Grad-Shafranov 方程式を巡る幾つかの論点

吉田 善章

(東京大学工学部)

(1987年1月30日受理)

Discussions on the Grad-Shafranov Equation

Zensho Yoshida

(Received January 30, 1987)

Abstract

The Grad-Shafranov equation (GS) of magnetohydro-statics has been discussed from a view-point of mathematical physics. Characteristic functions of GS are related to the hyperbolicity of the static equations, and are relevant to the dissipative structure of MHD systems. A possibility of considering GS as an operator differential equation has been discussed. This paper is dedicated to the memory of Professor H. Grad.

1. はじめに

H. Grad 教授は、プラズマ核融合に関係する私達にとっては、例えばMHD 平衡や古典拡散の理論を通じて大変馴染の深い先生であります。Courant Institute of Mathematical Sciences (New York University) で教鞭を取られた先生は所謂 Göttingen / New York 学派を代表する数理科学者の一人です。その研究業績は1950年代を中心として行われた Boltzmann 方程式に関する研究からその後のMHDに関する研究の広きに亘ります。特にMHD理論の研究ではプラズマ核融合界に不朽の足跡を残されました。我々初心者にとっても、例えば Grad-Shafranov 方程式は最も重要な基礎方程式の一つです。本稿ではその Grad-Shafranov 方程式を巡る幾つかの論点、古典数理的課題から今日的な問題に至るまでを概観してみましょう。

2. Grad-Shafranov 方程式

電磁流体静力学の方程式 (面倒なので以下透磁率 = 1 とする)

$$(\operatorname{rot} \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \operatorname{grad} p, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (1)$$

は次節でも述べる様に変難しい偏微分方程式系である。しかし、系に1つの対称性を仮定する、即ち2次元の問題を考えると比較的見易い方程式に帰着できる。所謂 Grad-Shafranov 方程式である¹⁾。本稿は主としてその数学的側面を議論するので、物理的に単純な問題設定の下で導出を復習しておこう。以下は Grad 自身の講義録による。

発散のないベクトル場 u は2つの独立なスカラー ψ, ζ によって $u = (\text{grad } \psi) \times (\text{grad } \zeta)$ と書くことが出来る。これを Hodge の表現と言う(3-3 参照)。さて (x, y, z) 座標を持つ Euclid 空間で $\partial_z = 0$ なる2次元性を仮定し、Hodge の表現を磁束密度 B に適用すると、 $B = (\text{grad } \psi) \times (\text{grad } z) + B_z \text{grad } z$ と書く事が出来る。但し、 ψ と B_z は x, y の関数である。簡単の為に $B_z = 0$ の場合を考えよう。即ち、 $B = (\text{grad } \psi) \times (\text{grad } z)$ 。これを平衡の式(1)に代入すると、その x, y 成分は

$$(-\Delta \psi) \text{grad } \psi = \text{grad } p. \quad (2)$$

ベクトル $\text{grad } \psi$ と $\text{grad } p$ が並行であるので $p(x, y) = P(\psi(x, y))$ ($P: R$ 上の関数)と書くことが出来て、

$$-\Delta \psi = P'(\psi) \quad (3)$$

を得る。 $P'(\psi)$ は $\text{grad } p = P'(\psi) \text{grad } \psi$ で定義される。これを Grad-Shafranov 方程式(簡単の為に GS)と呼ぶ。(一般には非線型の)作用素 $f(\psi)$ で $P'(\psi) = f(\psi)$ と与えれば、GS は非線型楕円型偏微分方程式

$$-\Delta \psi = f(\psi)$$

であり、 ψ に境界条件を与えると(例えば ψ の境界値 $= 0$)境界値問題として定式化された事になる。解は作用素 $(-\Delta)^{-1}f$ の不動点として特徴付ける事が出来る。

さて、本稿ではGSを巡る以下の3つの話題について考える。第3節では3次元の平衡方程式系(1)とGSとの関係を偏微分方程式論の立場から議論してみる。すると作用素 $P'(\psi)$ を与えるという要請と(1)の特性関数との関係が明らかになる。Grad 自身非線型偏微分方程式系の特性関数という観点から(1)を考察しGSの理論に至ったに相違ない。第4節では特性関数と散逸構造理論との関係という物理学的な話題に言及する。但し、この点については文献2があるので、詳述を略す。第5節では視点を π 変えて、GSを p に関する方程式とする観点について議論してみる。

