Collective interaction による電子の輻射*

法 橋 登** (日立中研)

The bremsstrahlung of an electron passing through a plasma under the cumulative influences of long range coulomb forces exerted by many other electrons in the medium is considered. In this process, the medium exchanges a definite amount of momentum and energy with the radiating electron in the form of a plasmon. The differential cross section is obtained for the process in which a photon is emitted in a given direction and energy while the radiating electron is deflected through a given angle after exciting or absorbing a plasmon. The processes may also be looked upon as the plasmon emission or absorption processes by anomalous Doppler effect if one imagines a moving 'atom' consisting of an electron and a plasmon. The radiation condition, which is the extension of the usual Cerenkov condition in the plasma, is found to be $|c/nv \pm \omega_p/kv \mp (k_p/k)\cos\theta_p| \leq 1$, where v is the velocity of the electron, n the refractive index, k the wave number of the emitted photon, (ω_p, k_p) the plasmon frequency and the wave number, and $\theta_p = \underline{u} \underline{k}_p$, the upper signs referring to the plasmon emission and the lower to the plasmon absorption.

脚註 * Radiation by Collective Interaction.

** N. Hokko (Hitachi Central Research Laboratory.)

0. はじめに

この報告では次のことを考える。

- a) プラズマ内の異常ドップラー効果
- b) チェレンコフ輻射におよぼす Collective interaction の影響
- c) 電子-プラズモン散乱による制御輻射

1. 異常ドップラー効果¹⁾

二個のエネルギー準位 E_0, E_1 ($E_1 > E_0$) 間の遷移によつて振動数 $\omega = (E_1 - E_0)/h$ の光を放出するアトム (たとえば電荷をもつ振動子) が屈折率 n の媒質中を速度 u で等速運動しているとき、 u となす角が θ であるような観測点でアトムをのぞむと振動数は

$$\omega = \frac{\omega_0 \sqrt{1 - (u/c)^2}}{1 - n(u/c) \cos \theta} \quad (1)$$

のように変化する。 $n > 1$ のとき、 $\omega > 0$ なる条件から分母の正、負に従つて ω_0 の符号、したがつてアトムの遷移の方向が定まる。 $\omega_0 < 0$ すなわち上向き遷移の起る θ の範囲：

$\cos \theta > C/nv$ は異常ドップラー効果の領域である。分母 = 0 はチェレンコフの輻射条件にほかならないが、この輻射ではアトムの内部エネルギーの変化は必要ではない (電荷は振動しなくてもよい)。

第 1 図

2. 異常ドップラー効果によるプラズマ振動の励起

いまアトム = (電子) + (プラズマ振動) と考え

上のレベル = (電子) + (n 個のプラズモン)

下のレベル = (電子) + ($n-1$ 個のプラズモン)

Collective interaction による電子の輻射

とみなせば、異常ドップラー効果の考えから、第2図のような過程が豫想される。

第 2 図

すなわち異常ドップラー効果の領域ではプラズマ振動の励起が、正常ドップラー効果の領域ではプラズマ振動の吸収が起ることが考えられる。あらかじめプラズマ振動が励起されていなければ、異常ドップラー効果による励起のみが行われる。

3. 輻射条件

上の考えを確認するために、第3図の過程につきエネルギーと運動量が保存されるかどうかをしらべてみる。保存されれば、保存の条件が輻射条件となる。まず初状態のエネルギー E_0 は電子の運動エネルギーのみであるから、

$$E_0 = mv^2/2 = p^2/2m \quad (2)$$

ただし $p = mv$ は電子の運動量である。

第 3 図

終状態では光子とプラズモンが励起されているからそのエネルギー E_F は

$$E_F = (\underline{p} - \hbar \underline{k} - \hbar \underline{k}_p)^2 / 2m + \hbar \omega + \hbar \omega_p \quad (3)$$

である。ただし $(\omega, \underline{k})$, $(\omega_p, \underline{k}_p)$ は光子およびプラズモンの振動数と波数ベクトルである。

$E_0 = E_F$ において $\hbar^2$ の項を省略すると、

$$\underline{k} \underline{v} + \underline{k}_p \underline{v} = \omega + \omega_p \quad (4)$$

