigma_x$ は出口スリット面上での放射束の単位波長尺度あたりの密度であるから、エネルギーの保存を考えれば

$$\frac{1}{\Delta \sigma_x} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}(\mu, \Delta \sigma_x) d\mu = 1 \quad (6-57)$$

が変形の原因に依らずに成立たねばならない。与えられた λ_0 の近傍の任意の λ に対しては、変形された入口スリット像は同じ形を持つと考えられるので、式(20)の $U(\mu - \sigma, \Delta \sigma_x)$ を $\tilde{U}(\mu - \sigma, \Delta \sigma_x)$ でおきかえて、実際のスリット関数として

$$\tilde{S}(\sigma) = \frac{1}{\Delta \sigma_x} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}(\mu - \sigma, \Delta \sigma_x) U(\mu, \Delta \sigma_\xi) d\mu \quad (6-58)$$

を得る。 $\tilde{S}(0)$ はもはや式(27)のような簡単な形にはならないが、式(31)で定義される Q は式(57)のために式(33)と同じ形になる。従って式(43)は

$$\frac{\Phi_L}{\Phi_c} = \frac{I_L \tilde{S}(0)}{I(\lambda_0) Q} \quad (6-59)$$

に変わるが、式(44)は変らない。

6.3.1 回折による入射スリット像の変形

光学系が完全であっても、しぼりの開口は有限の大きさを持つために、こゝを通る際の光の回折——いわゆるフラウンホーフェル (Fraunhofer) の回折——による $U(\mu, \Delta\sigma_x)$ の変形は除くことはできない。このことは Cittert によって論じられた^{22, 23)}。

波長 $\lambda = \lambda_0$ の単色光について考えれば、分光器の光学系は図 29 に示したものと等価である。焦点距離 f_1, f_2 の二つのレンズ L_1, L_2 は z 軸を共通の主軸として置かれ、それぞれの中心位置は C_1, C_2 にある。 L_1 の前側焦点 F_1 , L_2 の後側焦点 F_2 を通り z 軸に垂直な平面が入口ならびに出口スリット面であり、 F_1, F_2 を原点としてそれぞれの面上に直交座標軸 $x, y; \xi, \eta$ 軸が対応する軸が互に平行になるようにとられている。両レンズの間の点 D を通り z 軸に垂直におかれたしぼりは回折格子、またはプリズム、あるいはその他の光束を制限する光学要素のうちの最小の開口面積をもったしぼりに対応し、その形は矩形で、中心は D にあり、両辺は x, y 軸に平行で、 x, y 方向の幅はそれぞれ w_x, w_y である。開口面内には D を中心として X, Y 軸がそれぞれ x, y 軸に平行にとられている。

入口スリットの開口面を波長に比べて十分小さい N 個の微小部分に分割すると、各微小部分内では光波の位相はそろっていると考えられるので、各部分を同じ放射強度の点光源で代表して考える。 j 番目の点 $Q_j(x_j, y_j)$ から L_1 に入射するすべての光線は L_1 を通った後 $Q_j C_1$ に平行になる。この方向の単位ベクトルを $\vec{s}_j$ とする。もししぼりでの回折を無視すれば、これらの平行光線は L_2 を通った後 Q_j の共役点、即ち $C_2 A_j \parallel \vec{s}_j$ となるような $\xi - \eta$ 面上の点 $A_j(\xi_j = -x_j f_2/f_1, \eta_j = -y_j f_2/f_1)$ に集る。

図29. しぼりによる回折.

