非圧縮性 Pipe Flow の数値シミュレーション

武 本 行 正

(名古屋大学プラズマ研究所)
(附属電子計算機センター)

(1987 年 3 月 9 日受理 / 5 月 21 日改訂原稿受理)

Numerical Simulation for Incompressible Bended Pipe Flows

Yukimasa Takemoto

(Received March 9, 1987/Revised manuscript received May 21, 1987)

Abstract

Accurate and stable numerical solutions for time-dependent convection-dominated fluid flows are urgently required. A calculation procedure to solve the unsteady incompressible three-dimensional Navier-Stokes equations at relatively high Reynolds numbers in arbitrary shapes is presented. The boundary-fitted curvilinear coordinate system is used. The Adams-Bashforth scheme is used for the time integration and a third-order upwind differencing for the convective terms which have an advantage in suppressing the instabilities is used. The third-order method for the space derivatives based on the Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics (QUICK) algorithm is used. As an example, the solutions for a time-marching circular-sectioned bended pipe flow at the Reynolds number of 10^3 and 5×10^4 were obtained. The Taylor-Görtler type secondary vortices and the corner vortices were well caught in these simulations.

Keywords :

numerical simulation, third-order upwind differencing, Navier-stokes equations, boundary-fitted curvilinear coordinates

1. はじめに

理工学分野における物理現象等でよく用いられる移流拡散方程式や Navier-Stokes 方程式, Burgers 方程式等の差分近似解法において, 移流項(非線形項)に対する 3 次上流差分スキームの有効性が最近認められてきた。正確度が高く, 高レイノルズ数 (Re 数) の乱流の直接シミュレーションも可能との利点があるので, ここではこの種のスキームを採用した¹⁾。採用したスキームは, 3 次精度上流コントロールボリューム・スキームの 1 つである QUICK (Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics) スキームである²⁾。このスキームで移流項を計算し, 一般化座標で基礎方程式 (Navier -

Stokes 方程式)を記述することにより、任意の境界形状を処理できるようにした³⁾。3次元の非圧縮粘性流の流れる曲がり円管(Circular-sectioned Bended Pipe)内の非定常流をシミュレーションすることができた。

2. 基礎方程式系について

非定常の非圧縮粘性流を記述する3次元の Navier-Stokes 方程式を無次元量の保存形で表現する。まず、下記のような流速の反変成分を定義する。

$$U = \xi_x u + \xi_y v + \xi_z w, \quad V = \eta_x u + \eta_y v + \eta_z w, \quad W = \zeta_x u + \zeta_y v + \zeta_z w. \quad (1)$$

この反変流速成分 U, V, W は速度の ξ, η, ζ 方向成分となるので、風上差分を導入する際の風向き判定に用いる。(1)式を用いると基礎式は簡潔に記述することができ、連続式と Navier-Stokes 方程式はつぎのように書ける^{4, 5)}。

$$\hat{q}_t + \hat{E}_\xi + \hat{F}_\eta + \hat{G}_\zeta = Re^{-1}(\hat{R}_\xi + \hat{S}_\eta + \hat{T}_\zeta), \quad (2)$$

ここで、各量は次のように定義されている。

$$\begin{aligned} \hat{q} &= J^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \quad \hat{E} = J^{-1} \begin{bmatrix} U \\ uU + \xi_x p \\ vU + \xi_y p \\ wU + \xi_z p \end{bmatrix}, \quad \hat{F} = J^{-1} \begin{bmatrix} V \\ uV + \eta_x p \\ vV + \eta_y p \\ wV + \eta_z p \end{bmatrix}, \quad \hat{G} = J^{-1} \begin{bmatrix} W \\ uW + \zeta_x p \\ vW + \zeta_y p \\ wW + \zeta_z p \end{bmatrix}, \\ \hat{R} &= J^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ g_1 u_\xi + g_2 u_\eta + g_3 u_\zeta \\ g_1 v_\xi + g_2 v_\eta + g_3 v_\zeta \\ g_1 w_\xi + g_2 w_\eta + g_3 w_\zeta \end{bmatrix}, \quad \hat{S} = J^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ g_2 u_\xi + g_4 u_\eta + g_5 u_\zeta \\ g_2 v_\xi + g_4 v_\eta + g_5 v_\zeta \\ g_2 w_\xi + g_4 w_\eta + g_5 w_\zeta \end{bmatrix}, \quad \hat{T} = J^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ g_3 u_\xi + g_5 u_\eta + g_6 u_\zeta \\ g_3 v_\xi + g_5 v_\eta + g_6 v_\zeta \\ g_3 w_\xi + g_5 w_\eta + g_6 w_\zeta \end{bmatrix}, \\ g_1 &= \xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2, \quad g_2 = \xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y + \xi_z \eta_z, \quad g_3 = \xi_x \zeta_x + \xi_y \zeta_y + \xi_z \zeta_z, \\ g_4 &= \eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2, \quad g_5 = \eta_x \zeta_x + \eta_y \zeta_y + \eta_z \zeta_z, \quad g_6 = \zeta_x^2 + \zeta_y^2 + \zeta_z^2. \end{aligned}$$