さらに $\omega = kc/n$ ($n = n(\omega)$; 屈折率), $\underline{k} \underline{v} = \theta$, $\underline{k}_p \underline{v} = \theta_p$ とおくと次の輻射条件が得られる。

$$|\cos \theta| = \left| \frac{c}{nv} + \frac{\omega_p}{kv} - \frac{k_p}{k} \cos \theta_p \right| \leq 1 \quad (5)$$

または

$$\omega = \frac{\omega_p [(v/v_p) \cos \theta_p - 1]}{1 - n(v/c) \cos \theta} > 0, \text{ ただし } n^2(\omega) > 0 \quad (6)$$

ここに $v_p = \omega_p/k_p$. (5) で $\omega_p = k_p = 0$ とおくと

$$\cos \theta = c/nv \leq 1 \quad (7)$$

という通常の光の輻射に対する Cerenkov 条件となり、 $\omega = k = 0$ とおくと、プラズマ振動励起の条件：

$$\cos \theta_p = v_p/v \leq 1 \quad (8)$$

になる。(6)の輻射条件はまた次のようにかきかえることができる。

$$1 - n(v/c) \cos \theta \geq 0 \text{ のとき } (v/v_p) \cos \theta_p - 1 \geq 0 \quad (9)$$

従つて電子の速度範囲は

$$c/n > v > v_p \quad \text{または} \quad v_p > v > c/n \quad (10)$$

でなければならぬ。第4図の過程についても同様にして (4), (5), (6) に対応する次の関係が得られる。

$$\underline{k} \underline{v} - \underline{k}_p \underline{v} = \omega - \omega_p \quad (11)$$

Collective interactionによる電子の輻射

第 4 図

$$|\cos \theta| = \left| \frac{c}{nv} - \frac{\omega_p}{kv} + \frac{k_p}{k} \cos \theta_p \right| \leq 1 \quad (12)$$

$$\omega = \frac{\omega_p [1 - (v/u_p) \cos \theta_p]}{1 - n(v/c) \cos \theta} > 0, \quad \text{ただし } n^2(\omega) > 0 \quad (13)$$

(13) から

$$1 - n(v/c) \cos \theta \geq 0 \quad \text{のとき} \quad 1 - (v/u_p) \cos \theta_p \geq 0 \quad (14)$$

したがって

$$v > c/n, u_p \quad \text{または} \quad v < c/n, u_p \quad (14')$$

特に第 3 図の過程で

$$\frac{c}{nv} + \frac{\omega_p}{kv} - \frac{k_D}{k} < 0 \quad (15)$$

のとき、または第 4 図の過程で

$$\frac{c}{nv} - \frac{\omega_p}{kv} - \frac{k_D}{k} < 0 \quad (16)$$

のときは光子は電子の後方にも輻射される。(15), (16) で k_D は デバイの切断波数である。

4. 輻射の起る割合

こゝでは運動量 $\underline{P}_0$ の電子がプラズマ振動を励起して立体角 $d\Omega$ 内に散乱され運動量が $\underline{P}$ となり、同時に光子 $(\omega, \underline{k})$ が立体角 $d\Omega_k$ 内に輻射される過程が単位時間内に起る確率

$W(\underline{p}_0; \underline{p}, \underline{k})$ を計算する。 W は通常の二次の摂動論から次のように計算される。

$$w = \frac{2\pi}{\hbar} |K_{FO}|^2 \rho_E \quad (17)$$

$$K_{FO} = \frac{H_{OI} H_{IF}}{E_0 - E_I} + \frac{H_{OII} H_{IF}}{E_0 - E_{II}} \quad (18)$$

$$\rho_E = \frac{k^2 dk d\Omega}{(2\pi)^3} \frac{P^2 d\Omega}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\partial P}{\partial E_F} \quad (19)$$

(18)で添字 I, II は第 3 図の I, II の過程に対応している。またこの過程で励起されるプラズモン ($W_p, \underline{k}_p$) の運動量 $\hbar \underline{k}_p$ は運動量の保存則から

$$\hbar \underline{k}_p = \underline{p}_0 - \underline{p} - \hbar \underline{k} \quad (20)$$