L_1, L_2 : レンズ, $F_1: L_1$ の焦点, $F_2: L_2$ の焦点,
 D : L しぼりの中心, Q_j : j 番目の点光源, $A_j: Q_j$ の
 共役点, A : 観測点. y, Y, η 軸は紙面に垂直にとられて
 いる。従って図示の Q_j, P, A_j, A , 単位ベクトル $\vec{s}_j$,
 $\vec{s}$, 光路 $Q_j P A_j, Q_j P A$ は実際のものの $x-z$ 面への
 正射影である。

Q_j から出る光波の振動は $\exp(-2\pi i \nu_0 t)$ ($\nu_0 = \lambda_0 / c$) で表されるとし、しぼりの開口面においてフレネル・ホイゲンス (Fresnel-Huygens) の原理を適用する。しぼり面上の点 $P(X, Y)$ で単位ベクトル $\vec{s}$ の方向に回折される二次光の光路長は原点 D での同じ方向の回折光に比べて $\vec{DP} \cdot (\vec{s}_j - \vec{s})$ だけ長いので、 P からの二次波の複素振幅は D からのものにこの光路差に相当した位相因子 $\exp[-ik(Xp_j + Yq_j)]$ がかけられたものになる。ここで p_j, q_j は $\vec{s}_j, \vec{s}$ の方向余弦 (l_j, m_j, n_j), (l, m, n) を用いて

$$p_j = l - l_j, \quad q_j = m - m_j \quad (6-60)$$

で与えられ、

$$k = 2\pi / \lambda_0 \quad (6-61)$$

である。これらの回折光は L_2 を通過した後、 $\vec{DA} \parallel \vec{s}$ となるような $\xi - \eta$ 面上の点 $A(\xi, \eta)$ に集るので、 Q_j から出た光による A での光波の振幅 $V_j(\xi, \eta)$ は

$$\begin{aligned} V_j(\xi, \eta) &= C_j \int_{-w_x/2}^{w_x/2} \int_{-w_y/2}^{w_y/2} \exp[-ik(Xp_j + Yq_j)] dX dY \\ &= C_j w_x w_y \frac{\sin \alpha_j}{\alpha_j} \frac{\sin \beta_j}{\beta_j} \end{aligned} \quad (6-62)$$

となる。 C_j は絶対値 C をもつ複素数の定数で、 α_j, β_j は

$$\alpha_j = \frac{k w_x}{2} \left(\frac{\xi}{f_2} + \frac{x_j}{f_1} \right), \quad \beta_j = \frac{k w_y}{2} \left(\frac{\eta}{f_2} + \frac{y_j}{f_1} \right) \quad (6-63)$$

で与えられる。ここで

$$\left. \begin{aligned} l_j &= -\frac{x_j}{Q_j C_1} = -\frac{x_j}{f_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{x_j}{f_1} \right)^2 + \dots \simeq -\frac{x_j^*}{f_1} \\ l &= \frac{\xi}{C_2 A_j} \simeq \frac{\xi}{f_2} \end{aligned} \right\} \quad (6-64)$$

などの近似を用いた。 $V_j(\xi, \eta)$ は $\alpha_j = \beta_j = 0$ 、即ち A_j において最大となる。 N 個の光源からの寄与を合計して、 A での振幅 $V(\xi, \eta)$ は

$$V(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^N V_j(\xi, \eta) \quad (6-65)$$

となる。 A での放射照度は

$$\langle |V(\xi, \eta)|^2 \rangle = \sum_{j=1}^N \sum_{j'=1}^N \langle V_j(\xi, \eta) V_{j'}^*(\xi, \eta) \rangle \quad (6-66)$$

に比例する。 $\langle \rangle$ は長時間にわたる平均値を、 $*$ は複素共役を示す。

式(62)は点 $A(\xi, \eta)$ での振動の位相を、共役点 A_j での位相からの差として測っているから、式(65)

* $\left(\frac{x_j}{f_1}\right)^2$ の項がないことに注目せよ!