また、座標変換のセコビアン J は次のようである。

$$J = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \end{bmatrix}$$

3. 一般化座標への3D-QUICKスキームの適用

Navier-Stokes 方程式中の非線形項は短波長(高波数)成分を発生させ、この成分は Re 数が大きいはど散逸しにくい。その結果 aliasing-error が差分格子上に発生し、計算の不安定化を招いてしまう。この不安定性を抑制するため、移流項に対する1次あるいは2次精度の風上(上流)差分スキームがよく用いら

れたが、2階の微係数を持つ数値粘性項が含まれるため、本質的高 Re 数の計算は不可能であった。これに対して3次精度の風上差分スキームは高次精度のうえ、短波長成分に対して4階の微係数で表現される散逸効果をもつので、 Re 数依存性がきちんと安定に計算できる^{1), 6), 7)}。これらのスキームのうちで KawamuraスキームとQUICKスキーム(前者は差分で、後者はコントロール・ボリュームでそれぞれ3次精度をもつ上流スキーム)についてはその精度を参考文献7で述べているので参照されたい。

さて、(2)式での x -momentumを以下のように
コントロール・ボリューム(2次元で考察すると図
1のハッチ付の部分である)で積分する⁷⁾。すなわ
ち局所的座標 $(\gamma, \delta, \lambda)$ を差分格子のノード点
(i, j, k)で用いて

$$\gamma = \xi - \xi_i, \quad \delta = \eta - \eta_j, \quad \lambda = \zeta - \zeta_k$$

とおく。(2)式の x -momentumの非線形項のひとつを取り出すと次のようになる。

$$\begin{aligned} & \int_{-\Delta\xi/2}^{\Delta\xi/2} \int_{-\Delta\eta/2}^{\Delta\eta/2} \int_{-\Delta\zeta/2}^{\Delta\zeta/2} \frac{\partial}{\partial \xi} (J^{-1} u U) d\lambda d\delta d\gamma \\ &= \int_{-\Delta\eta/2}^{\Delta\eta/2} \int_{-\Delta\xi/2}^{\Delta\xi/2} \{ (J^{-1} u U)_{i+\frac{1}{2}, j, k} \\ & \quad - (J^{-1} u U)_{i-\frac{1}{2}, j, k} \} d\lambda d\delta \end{aligned}$$

ここで $(J^{-1} u U)_{i+\frac{1}{2}, j, k}$ について、3次精度上流コントロール・ボリュームスキームの3D-QUICK法を適用する。すなわち、

$$\begin{aligned} (J^{-1} u U)_{i+\frac{1}{2}, j, k} = & (J^{-1} U)_{i+\frac{1}{2}, j, k} \left\{ \frac{1}{2} (u_{i+1, j, k} + u_{i, j, k}) - \frac{\Delta\xi^2}{8} CURV u_{i+\frac{1}{2}, j, k}^{\xi} \right. \\ & \left. + \frac{\Delta\eta^2}{24} CURV u_{i+\frac{1}{2}, j, k}^{\eta} + \frac{\Delta\zeta^2}{24} CURV u_{i+\frac{1}{2}, j, k}^{\zeta} \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

ここで補正項(放物線内挿によるCurvature term : CURV項)については

$$CURV u_{i+\frac{1}{2}, j, k}^{\xi} = \begin{cases} (u_{i+1, j, k} - 2u_{i, j, k} + u_{i-1, j, k}) / \Delta\xi^2, & \text{if } J^{-1} U_{i+\frac{1}{2}, j, k} > 0 \\ (u_{i+2, j, k} - 2u_{i+1, j, k} + u_{i, j, k}) / \Delta\xi^2, & \text{if } J^{-1} U_{i+\frac{1}{2}, j, k} < 0. \end{cases}$$

図1. 変数配置とコントロール・ボリューム
(変数は全て同一点配置の Regular Grid)

$$CURVu_{i+\frac{1}{2},j,k}^{\eta} = \begin{cases} (u_{i,j+i,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j-1,k}) / \Delta \eta^2, & \text{if } J^{-1} U_{i+\frac{1}{2},j,k} > 0 \\ (u_{i+1,j+1,k} - 2u_{i+1,j,k} + u_{i+1,j-1,k}) / \Delta \eta^2, & \text{if } J^{-1} U_{i+\frac{1}{2},j,k} < 0. \end{cases}$$

$$CURVu_{i+\frac{1}{2},j,k}^{\zeta} = \begin{cases} (u_{i,j,k+1} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j,k-1}) / \Delta \zeta^2, & \text{if } J^{-1} U_{i+\frac{1}{2},j,k} > 0 \\ (u_{i+1,j,k+1} - 2u_{i+1,j,k} + u_{i+1,j,k-1}) / \Delta \zeta^2, & \text{if } J^{-1} U_{i+\frac{1}{2},j,k} < 0. \end{cases}$$