3. 偏微分方程式に関する学術的観点から見た Grad-Shafranov 方程式の意義

3-1. 平衡方程式系の持つ問題

先ず平衡方程式(1)が持つ偏微分方程式系としての面白さについて述べる事から始めよう。この非線型方程式系はその特性方程式を計算してみれば直ちに分かる様に2楕円&2双曲型である。2つの双曲性を与える特性方向は B の方向に縮退している。この様な偏微分方程式系は(楕円性に対応する)境界値と(双曲性

に対応する) 初期値という2つの異なる性格を持つデータを与えて初めて well-posed になり得る。ここで「初期値」と言ったのはあくまで数学的表現であり、その内容は特性方向を横断する「初期曲面」上にデータを与えるという事である。物理的の時刻には関係ない。この双曲性の為に以下の様な事情が発生する。

(A) 境界値を与えるだけでは解は無数に在って定まらない。定常問題であるのにも拘らず定常状態が境界条件だけでは決まらないのである。この点は次節に述べる散逸構造の議論に重要な鍵となる。

(B) 解を、実際に一義的に出来るか否かは難しいが、とにかく定める為には特性関数というデータが必要である。それは特性方向を横断する「初期曲面」上に与えられねばならないが、特性方向は $\mathbf{B}$ 自身である。つまり特性関数を与えるべき曲面は問題を解いて $\mathbf{B}$ を決めてみなくては分からないという dilemma に陥る。更に問題を空間上大域的に考えると、特性方向 $\mathbf{B}$ がループを持つとどういう事になるのか? 特性曲線をパラメータ τ で目盛ると、特性関数は「初期値」的であり、 τ は「時刻」的であるがそれが大域的には回帰性を示してしまう。一般的な数学的考察を行うのは極めて難しいのである。第4節で議論する様にこの難点は静力学に固執する事から派生している。静力学は動力学の特殊、特に意味を持つのは asymptotics として意味を与えるべきである。

(C) 双曲性の介在は変分学的研究を試みる時も興味深い問題を生じる。汎関数

$$W(\mathbf{B}) = \int B^2 dx / 2$$

の極小化によって与えられる関数 $\mathbf{B}$ について考えてみよう。

- (i) W の定義域を2乗可積分関数全体 L^2 にとれば、勿論 $\mathbf{B} = 0$ で $W(0) = 0$ 。
- (ii) $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ で考えると、 $\operatorname{rot} \mathbf{B}' = 0$ なるベクトル $\mathbf{B}'$ は W を極小化する。 $\mathbf{B}'$ は真空外磁場にはかならない。trivial でない境界条件 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = g$ や、穴のある領域についてはフラックス $\int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\Sigma} = 0$ を与えると $\mathbf{B}'$ は0ではなくなる。この境界条件やフラックス条件がホモロジーの理論に関係する。
- (iii) もっと W の定義域を狭くとってみよう。J. B. Taylor は条件 $\int \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} dx = K$ を課してみた。但しここでは $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} + \mathbf{B}'$ と書く。この場合、 $\operatorname{rot} \mathbf{B}_T = \lambda \mathbf{B}_T$ 、 $\lambda = 2(W(\mathbf{B}_T) - W(\mathbf{B}')) / K$ なる $\mathbf{B}_T$ が W の極小を与える。これは $(\operatorname{rot} \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = 0$ なる所謂無力磁場のなかで、特に $\lambda = \text{一定}$ という特殊な物である。
- (iv) Grad は更に特殊な束縛を課した下での W の極小化に対する Euler 方程式として(1)を得る事が出来る事を示した^{3, 4)}。その束縛条件は $\mathbf{B}$ が持つべきトポロジカルな条件と、更にその上で成立する示量性の条件から成る*。この点からも(1)に対する解析にトポロジーの問題が介入してくるのが分かる。

3-2. 特性関数と Grad の平衡理論

以上に述べた様な深刻な問題を持つ平衡方程式系は2次元という特殊な場合を考察するとその構造が明確

* Kruskal-Kulsrud⁵⁾ は熱エネルギー $\int \frac{p}{1-\tau} dx$ を加えたものを汎関数に採ったが、その付加は Grad が与えた束縛に対する一般化された Lagrange 未定関数と同等である。

