Binary Correlation Corrections for the Dielectric Constant of Electron Plasma

市川 芳彦 佐藤 正知 (日大理工)*

§ 1. 序 論

高温プラズマ内に生ずるプラズマ振動の問題について、特に興味があるのは、その減衰過程、或いは 励起過程の機構である。減衰についていえば、macroscopic な流体力学的取扱いは、減衰は衝突過程によって生ずる 粘性などのために生ずる と考えられるが、microscopic な統計力学的取扱いは、粒子間の衝突効果を完全に無視したいいわゆる Boltzmann-Vlasov 方程式から、プラズマ振動に対する Landau damping が導かれている⁽¹⁾。然し、Landau damping の物理的内容については、しばしば論争の種になっている。このように色々な意見が出てくる原因は、一つには Landau による理論の展開が「数学的」であつた事と、もう一方で、「物理的」には、Boltzmann 方程式において衝突項を無視する極限に対する流体力学的類推が余りに直観的に用いられている事という二つの理由によるといえよう。

このような事情があるので、Boltzmann-Vlasov 方程式に、衝突項を考慮した場合のプラズマ振動の減衰の問題を分析する事が、重要であると考えられた。例えば、Lenard と Bernstein⁽²⁾ は、衝突項として

$$\frac{\partial f}{\partial t_{\text{coll}}} = \beta \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot [\mathbf{v} f_1 + u_0^2 \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}}] \quad 1)$$

$$\beta = g\omega_p \quad g^2 = (e^2/kT)^3 n$$

の形を用いて、プラズマ振動の減衰を論じた。彼等によれば、プラズマ振動の減衰係数 r は、 $\beta = 0$ の場合には Landau damping r_L

$$r = r_L = \left(\frac{\pi}{8}\right)^{1/2} \left(\frac{k_d}{k}\right)^3 \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{k_d}{k}\right)^2\right) \cdot \omega_p \quad 2. a)$$

であたえられ、 $\beta \neq 0$ の場合には

$$r = \beta/2 \quad 2. b)$$

脚註* Y. H. Ichikawa, M. Sato (Department of Physics Faculty of Engineering Nihon University.)

Binary Correlation Corrections for the Dielectric Constant of Electron Plasma

であたえられる。という結論が導かれた。処で、2-a) をみてもすぐわかるように、Landau damping γ_L は、 $k \rightarrow 0$ の極限で 0 になるが、 k の巾級数としてはあらず事はできない。Lenard-Bernstein は、2.b) を導く際に、積分すべき量を k の巾級数に展開しているため、Landau damping をあたえる pole からの寄与が、全く洗い流されてしまったのである。我々は、前の報告³⁾ において、彼等の計算についてその点を注意すれば、 $\beta \neq 0$ の場合、2.b) の代りに

$$\gamma = \gamma_L + \frac{\beta}{2} \quad 3)$$

が得られる事を明らかにした。即ち、1) 式の形の衝突項を考慮すると、プラズマ振動の減衰は、Landau 減衰と衝突減衰の両方の減衰過程からの寄与を含む。

3) によれば、プラズマ振動は、 $k = 0$ の極限でも、衝突過程の寄与によつて減衰する事になるが、これは、物理的に考えると不合理である。Lenard-Bernstein は、クーロン相互作用による小角散乱の効果を、1) のような Fokker-Planck 型の衝突項であらわしたのであるが、衝突項に対するこのような取扱いが意味をもつのは、波数領域でいうと、精々、 $k \geq k_D$ の範囲であつて、 $k \ll k_D$ の領域に対しては、1) の型の衝突項は適用できない。長波長領域における粒子間の衝突効果（というより相関効果とよぶ方が適切である）については、我々の一人が B-B-G-K-Y の階級方程式に基づいて研究し、粒子間の相関効果が、長波長の極限 ($k \rightarrow 0$) では、プラズマ振動に対して

$$\gamma_{\text{corr}} = 0.03 g (k/k_d)^2 \cdot \omega_p \quad 4)$$

であたえられる減衰係数を生ずることを示した。然し、この結果を導く際にも、Bernstein 等と同様、 k の小さい領域での漸近展開を用いているため、必然的に Landau damping の寄与を捨ててしまっている。そこで、前の報告では、Lenard-Bernstein の研究に対する我々の批判の筋道を辿つてみると、粒子間の相関効果を正しく考慮すると、プラズマ振動の減衰係数は、3) で $\beta/2$ を 4) でおきかえて

$$\gamma = \gamma_L + \gamma_{\text{corr}} \quad 5)$$

であたえられるであろう、という予測を述べた。この論文の目的は、実際にこの予想が正しい事を示すことである。

§ 2. 相関効果を考慮したプラズマの電媒常数

外部からの攪乱に対するプラズマの response は、プラズマの電媒常数がわかれば完全に定められるし、プラズマの電媒常数から、プラズマ内に生じ得る波動の固有振動数、その減衰係数等が求められる。実際、電子系の多体問題を電媒質の理論として定式化する事が、Nozieres-Pines 等の一連の研究⁵⁾において進められ、問題の物理的内容を理解し、従来の各種の近似の関係等についての理解を助けるために特に有効であることが知られている。それ故、我々もここで「プラズマ振動の減衰係数」という特定の問題から、もつと一般的な「プラズマの電媒常数の決定」という問題に切りかえよう。

プラズマの電媒常数が求められた場合に、プラズマ振動の固有振動数 ω_0 及びその減衰係数 γ がどのようにして定められるかという点については、最近 Nakajima⁹⁾によつて明快な理論が展開されている。電媒常数 ϵ が

$$\epsilon(\mathbf{k}, \omega) = \epsilon_r(\mathbf{k}, \omega) + i\epsilon_i(\mathbf{k}, \omega) \quad (6)$$