(4)

と表現する。格子網は u, v, w, U, V, W , p 一致の Regular Grid を用いているため、コントロール・ボリューム面 $(i+\frac{1}{2}, j, k)$ における $CURVu_{i+\frac{1}{2},j,k}^{\xi}$ は 2 次元で考えれば図 2 のような $U_{i+\frac{1}{2},j,k}$ の風向きによる 3 点の補間となる⁸⁾。直交方向の $CURVu_{i+\frac{1}{2},j,k}^{\eta}$, $CURVu_{i+\frac{1}{2},j,k}^{\zeta}$ についても風向きにより上流側を選択すればよい。

図 2. CURV 項の選択

4. 時間積分の手法

(2) 式の差分 (コントロール・ボリューム

での) 近似式を非線項に対しては (3)

式のような 3 次元の QUICK スキームを適

用し、次の手順で時間積分する。まず、この積分過程を 2 Step に分割 (Fractional Step 法) する。第 1 Step では、非線形項 (移流項) 安定化のため粘性項 (散逸項) の半分をとり入れ、2 次精度の Adams-Bashforth スキームにより時間方向を積分する。 $\mathbf{u} = (u, v, w)$ を流速ベクトル、 $\tilde{\mathbf{u}}$ を仮流速とすると、

$$(\tilde{\mathbf{u}}/J - \mathbf{u}^n/J)/\Delta t = \frac{3}{2} H^n - \frac{1}{2} H^{n-1} + \frac{1}{2} Re^{-1} Q(\mathbf{u}^n), \quad (5)$$

ここで

$$Q = \hat{R}_{\xi} + \hat{S}_{\eta} + \hat{T}_{\zeta}, \quad H = -(J^{-1} \mathbf{u} U)_{\xi} - (J^{-1} \mathbf{u} V)_{\eta} - (J^{-1} \mathbf{u} W)_{\zeta}$$

となる。次に第 2 Step は、第 1 Step で求めた $\tilde{\mathbf{u}}$ から次の時刻の $\mathbf{u}^{n+1}$ を圧力項と粘性項の残りの半分をとり入れて求める。このとき流速については implicit な解法を用いる。

$$(\mathbf{u}^{n+1}/J - \tilde{\mathbf{u}}/J)/\Delta t = -[(J^{-1} \xi_x p^{n+\frac{1}{2}})_{\xi} + (J^{-1} \eta_x p^{n+\frac{1}{2}})_{\eta} + (J^{-1} \zeta_x p^{n+\frac{1}{2}})_{\zeta}]^{n+1/2} + \frac{1}{2} Re^{-1} Q(\mathbf{u}^{n+1}) \quad (6)$$

ここで圧力に関しては、同時にこの第2ステップ内で

$$\nabla^2 p^{n+1/2} = \frac{\widetilde{D}}{\Delta t}, \quad (7)$$

ここで

$$\widetilde{D} = \xi_x \widetilde{u}_\xi + \eta_y \widetilde{v}_\eta + \zeta_y \widetilde{w}_\zeta.$$

の形の Poisson 型方程式をSOR法で解く*。これにより最終的に $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ が満たされて時刻 $t = n+1$ において、

$$D^{n+1} = 0. \quad (8)$$

となる。

5. 計算例について

前の Section までで述べた手法、簡単に言えば3D-Generalized QUICK法、を具体的流れ場の解析に適用する。解析対象は3次元の曲がり円管内の非圧縮性の非定常流れである。 Re 数は $Re = 10^3$ ならびに 5×10^4 の2通りを想定した。J. F. Tompsonらに⁹⁾ならい、次の形の tensor product form を用い断面の格子配置を決定した。すなわち

$$\underline{r}(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \phi_n\left(\frac{\xi}{I}\right) \psi_m\left(\frac{\eta}{J}\right) \underline{r}_{nm}.$$