な数理の研究対象として現れてくる。上に項目(B)で述べた様に、一般3次元の問題設定の下で生じる難問は特性関数を与えるべき「初期曲面」を十分に定義し得ない事に在り、従って特性関数によって解を定めるという概念自体がこの強い非線型性を持つ問題に於てその論理的有効性を喪失する。この事が、定常Euler方程式や定常MHD方程式等を含む非線型定常問題の一つの重要なクラスに於ける中心的問題であり、その数学的論点はそれ等の問題が持つ双曲性に在る。

さて、2次元性を仮定するという強いトポロジカルな制限を導入すると、特性関数の役割が、(1)が持つもう一つの特性である楕円性との関係に於いて、美しい形式に具体化される。即ちGSに現れる $P'(\psi)$ が双曲性に由来する特性関数(作用素)であり、それを与えればGSは既に楕円型方程式なのである。我々は簡単の為に $B_z=0$ とした。 B_z が0でない一般の場合、GSの右辺にはもう1つの特性関数 $(B_z^2)'/2$ (無力電流密度)が現れる。この2つの特性関数が(1)の2つの双曲性に対応する。

3-3. 微分形式との関係

ベクトル場を或る種のポテンシャルによって表現しようという試みは長い歴史を持ち、外微分学に於けるPoincareの見事な定理にその初期の例を見る事が出来る。即ち、閉微分形式 ω (即ち $d\omega=0$)はそれより1次低い微分形式 x によって $\omega=dx$ と書く事が出来る。但しこれは空間上局所的に、又は単純なトポロジーの領域に於いてのみ成立する。平易な言語に翻訳すれば、3次元のEuclid空間に対しては、「 $\text{rot } \mathbf{u}=0$ なるベクトル $\mathbf{u}$ は或るスカラー ϕ によって $\mathbf{u}=\text{grad } \phi$ と書く事が出来る」、又「 $\text{div } \mathbf{v}=0$ なるベクトル $\mathbf{v}$ は或るベクトル $\mathbf{w}$ によって $\mathbf{v}=\text{rot } \mathbf{w}$ と書く事が出来る」というお馴染の事実であるが、これは果して一般のトポロジーの多様体上では成立しない。次の様な卑近な例にこの表現の限界を見る事が出来る。トロイド $\mathcal{Q}$ に対して真空トロイダル磁場 $\mathbf{B}_\phi$ は $\mathcal{Q}$ 内で $\text{rot } \mathbf{B}_\phi=0$ を満たすが、 $\mathbf{B}_\phi=\text{grad } \phi$ と書くと ϕ は多価関数になってしまう。それは $\mathcal{Q}$ の外に特異点($\text{rot } \mathbf{B}_\phi$ が0でない所)が在る為である。この種の問題は $\mathcal{Q}$ 内の $\text{div } \mathbf{u}=0$, $\text{rot } \mathbf{u}=0$ なる調和ベクトル場の研究、つまり $\Delta\phi=0$ なる多価関数 ϕ の研究を派生する。特に2次元を考えるならば、それは関数論に於ける正則関数(調和関数)と特異点の研究である。

一般のRiemann多様体上でベクトル場のポテンシャル表現を研究する事は、そこで楕円型偏微分方程式を研究する事に関連する。この点については多くの数学的研究の蓄積がある。Friedrichsの重要な論文“Differential Forms on Riemannian Manifolds”⁶⁾の結果を速やかに応用出来るよう書き下したBlank-Friedrichs-GradによるCourant研究所の講義録“Notes on Magneto-Hydrodynamics V”⁷⁾は物理学者にとっても平易な参考書である。

さて、 $\text{div } \mathbf{B}=0$ である磁束密度 $\mathbf{B}$ をポテンシャルで表示する事を考えよう。常套手段はHodge-Kodairaの定理による次の様な表現である。

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} + \mathbf{B}'$$

但しポテンシャル $\mathbf{A}$ は境界条件 $\mathbf{n} \times \mathbf{A} = 0$ とゲージ条件 $\text{div } \mathbf{A} = 0$ を満たす。 $\mathbf{B}'$ は $\text{div } \mathbf{B}' = 0$, $\text{rot } \mathbf{B}' = 0$ を満たす真空外磁場である(3-1(3)(ii)参照)。これは動力学の研究に本質的な表現である。