によつて定まるから、

$$\left. \begin{aligned} E_0 &= p_0^2 / 2m \\ E_I &= (\underline{p}_0 - \hbar \underline{k}_p)^2 / 2m + \hbar \omega_p \\ &= (\underline{p} + \hbar \underline{k})^2 / 2m + \hbar \omega_p \\ E_{II} &= (\underline{p}_0 - \hbar \underline{k})^2 / 2m + \hbar \omega \\ E_F &= p^2 / 2m + \hbar \omega_p + \hbar \omega \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

したがつて

$$\frac{\partial p}{\partial E_F} = \frac{m}{p} \quad (22)$$

また 2)

$$H_{OI} = \left(\frac{2\pi\hbar}{\omega_p} \right)^{1/2} \left(\frac{e}{m} \right) \underline{\epsilon}_{kp} \cdot \underline{p}_0$$

$$H_{IF} = \left(\frac{2\pi\hbar}{\omega} \right)^{1/2} \left(\frac{e}{m} \right) \underline{\epsilon}_{k\mu} \cdot (\underline{p} + \hbar \underline{k}) / n(\omega)$$

$$H_{\Pi O} = \left(\frac{2\pi\hbar}{\omega}\right)^{1/2} \left(\frac{e}{m}\right) \underline{\varepsilon}_{k\mu} \cdot \underline{p}_0 / n(\omega) \quad (23)^*$$

$$H_{\Pi F} = \left(\frac{2\pi\hbar}{\omega_p}\right)^{1/2} \left(\frac{e}{m}\right) \underline{\varepsilon}_{kp} \cdot (\underline{p}_0 - \hbar \underline{k})$$

$$k_{FO} = -\left(\frac{e}{m}\right)^2 \left(\frac{2\pi\hbar}{\omega_p}\right)^{1/2} \left(\frac{2\pi\hbar}{\omega}\right)^{1/2} \sum_{\mu} \left\{ \frac{(\underline{\varepsilon}_{kp} \cdot \underline{p}_0) (\underline{\varepsilon}_{k\mu} \cdot (\underline{p} + \hbar \underline{k}) / n(\omega))}{\hbar \omega_p + \hbar \underline{k} \cdot \underline{p} / m + \hbar^2 k^2 / 2m} \right. \\ \left. + \frac{(\underline{\varepsilon}_{k\mu} \cdot \underline{p}_0) (\underline{\varepsilon}_{kp} \cdot (\underline{p}_0 - \hbar \underline{k}) / n(\omega))}{\hbar \omega - \hbar \underline{k} \cdot \underline{p}_0 / m + \hbar^2 k^2 / 2m} \right\}$$

(23), (24)で $\underline{\varepsilon}_{kp}$ は $\hbar \underline{k} \cdot \underline{p} = \underline{p}_0 \cdot \underline{p} - \hbar \underline{k} \cdot \underline{p}$ 方向の単位ベクトル、 $\underline{\varepsilon}_{k\mu}$ ($\mu = 1, 2$) は光子の偏光ベクトルである。

※ 文献2)の相互作用ハミルトニアンは次のように修正してある。透磁率が1とみなせる磁場のない等方的なプラズマ内の輻射場のエネルギーは、場のベクトルポテンシャルを $\underline{A}$ 、誘電率を ε とすれば

$$W = \frac{1}{8\pi} \int (\varepsilon E^2(\underline{x}) + H^2(\underline{x})) d\underline{x} \\ = \frac{1}{8\pi} \int \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} \right)^2 + (\nabla \times \underline{A})^2 d\underline{x}$$

である。Wを調和振動子の集団の形

$$W = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2)$$

にかきなおすには

$$\underline{A}(\underline{x}) = \sum_{\underline{k}} \left(\frac{4\pi c^2}{n^2} \right)^{1/2} \underline{\varepsilon}_{k\mu} q_{k\mu} e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} \quad (n^2 = \varepsilon)$$

と展開すればよい ($p_{k\mu} = -\dot{q}_{k\mu}$, $\omega^2 = c^2 k^2 / n^2$)。さらに

$$q_{k\mu} = (\hbar/2\omega)^{1/2} [a_{k\mu} + a_{-k\mu}^*]$$

によって再度量子化を行い、電子との相互作用ハミルトニアン

$$\frac{e^2}{mc^2} \underline{p} \cdot \underline{A}(\underline{x})$$

をかきなおして状態 $0 \sim I$ 間および $0 \sim II$ 間の行列要素を求めれば (23) の $H_{\Pi F}$, $H_{\Pi O}$ が得られる。