の和をとる際には、光路長 $Q_j A_j$ (Q_j と A_j とは互に共役点であるから両点を通る任意の光路の光路長はすべて同じである) が $j=1, 2, \dots, N$ に対して互に等しいことを前提としている。このことはこの光学系が正弦条件を満たしておれば成立つ(附録Ⅲ-1を見よ。) $x-z$ 面内での結像が完全でも、 $y-z$ 面内での結像に収差があれば、式(62)の $\exp(-ikYq_j)$ は別の表式でおきかえられるが、後で(式(70))で示すように $\widetilde{U}(\mu, \Delta\sigma_x)$ の計算の際には y 方向に関する因数は分子で相殺するので問題はない。

式(66)の和を求める際には、照明されている入射スリット面上の各点の光が互にどの程度に干渉し得るかが問題となる。その両極端の場合が非干渉性照明(incoherent irradiation)と干渉性照明(coherent irradiation)とである。照明されている面上の任意の二点から取り出された光を干渉させた場合、どの二点からの光源についても干渉度(degree of coherence)が0の場合を非干渉性、1の場合を干渉性の照明という。即ち、非干渉性の場合には干渉縞を生じることがなく、干渉性の場合、特に一様な輝度の光源で照明されている場合には鮮明度(visibility, 干渉縞の照度の最大値 E_{MAX} , 最小値 E_{MIN} を用いて $(E_{\text{MAX}} - E_{\text{MIN}}) / (E_{\text{MAX}} + E_{\text{MIN}})$ と定義される量)が1の干渉縞を生じる。通常の場合は両極端の中間にあり、部分的干渉性(partially coherent)のものである。

(i) 非干渉性照明の場合には N 個の C_j の位相の間には相関がないと考えられ、そのため $j \neq j'$ に対しては

$$\langle C_j C_{j'}^* \rangle = 0 \quad (6-67)$$

とおいて式(66)は

$$\langle |V(\xi, \eta)|^2 \rangle = C^2 \sum_{j=1}^N \langle |V_j(\xi, \eta)|^2 \rangle \quad (6-68)$$

となる。点光源が一様な密度 ρ で分布しているとして和を積分でおきかえ

$$\langle |V(\xi, \eta)|^2 \rangle = C^2 \rho (w_x w_y)^2 \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 dx dy \quad (6-69)$$

を得る。 α, β は式(63)での添字 j を除いたものである。*

$\widetilde{U}(\mu, \Delta\sigma_x)$ は、その定義に従えば、

$$\frac{1}{\Delta\sigma_x} \widetilde{U}(\mu, \Delta\sigma_x) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle |V(\xi, \eta)|^2 \rangle d\eta / \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle |V(\xi, \eta)|^2 \rangle d\eta d\mu \quad (6-70)$$

* 点光源の分布を最初から連続分布として扱うと、式(65), (62)はそれぞれ

$$V(\xi, \eta) = \int \rho V(x, y; \xi, \eta) dx dy,$$

$$V(x, y; \xi, \eta) = C(x, y) w_x w_y \frac{\sin \alpha(x, \xi)}{\alpha(x, \xi)} \cdot \frac{\sin \beta(y, \eta)}{\beta(y, \eta)} \quad \text{となるので、式(69)}$$

が得られるためには、非干渉性の条件式(67)は

$$\langle C(x, y) C^*(x', y') \rangle = \frac{|C|^2}{\rho} \delta(x-x') \delta(y-y') \quad \text{となるべきことがわかる。}$$

で与えられるので

$$\widetilde{U}(\mu, \Delta\sigma_x) = \Delta\sigma_x / \int_{-\infty}^{\infty} I \, d\mu, \quad (6-71)$$

$$I \equiv \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 d\alpha \quad (6-72)$$

となる。入口、出口スリット面での座標の符号の関係を式(4)に合わせるために、図29で ξ 軸の向きを逆にし、それに応じて式(63)で ξ を $-\xi$ と書き改めて

$$\alpha = \frac{k x_x}{2} \left(-\frac{\xi}{f_2} + \frac{x}{f_1} \right) \quad (6-73)$$