しかし静力学のGSを導く時、Hodgeの表現 $\mathbf{B} = \text{grad } \psi \times \text{grad } \zeta$ を用いた。 $\mathbf{B}$ に細かく分流した渦が動的に発生する場合、この様な表現をすると ψ , ζ は複雑な多価関数としてその形が変遷する事になってしまいが、静力学の場合にはこの様な表現によって $\mathbf{B}$ が持つトポロジカルな特性が見え易くなる。ここで2次元に移行してGSを得た訳である($\zeta = z$)。その場合、 x, y 平面上のベクトル関数 $\mathbf{B}$ に対してPoincareの定理は $d\mathbf{B} = 0$ ($\text{div } \mathbf{B} = 0$) ならば $\mathbf{B} = d\psi$ ($\mathbf{B} = \text{grad } \psi \times \text{grad } z$) と書く事が出来る事を意味しているのである。場のポテンシャル表現については第5節で更に議論する。

4. Grad-Shafranov 方程式と散逸構造理論の関係

双曲性を伴う定常問題の特徴は、その解が境界条件だけでは決まらないという事である(3-1(1))。解を定める為の特性関数及びその特性関数を与えるべき「初期曲面」を如何に定めるべきかという問題は、定常問題の枠に留まる限り極めて深刻な論理的困難を含んでいる。それを回避し、かつ妥当な解答を得る為に採るべき物理学的方向は定常問題を発展問題の枠から捉え直す事、そして定常状態を動的状態の或る意味での時間漸近形として考える事であろう。その様にすると「初期曲面」のトポロジカルな構造及び特性関数の関数形としての構造が一定の時間漸近形として具体化してくることが期待される。論文2は、外部エネルギーを考えない場合について動的問題を解析し、上記の試みに於いてある程度成功した例である。その結果によると、外的要因(境界条件)が持つ幾何学的対称性は、そこに在るプラズマの時間漸近形に対称性を生じ、一定特殊の特性関数が選択されて系の構造を単純性のものに具体化する事(構造の自己形成)が示される。この事はGradのconjectureと矛盾しない。しかし、2つの特性関数の内 $P'(\psi)$ に関する解析が不充分であり、この方向の更なる研究が待たれる。

5. 作用素微分方程式としてのGrad-Shafranov 方程式

前節までは専ら特性関数 $P'(\psi)$ を与えて平衡を解析するという立場から考えてきた。その際GSは楕円型の関数方程式であった。本節では視点を変えて作用素 $p = p(\psi)$ を話題にしてみよう。GSは $\text{grad } p$ と $\text{grad } \psi$ が並行である事を内包している。 p は ψ を $p(\psi)$ へ写像する作用素であり、その特徴は $p(\psi)(x, y) = P(\psi(x, y))$ ($P: R$ 上の関数)となる事である。さて、ここでGSが作用素 p に関する方程式であると考えられる事は出来ないであろうか？ つまり作用素 p の関数 ψ による微係数 $dp/d\psi$ を与えるのがGS方程式であると考え：

$$dp/d\psi = -\Delta\psi. \quad (4)$$

右辺は $-\Delta\psi$ を乗じる掛算作用素と考える。これを ψ について“積分”すると作用素 $p(\psi)$ が求まるであろう。問題は作用素を関数で微分するという事をどの様に捉えるかという点にあるが、先ず物理的な解釈から考察を始めよう。今、関数 ψ が与えられたとする。 $\mathbf{B} = \text{grad } \psi \times \text{grad } z$ より $\mathbf{B}$ が与えられたことにな

る。この $\mathbf{B}$ が発生する磁気応力 $(\text{rot } \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$ がスカラー p による場 $\text{grad } p$ で表現できるならば ψ から $p(\psi)$ を定めることができる。これは勿論一般の $\mathbf{B}$ については成立しない。平衡方程式はベクトル場 $(\text{rot } \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$ がポテンシャル表現 $\text{grad } p$ を許す事を要請する(3-3 参照)。2次元の場合、即ち、GS に於いては形式的な積分

$$d p = -\Delta \psi d \psi$$

に対して、 $d p, d \psi$ を微分形式と思えば良い。Poincare の定理を思い出すと、右辺が閉微分形式である事、即ち $d(-\Delta \psi d \psi) = 0$ である事がこの積分が成立する為の条件となる。この手順と整合する様に作用素 $p(\psi)$ の微分が定義されねばならない。

作用素 $p(\psi)$ の $\psi = \psi_0$ に於ける微係数は或る(線型)作用素である。微係数 $d p / d \psi$ を次の式で定義する。

$$\lim_{\|\delta\|_1 \rightarrow 0} \frac{\|p(\psi_0 + \delta) - p(\psi_0) - (d p / d \psi)|_{\psi_0} \delta\|_1}{\|\delta\|_1} = 0 \quad (5)$$