第 5 図にベクトル $\underline{p}_0, \underline{p}, \underline{k}, \underline{\varepsilon}_{k1}, \underline{\varepsilon}_{k2}$ 相互間の幾何学的関係を示す。 $\underline{\varepsilon}_{k1}$ は $\underline{k} - \underline{p}_0$ 面内にとつた。このとき、(24) の各因子は

第 5 図

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon}_{kp} \underline{p}_0 &= \frac{(\underline{p}_0 - \underline{p} - \hbar \underline{k}) \underline{p}_0}{|\underline{p}_0 - \underline{p} - \hbar \underline{k}|} \\ &= \frac{p_0^2 - p_0 p \cos \theta - \hbar k p_0 \cos \theta_0}{(|p_0^2 + p^2 - 2 p_0 p \cos \varphi - 2 (\hbar k p_0 \cos \theta_0 - \hbar k p \cos \theta) + \hbar^2 k^2|)^{1/2}} \equiv \alpha \end{aligned} \quad (25)$$

$$\sum_{\mu \rightarrow ku} \underline{\varepsilon}_{ku} (\underline{p} + \hbar \underline{k}) = \sum_{n \rightarrow ku} \underline{\varepsilon}_{ku} \underline{p} = p \sin \theta (\cos \phi + \sin \phi) \quad (26)$$

$$\sum_{\mu \rightarrow ku} \underline{\varepsilon}_{ku} \underline{p}_0 = p_0 \sin \theta_0 \quad (27)$$

$$\hbar (\underline{\varepsilon}_{ku} \underline{k}) = \frac{\hbar (p_0 k \cos \theta_0 - p k \cos \theta - \hbar k^2)}{(|p_0^2 + p^2 - 2 (p_0 p \cos \varphi - \hbar k p_0 \cos \theta_0 + \hbar k p \cos \theta) + \hbar^2 k^2|)^{1/2}} \equiv \beta \quad (28)$$

$$\varphi = \underline{p}_0 \underline{p} = \sin \theta_0 \sin \theta \cos \phi + \cos \theta_0 \cos \theta \quad (29)$$

となる。いま w のかわりに衝突断面積

$$d\sigma_{\underline{p}, \underline{k}} = \frac{m}{p_0} w(\underline{p}_0; \underline{p}, \underline{k}) \quad (30)$$

を用いれば上の結果は次のようにまとめられる。

$$\begin{aligned} d\sigma_{\underline{p}, \underline{k}} &= \frac{e^2}{(2\pi)^3} \left(\frac{p}{v_0} \right) \left(\frac{e}{m} \right)^2 \frac{k^2 dk d\Omega_k d\Omega}{E_p E n^2(E)} \\ &\times \left[\frac{\alpha^2 p^2 \sin^2 \theta (\cos \phi + \sin \phi)^2}{E_p + \frac{\hbar k p}{m} \cos \theta + \hbar^2 k^2 / 2m} \right. \\ &+ \frac{2\alpha(\alpha - \beta) p_0 p \sin \theta_0 \sin \theta (\cos \phi + \sin \phi)}{(E_p + \frac{\hbar k p}{m} \cos \theta + \hbar^2 k^2 / 2m) (E - \frac{\hbar k p}{m} \cos \theta + \hbar^2 k^2 / 2m)} \\ &+ \left. \frac{p_0^2 \sin^2 \theta_0 (\alpha - \beta)}{E - \frac{\hbar k p}{m} \cos \theta_0 + \hbar^2 k^2 / 2m} \right] \quad (31) \end{aligned}$$