とし、式(17)と倍率の関係

$$M = f_2 / f_1, \quad (6-74)$$

ならびに積分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = \pi, \quad (6-75)$$

$$\int_0^{\alpha} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = -\frac{\sin^2 \alpha}{\alpha} + \text{Si}(2\alpha), \quad (6-76)$$

$$\text{Si}(\alpha) \equiv \int_0^{\alpha} \frac{\sin x}{x} dx, \quad (6-77)$$

を用い、添字 INをつけて、非干渉性照明の場合に対して

$$\widetilde{U}_{IN}(\mu, \Delta\sigma_x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(p + a\mu, 2b) \left(\frac{\sin p}{p} \right)^2 dp \quad (6-78)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\text{Si}(2(b+a\mu)) + \text{Si}(2(b-a\mu)) - \frac{\sin^2(b+a\mu)}{b+a\mu} - \frac{\sin^2(b-a\mu)}{b-a\mu} \right] \quad (6-79)$$

を得る。ここで $\text{Si}(\alpha)$ は積分正弦関数であり、

$$a \equiv \frac{\pi w_x D}{\lambda_0 f_2}, \quad b \equiv \frac{\pi w_x \Delta x}{2 \lambda_0 f_1} = \frac{\pi w_x D \Delta \sigma_x}{2 \lambda_0 f_2} = \frac{a \Delta \sigma_x}{2} \quad (6-80)$$

とおいた。 π/a は後述の式(86)からわかるように、無限小幅スリットの場合の回折像の幅(回折像の中心から照度0の位置まで)を波長尺度で表したものであり、 b は無次元の量である。

しぼりの面積が大きくなれば回折の影響は少なくなるはずであるが、実際式(17)で $w_x \rightarrow \infty$ とすれば

$$\text{Si}(+\infty) = \pi/2, \quad \text{Si}(-\infty) = -\pi/2, \quad \text{Si}(0) = 0 \quad (6-81)$$

の関係から

$$\lim_{w_x \rightarrow \infty} \tilde{U}_{IN}(\mu, \Delta\sigma_x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & |\mu| < \Delta\sigma_x/2 \\ 1/2 & |\mu| = \Delta\sigma_x/2 \\ 0 & |\mu| > \Delta\sigma_x/2 \end{array} \right\} \text{ に対し} \quad (6-82)$$

を得る。これは幾何光学的な像である $U(\mu, \Delta\sigma_x)$ に等しい。図30は文献22より引用したもので、 $\tilde{U}_{IN}(\mu, \Delta\sigma_x)$ を(そこに明示されていないが) $\tilde{U}_{IN}(0, \Delta\sigma_x)$ との比の形でいくつかの b に対し $a\mu$ の関数として示す。中心値 $\tilde{U}_{IN}(0, \Delta\sigma_x)$ は式(78), (79)より得られる

$$\tilde{U}_{IN}(0, \Delta\sigma_x) = \frac{2}{\pi} \int_0^b \left(\frac{\sin p}{p} \right)^2 dp = \frac{2}{\pi} \left[\text{Si}(2b) - \frac{\sin^2 b}{b} \right] \quad (6-83)$$

の中央の式の形からわかるように、 b の単調増加関数であるが、その導関数は $b = n\pi$ (n は0以外の整数) で0となるため、その曲線はわずかなうねりを持つ。文献22に示されている式ならびに図には誤りが

図30. $\tilde{U}_{IN}(\mu, \Delta\sigma_x)$ の相対値.