ここで $\underline{r}_{nm} = \underline{r}(\xi_n, \eta_m)$: 4 corner 部(四角形の)に一致、

$$\phi_n\left(\frac{\xi}{I}\right) = \delta_{nm} \rightarrow \phi_1\left(\frac{\xi}{I}\right) = 1 - \frac{\xi}{I}$$

$$\text{and } \phi_2\left(\frac{\xi}{I}\right) = \frac{\xi}{I}.$$

これを初期形状(図3の上図)として、次に楕円形の Poisson 型方程式(次式)を Dirichlet 条件下でといた。周辺部にこれで格子を集中させる。

$$\alpha x_\xi x_\xi - 2\beta x_\xi \eta + \gamma x_{\eta\eta}$$

$$= -J^{-2} [x_\xi p(\xi, \eta) + x_\eta Q(\xi, \eta)],$$

$$\alpha y_\xi y_\xi - 2\beta y_\xi \eta + \gamma y_{\eta\eta}$$

$$= -J^{-2} [y_\xi p(\xi, \eta) + y_\eta Q(\xi, \eta)].$$

図3. 断面格子網形状の決定
(Initial and Computed Circular-sectioned Grid Configurations (31×31))

* (6)式の発散をとると、 $\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} \equiv D^{n+1} = 0$ より(7)式を得る。

ここで $\alpha = x_\eta^2 + y_\eta^2$, $\beta = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta$,

$$\gamma = x_\xi^2 + y_\xi^2.$$

p , Q は格子を集中させる重み係数.

格子点は周辺部に集中する。

これにより図3の下図が生成される。この 31×31 Grid を断面格子配置として採用した。

計算例として90度曲がった円管内の流れについて、曲率部分については $Re = 10^3$ の場合、 $De = 707$: $Re = 5 \times 10^4$ の場合、 $De = 35355$ というDean 数である。Grid 数は $31 \times 31 \times 31$ である。両方のケースとも無次元時刻 $T = 0 \sim 10$ 程度まで非定常解を進展させた(図4, 図5参照)。図4, 図5とも曲がった直後付近の断面の secondary velocities (二次流速) を3断面示している。 Re 数による流れの違い

図4. $Re = 10^3$ での非定常解
(Time-dependent Solutions for Bended Pipe Flow
at $Re = 10^3$ ($31 \times 31 \times 31$))

が明白に表現された。

計算にはプラズマ研電子計算機センターのFACOM VP-200を使用した。3次元計算のためCPU 時間を短縮する必要があり、PCG-like な解法のベクトル版を今後組み込む予定である。

図5. $Re = 5 \times 10^4$ での非定常解
(Time-dependent Solutions for Bended Pipe Flow
at $Re = 5 \times 10^4$ ($31 \times 31 \times 31$))

参 考 文 献

- 1) 武本行正：Convection Term の3次精度スキームの考察、『MHD モデルによるプラズマ閉じ込めの数値計算とその周辺』研究集会講演報告集，昭60文部省科研費エネルギー特別研究(核融合)「核融合理論における新手法開発のための研究」研究分担課題「MHD 数値計算の基礎研究」研究報告書(代表 牛島照夫)，112～140頁(1985, 12月)。
- 2) B. P. Leonard：A Convectively Stable, Third-Order Accurate Finite-Difference Method for Steady Two-Dimensional Flow and Heat Transfer, Proc. of the 2nd National Symp. on Numerical Properties and Methodologies in Heat Transfer, 211～226 (1983)。

- 3) Y. Takemoto and Y. Nakamura : A Three-Dimensional Incompressible Flow Solver, Lecture Notes in Physics, Vol. 264, 594~599 (Proc. of 10th Intl. Conf. on Numerical Methods in Fluid Dynamics, June, 1986, Beijing), (1986).
- 4) 武本行正 : 3次元非圧縮性粘性流解析コード, 第2回ベクトル計算機応用シンポジウム, 京都大学大型計算機センター, シンポジウム論文集 98~107頁 (1986, 3月) .
- 5) 武本行正, 中村佳朗 他 : 3次元 Generalized QUICK 法による非圧縮流解析, 日科技連 第7回流体力学における数値解析法シンポジウム講演報告集 181~188頁 .
- 6) 高見穎郎 : 第8章 乱流の数値解析, 乱流現象の科学(その解明と制御)・巽友正編 267~295頁 (東大出版会) (1986).
- 7) 武本行正, 阿部芳彦 : シミュレーション技法の進歩, 核融合研究 54巻6号, 652~663頁 (1985).
- 8) Y. Takemoto, Y. Nakamura, H. Yamabe, Y. Abe, and I. Minami : A Curvilinear Coordinate Method for the Solution of Incompressible Navier-Stokes Equations Using the Third-Order Upwind Differencing Scheme, Trans. JSIDRE, 121, 57~65 (1986).
- 9) J. F. Thompson, Z. U. A. Warsi, and C. W. Mastin : *Numerical Grid Generation* (Elsevier Science Publishing Co., Inc.). (1985).
- 10) Y. Takemoto and Y. Nakamura : *Solutions of Circular-Sectioned Bended Pipes Using a Three-Dimensional Generalized QUICK Scheme*, (Proc. of ISCFD-Sydney, August, 1987) to be published.