但し、 $\|u\|_1 = \|\text{grad } u\| = \int |\text{grad } u|^2 dx dy$ とする。先ずGS 導出時に於ける $P'(\psi)$ の定義($\text{grad } p(\psi) = P'(\psi) \text{grad } \psi$) と(5) で定義した $d p / d \psi$ とが整合する事、即ち $p(\psi)(x, y) = P(\psi(x, y))$ なる $p(\psi)$ に対して $d p / d \psi|_{\psi_0} = P'(\psi_0)$ とすれば(5) が成立する事を確かめよう。

$$\begin{aligned} \text{grad} [p(\psi_0 + \delta) - p(\psi_0) - P'(\psi_0) \delta] &= P'(\psi_0 + \delta) [\text{grad}(\psi_0 + \delta) - \text{grad } \psi_0] \\ &\quad - P'(\psi_0) \text{grad } \delta + [P'(\psi_0 + \delta) - P'(\psi_0)] \text{grad } \psi_0 - \delta \text{grad } P'(\psi_0) \end{aligned}$$

従って、 $\text{grad } P' = P'' \text{grad } \psi$ である事に注意して(5)の成立を見る。この様にして $p(x, y) = p(\psi(x, y))$ なる変換に対する Jacobian として定義された $P'(\psi)$ が作用素 $p(\psi)$ の関数空間微分 $d p / d \psi$ の特殊として定義し直された。

以上の作用素の微分の定義に従ってGSを作用素の微分方程式と考えよう。すると式(4)は作用素 p の微係数作用素 $d p / d \psi = -\Delta \psi$ を掛ける作用素である事を意味している。上記の議論から(4)は $\text{grad } p(\psi) = P'(\psi) \text{grad } \psi = (-\Delta \psi) \text{grad } \psi$ である ψ 及び $p(\psi)$ (つまり $p: \psi \rightarrow p(\psi)$) に関して成立し、それは即ち関数方程式GSが成立する事と等価である。

作用素としての $p(\psi)$ の具体形を求めよう。(4)の両辺が $\text{grad } \psi$ に作用した関係(2)の両辺の div をとると

$$\Delta p = \text{div} [(-\Delta \psi) \text{grad } \psi],$$

境界条件は

$$\partial_n p = (-\Delta \psi) \partial_n \psi.$$

このNeumann 問題に対する解作用素を N とすると

$$p(\psi) = N \text{div} [(-\Delta \psi) \text{grad } \psi] \quad (6)$$

を得る。この作用素が意味を持つ、即ち ρ が (2) を満たすのは $\text{rot} [(-\Delta \psi) \text{grad } \psi] = 0$ を満たす ψ のクラスに於いてのみである。それは GS に於ける ψ に関する関係 $-\Delta \psi = P'(\psi)$ が成立する事に他ならない。実際、 $\text{rot} [P'(\psi) \text{grad } \psi] = 0$ 。以上の如く作用素方程式としての GS (4), その積分形 (6) は関数方程式としての GS (3) と論理的に等価なものとして考える事が出来る。

6. おわりに

H. Grad 教授は昨年 11 月 17 日逝去されました。その悲報が伝えられたのは第 11 回 IAEA 国際会議 (京都) が開催されている最中でしたので、既に多くの方々が御存じのことと思います。筆者も直接御指導賜った者の一人として、ここに拙文を書き留めることに致しました、師の学問に対する直向きな情熱をしのびつつ。

参 考 文 献

- 1) H. Grad and H. Rubin, in *Second United Nations Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy* Vol.31 (Genova, 1958), 190.
- 2) 吉田善章, 核融合研究 56 (1986), 115.
- 3) H. Grad, *Phys. Fluids* 7 (1964), 1283.
- 4) H. Grad, in *Proc. Int. Nat. Congress of Mathematics* (Nice, 1971), 105.
- 5) M. D. Kruskal and R. M. Kulsrud, *Phys. Fluids* 1 (1958), 265.
- 6) K. O. Friedrichs, *Comm. Pure Appl. Math.* 8 (1955), 551.
- 7) A. A. Blank, K. O. Friedrichs and H. Grad, *Notes on Magneto-Hydrodynamics V*, NYO-6486-V, CIMS, NYU (New York, 1957).