$\tilde{U}_{IN}(\mu, \Delta\sigma_x)$ の値を $\mu=0$ での値が同じになるように規格化して示してある。

図31. $\tilde{U}_{IN}(0, \Delta\sigma_x)$ の値.

$$\text{表 2. } I(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi x} \left(\frac{\sin p}{p} \right)^2 dp = \frac{2}{\pi} \left[\text{Si}(2\pi x) - \frac{\sin^2 \pi x}{\pi x} \right] \text{ の表}$$

例えば 9.97264-02 は 9.97264×10^{-2} を意味する。

x	I (x)	x	I (x)	x	I (x)
0.00	0.00000+00	1.50	9.31092-01	3.00	9.66411-01
0.05	9.97264-02	1.55	9.35414-01	3.05	9.66419-01
0.10	1.97824-01	1.60	9.39271-01	3.10	9.66480-01
0.15	2.92728-01	1.65	9.42544-01	3.15	9.66633-01
0.20	3.82997-01	1.70	9.45169-01	3.20	9.66908-01
0.25	4.67370-01	1.75	9.47140-01	3.25	9.67319-01
0.30	5.44805-01	1.80	9.48500-01	3.30	9.67864-01
0.35	6.14522-01	1.85	9.49335-01	3.35	9.68529-01
0.40	6.76011-01	1.90	9.49763-01	3.40	9.69287-01
0.45	7.29052-01	1.95	9.49918-01	3.45	9.70102-01
0.50	7.73695-01	2.00	9.49939-01	3.50	9.70934-01
0.55	8.10252-01	2.05	9.49960-01	3.55	9.71743-01
0.60	8.39257-01	2.10	9.50090-01	3.60	9.72491-01
0.65	8.61433-01	2.15	9.50422-01	3.65	9.73149-01
0.70	8.77640-01	2.20	9.51009-01	3.70	9.73694-01
0.75	8.88827-01	2.25	9.51871-01	3.75	9.74116-01
0.80	8.95983-01	2.30	9.53001-01	3.80	9.74416-01
0.85	9.00086-01	2.35	9.54361-01	3.85	9.74606-01
0.90	9.02059-01	2.40	9.55891-01	3.90	9.74706-01
0.95	9.02734-01	2.45	9.57517-01	3.95	9.74743-01
1.00	9.02823-01	2.50	9.59157-01	4.00	9.74748-01
1.05	9.02900-01	2.55	9.60734-01		
1.10	9.03390-01	2.60	9.62176-01		
1.15	9.04568-01	2.65	9.63430-01		
1.20	9.06572-01	2.70	9.64459-01		
1.25	9.09416-01	2.75	9.65248-01		
1.30	9.13013-01	2.80	9.65804-01		
1.35	9.17199-01	2.85	9.66152-01		
1.40	9.21764-01	2.90	9.66134-01		
1.45	9.26472-01	2.95	9.66401-01		

ある*の計算しなおしたものを図31に、数値を表2に示した。 $\widetilde{U}_{IN}(\mu, \Delta\sigma_x)$ の半値幅 H_{IN} は同じ文献から引用した図34に示してある**。ここで H_{IN} は

$$\widetilde{U}_{IN}(\mu_{1/2}, \Delta\sigma_x) = \frac{1}{2} \widetilde{U}_{IN}(0, \Delta\sigma_x) \quad (6-84)$$

* これは式(83)の $\sin^2 b/b$ を落したことによる。この誤りを指摘したG. H. Godfrey (Aust. J. Sci. Res. 1(1948)1)の与えた図がR. A. SawyerのExperimental Spectroscopy (Dover Publications, Inc., 1963) p. 112に採録されており、これとは別に、藤岡由夫(編)の分光学(講談社, 1967) p. 89, 吉永 弘(編)の応用分光学ハンドブック(朝倉書店, 1973) p. 401にも図が示されているが、いずれにも上記のわずかなうねりが見られない。Harrison, Lord and LoofbourowのPractical Spectroscopy (Prentice Hall, 1948) p. 122には原論文の図がそのまま引用されている。

** 紙面の都合上図34は次回に掲載する。

を満す $\mu_{1/2}$ を用いて

$$H_{IN} = a \mu_{1/2} \quad (6-85)$$

として表されている. $b=0$ での半値幅は, $\widetilde{U}_{IN}(\mu, \Delta\sigma_x) / \Delta\sigma_x$ の $b \rightarrow 0$ で極限での形