Collective interactionによる電子の輻射

ただし $E_p = \hbar\omega_p$, $E = \hbar\omega$ で、 α, β は (25), (28) にあたえられている。第 4 図の過程についても同様に計算できるが、結果は (31) の [] 内で $E_p \rightarrow -E_p$ とおきかえただけのちがいとなる。プラズマ内にすでに $n(\underline{k}_p)$ 個のプラズモンが励起されているとき、第 3 図の過程に対する断面積を $d\sigma_{\underline{p}, \underline{k}}^+$, 第 4 図に対するそれを $d\sigma_{\underline{p}, \underline{k}}^-$ とすれば、電子がプラズマ振動を励起または吸収して光子 $\underline{k}$ を輻射する過程の断面積は

$$d\sigma_{\underline{p}, \underline{k}} = (n(\underline{k}_p) + 1) d\sigma_{\underline{p}, \underline{k}}^+ + n(\underline{k}_p) d\sigma_{\underline{p}, \underline{k}}^- \quad (32)$$

となる。ただしプラズモンの運動量 $\hbar k_p$ は $\underline{p}_0, \underline{p}, \underline{k}$ をあたえたとき、

$$\begin{aligned} \hbar k_p &= \underline{p}_0 - \underline{p} - \hbar \underline{k} \\ (\hbar k_p)^2 &= p_0^2 + p^2 + (\hbar k)^2 - 2\hbar p_0 k \cos \theta_0 + 2pk \cos \theta \\ &\quad - 2p_0 p (\cos \theta_0 \cos \theta + \sin \theta_0 \sin \theta \cos \phi) \end{aligned} \quad (33)$$

で定まる。

5. む す び

(31) の表式から、具体例について数値をあたつてみることや、 $dQ_k dQ$ に関する積分計算から光子のエネルギー Spektrum を求めることは面倒であるが、電子-イオンの個別的散乱による制動輻射の過程と比較することは興味がある。この過程は (23) の H_{OI} が

$$H_{OI} = \left(\frac{2\pi\hbar}{\omega_p} \right)^{1/2} \left(\frac{e}{m} \right) \underline{\varepsilon}_{kp} \cdot \underline{p}_0 \rightarrow \frac{4\pi z e^2}{k_p^2} (k_p > k_D)$$

となる過程であるから、電子のプラズマ振動励起によるエネルギー損失が、個別散乱による損失に対して重要になる条件のもとでは、いま考えている輻射過程は、普通の制動輻射の過程に対して重要になる筈である。この過程は輻射過程としてみれば電子-プラズモン衝突による制動輻射であるが、プラズマ振動の励起、または電子のエネルギー損失という立場からみれば、異常ドップラー効果によるプラズモン励起の過程になる。この場合にはいままでの計算で光子とプラズモンの役割を入れかえ、 $W(\underline{p}_0, \underline{p}, \underline{k})$ のかわりに $W(\underline{p}_0; \underline{p}, \underline{k}_D)$, または $W(\underline{p}_0; k_D) = \sum_{\underline{p}} W(\underline{p}_0; \underline{p}, \underline{k}_D)$, $W(\underline{p}_0; \underline{p}) = \sum_{\underline{k}_D} W(\underline{p}_0, \underline{p}, \underline{k}_D)$ を計算することが重要になる。

さらに、チェレンコフ放射に及ぼす Collective interaction の影響という見方からすれば輻射条件が

$$\frac{c}{nv} \leq 1 \quad \text{したがって} \quad n > 1$$

から

$$\left| \frac{c}{nv} + \frac{\omega_p}{kv} - \frac{k_p}{k} \cos \theta_p \right| \leq 1 \quad \text{プラズマ振動励起のとき}$$

$$\left| \frac{c}{nv} - \frac{\omega_p}{kv} + \frac{k_p}{k} \cos \theta_p \right| \leq 1 \quad \text{プラズマ振動吸収のとき}$$

に変化するということもできる。

なお、(23)式の註で触れた再度量子化の formalism を、磁場のある、非等分プラズマの場合に拡張しておくとう便利であるが、このときはローレンツ条件が厄介である。

尚 Anomalous Doppler effects については北尾一夫氏に文献を教えていただき又いろいろ検討して頂いた。

参 考 文 献

- 1) V. L. Ginzburg, Soviet Phys, Usp. 2, 874 (1960)
- 2) D. Bohm and D. Pines, Phys. Rev. 82, 625 (1951) および 92, 609 (1953), S. Hayakawa and N. Hokkyo, Prog. Theor. 15, 193 (1956)