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\sigma_x} \widetilde{U}_{IN}(\mu, \Delta\sigma_x) = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{a}{2\pi b} \int_{-a\mu-b}^{-a\mu+b} \left(\frac{\sin p}{p} \right)^2 dp = \frac{a}{\pi} \left(\frac{\sin a\mu}{a\mu} \right)^2, \quad (6-86)$$

即ち無限小幅のスリットによるフラウンホーフェル回折像の半値幅

$$H_{IN}(b=0) = 0.443\pi^* \quad (6-87)$$

である. Cittert によれば $b \geq 2\pi/3$ に対しては半値幅は

$$H_{IN}(b) = b + 0.03\pi \quad (6-88)$$

で与えられる. b を $\pi/2$ より小さくしても, 図 34 からわかるように, 半値幅はほとんど減少せず, 図 31 が示すように, 中心値が b にほぼ比例して減少する.

参 考 文 献

- 22) P. H. van Cittert : Z. Phys. **65** (1930) 547.
 23) P. H. van Cittert : Z. Phys. **69** (1931) 298.

附録Ⅲ-1 軸に垂直な面内で軸の近傍にある共役点間の光路長が等しいことの証明

図 AⅢ-1 で Q, A ならびにそれぞれの近傍の点 Q', A' はそれぞれ互に共役点であって QQ', AA' は共に軸に垂直であるとする. Q, A を通る一つの光路と軸との交りを図のように θ_Q, θ_A とする. Q' から A' に向う光路のうち, Q' において軸と $\theta_{Q'}$ との角をなす光路を選び, この光路が屈折後軸となす角を $\theta_{A'}$, 光路 QA と $Q'A'$ との交りを F' , Q', A' から光路 QA に下した垂線の足を Q'', A'' とする. F' は Q, Q'' から出る平行光線の焦点になっているので光路 $Q'F' = \text{光路 } Q''F'$ である. 従って光路 $Q'A' = \text{光路 } QA$ との差を Δl とすると

$$\Delta l \equiv \text{光路 } Q'A' - \text{光路 } QA = F'A' - F'A - QQ''$$

である. ところで, $\Delta\theta \equiv \theta_{A'} - \theta_A$ とすると

$$F'A' = (FA + AA'') / \cos \Delta\theta$$

図 AⅢ-1. 共役点間の光路長

* 文献 22 では 0.43π となっている.

であるから、 Q' 、 A' が軸に近い時は $\Delta\theta$ の1次までの近似においては

$$F'A' = F'A + AA'',$$

従って

$$\begin{aligned}\Delta l &= AA'' - QQ'' \\ &= AA' \sin \theta_A - QQ' \sin \theta_Q\end{aligned}$$

は正弦条件、式(4-11)，が満されておれば0となる。

更にくわしくは文献19（草川，横田訳，ボルン，ウォルフ著：光学の原理Ⅰ）p. 230を参照されたい。

附録Ⅲ-2 プラズマ分光測定入門(Ⅱ) 正誤表

p. 259 本文上から2行目	$\Phi = S dS \int_{\Omega} d\Omega I \cos \theta$ を	$\Phi = \int_S dS \int_{\Omega} d\Omega I \cos \theta$ に，
p. 263 図14 説明文の中で	正法条件を	正弦条件に，
p. 264 図16 説明文の中で	円筒レンズを	円柱レンズに，
下から10行目	円筒レンズ法を	円柱レンズ法に，
〃 9 〃 2箇所について		
	円筒レンズを	円柱レンズに，
〃 1 〃	(4-13)を	(5-1)に，
p. 265 上から2 〃	式(13)を	式(1)に，
〃 6 〃	式(13)を	式(1)に，
下から11 〃	(4-14)を	(5-2)に，
〃 9 〃	(4-15)を	(5-3)に，
〃 7 〃	(4-16)を	(5-4)に，
〃 6 〃	式(14)を	式(2)に，
〃 5 〃	(4-17)を	(5-5)に，
〃 3 〃	(4-18)を	(5-6)に，
〃 2 〃	式(17)，式(18)を	式(5)，(6)に，
上から7 〃	式(13)，式(18)を	式(1)，(6)に，
〃 8 〃	(4-19)を	(5-7)に，
下から8 〃	(4-20)を	(5-8)に，
〃 5 〃	(4-21)を	(5-9)に，
〃 4 〃	式(19)を	式(7)に，
〃 3 〃	(4-22)を	(5-10)に，

p. 266 脚注下から 1 行目	(22)	を	(10)	に,
p. 267 上から 9 行目	式(22)	を	式(10)	に,
" 13 "	式(22)	を	式(10)	に,
" 14 "	(4-23)	を	(5-11)	に,
下から 5 "	(4-24)	を	(5-12)	に,
" 3 "	(4-25)	を	(5-13)	に,
" 1 "	(4-26)	を	(5-14)	に,
p. 268 上から 1 "	式(22)	を	式(10)	に,
" 2 "	式(27)	を	(5-15)	に,
7 7, 8 行目	(4-28)	を	(5-16)	に,
" 10 "	(4-29)	を	(5-17)	に,
" 12 "	(4-30)	を	(5-18)	に,
" 14 "	(4-31)	を	(5-19)	に,
" 16 "	(4-32)	を	(5-20)	に,
" 17 "	式(31)	を	式(19)	に,
" 18 "	式(29)	を	式(17)	に,
" 20 "	式(27), (30)	を	式(15), (18)	に,
下から 2 "	式(28)	を	式(16)	に,
" 1 "	(4-33)	を	(5-21)	に,
p. 269 上から 1 "	式(28)	を	式(16)	に,
" 3 "	(4-34)	を	(5-22)	に,
" 5 "	式(34)	を	式(22)	に,
" 6 "	(4-35)	を	(5-23)	に,
下から 4 "	(4-36)	を	(5-24)	に,
p. 270 上から 2 "	式(22)	を	式(10)	に,
" 3 "	(4-37)	を	(5-25)	に,
" 6 "	式(36)	を	式(24)	に,
" 7 "	(4-38)	を	(5-26)	に,
" 8 "	式(37)	を	式(25)	に,
" 9 "	(4-39)	を	(5-27)	に,
" 10 "	式(23)	を	式(11)	に,
" 14 "	(4-40)	を	(5-28)	に,

p. 270 上から 15 行目	式 (36)	を	式 (24)	に,
16	(4-41)	を	(5-29)	に,
17	(4-42)	を	(5-30)	に,
下から 3	円の中心	を	球の中心	に,
p. 271 上から 3	式 (41), (42)	を	式 (29), (30)	に,
〃 7	(4-43)	を	(5-31)	に,
〃 9	式 (37)	を	式 (25)	に,
〃 13	(4-44)	を	(5-32)	に,
〃 18, 19	(4-45)	を	(5-33)	に,
〃 21	(4-46)	を	(5-34)	になおし,
下から 5	X, Y のそれぞれ…から			

1 …対称である. までは削除して以下の文

「式 (34) の分母を X, Y で陽に書き表すことは困難であるが, $Y=0$ に対しては

$$E_{\text{KII}} = \frac{R_f J}{6 R^{4/3} (\cos \theta)^{2/3} X^{2/3}} \quad (5-35)$$

となる. 式 (33) の Y の括弧内の第 2 項を省略し, 両式から y を消去すればわかるように, 放射照度は X の正負にわたって 0 ではなく, Y^2 の項にもとづくわずかな彎曲を無視すると Y 軸に関して対称である. 」

に置きかえ,

p. 272 上から 3 行目	(4-48)	を	(5-36)	に,
p. 273 下から 7 行目	(4-20)	を	(5-8)	になおす.