としてあたえられるならば、プラズマ振動の固有振動数 ω_0 は

$$\epsilon_r(\mathbf{k}, \omega_0) = 0 \quad (7)$$

の根として定まり、その減衰係数 γ は

$$\gamma = \epsilon_i(\mathbf{k}, \omega_0) / \partial \epsilon_r(\mathbf{k}, \omega_0) / \partial \omega_0 \quad (8)$$

であたえられる。粒子間の相関効果を取り入れた電媒常数を求める事ができれば、8)からプラズマ振動の減衰係数を定める事ができる。

相関効果を取り入れた電媒常数を求めるために、粒子間の相関効果を考慮して Ichikawa によつて導かれた方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \right) f_1(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t) + \frac{e}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \{ \mathbf{E}^*(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t) f_0(\mathbf{v}) \} = 0 \quad (9)$$

$$\mathbf{E}^*(\mathbf{k}, \mathbf{v}; t) = \mathbf{E}_{vi}(\mathbf{k}; t) + \delta \mathbf{E}(\mathbf{k}, \mathbf{v}; t) \quad (10)$$

$$\mathbf{E}_{vi}(\mathbf{k}; t) = -i\mathbf{k} (4\pi e/k^2) \cdot \int f_1(\mathbf{k}, \mathbf{v}'; t) d\mathbf{v}' \quad (11)$$

$$\delta \mathbf{E}(\mathbf{k}, \mathbf{v}; t) = i \left(\frac{e^3}{\kappa T} \right) \frac{1}{k^2} \int d\omega e^{-i\omega t} \int d\mathbf{i} \frac{\mathbf{i}}{\ell^2} \cdot \frac{G(\mathbf{k}-\mathbf{i}, \mathbf{i}; \omega; \mathbf{v})}{\Delta(\mathbf{k}-\mathbf{i}, \mathbf{i}; \omega; \mathbf{v})} \cdot \int f_1(\mathbf{k}, \mathbf{v}^1; \omega) d\mathbf{v}' \quad (12)$$

を出発点にしよう。\$\delta \mathbf{E}\$が、Vlasov の方程式にあらわれる平均の電場 \$\mathbf{E}_v\$に対する、粒子間の相関効果による補正項である。函数\$G\$が二個の粒子の間の相関をあらわす量で、

$$G(\mathbf{k}-\mathbf{i}, \mathbf{i}; \omega; \mathbf{v}) = i \int d\mathbf{v}' f_0(\mathbf{v}') \delta_+(\mathbf{k}-\mathbf{i}) \cdot \mathbf{v} - \mathbf{i} \cdot \mathbf{v}' \cdot$$

$$[(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \chi(\mathbf{i}) + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}')] \quad (13)$$

$$\chi(\mathbf{i}) = \frac{-k_d^2 / n}{\ell^2 + k_d^2} \quad (14)$$

$$\delta_+(x) = \int_0^\infty d\tau e^{ix\tau} \quad (15)$$

であたえられる。函数\$\Delta(\mathbf{k}-\mathbf{i}, \mathbf{i}; \omega; \mathbf{v})\$は、今着目している二個の粒子 (速度\$\mathbf{v}\$と速度\$\mathbf{v}'\$をもっている)の間の相互作用が、その間に介在する才三の粒子によつて screen される効果を示す量で、

$$\Delta(\mathbf{k}-\mathbf{i}, \mathbf{i}; \omega; \mathbf{v}) = 1 - i \frac{4\pi e^1}{m} \frac{1}{\ell^2} \int \delta_+(\omega - (\mathbf{k}-\mathbf{i})\mathbf{v} - \mathbf{i}\mathbf{v}') \mathbf{i} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f_0(\mathbf{v}') d\mathbf{v}' \quad (16)$$

で定義される。\$\delta_+\$-函数に対する積分表示(15)を用いて計算すると

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{k}-\mathbf{i}, \mathbf{i}; \omega; \mathbf{v}) &= 1 + \frac{k_d^2}{\ell^2} + \\ &+ i \frac{\omega_p^2}{4} \sqrt{\pi} \cdot \left(\frac{2m}{\kappa T \ell^2} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{m}{2\kappa T} \frac{(\omega - (\mathbf{k}-\mathbf{i}) \cdot \mathbf{v})^2}{\ell^2} \right] \cdot \\ &(\omega - (\mathbf{k}-\mathbf{i}) \cdot \mathbf{v}) \cdot \text{Erf} \left(i \sqrt{\frac{m}{2\kappa T \ell^2}} (\omega - (\mathbf{k}-\mathbf{i}) \cdot \mathbf{v}) \right) \\ &+ i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega - (\mathbf{k}-\mathbf{i}) \cdot \mathbf{v}}{\omega_p} \left(\frac{k_d}{\ell} \right)^3 \exp \left[-\frac{m}{2\kappa T} \frac{(\omega - (\mathbf{k}-\mathbf{i}) \cdot \mathbf{v})^2}{\ell^2} \right] \quad (17) \end{aligned}$$

となる。

9)式で、右辺には、衝突項があるがその寄与は $k \ll k_d$ では無視できる。即ち、粒子間の相関効果は、いわゆる衝突項と、プラズマ内の平均電場への補正項に分離されるが、長波長領域では、平均電場の補正項に比べて衝突項は無視できる。さて、9)式から、誘電常数を求める事は、Vlasov 方程式から誘電常数を求める事と全く同様にすれば良いから、Nakajima の論文に従つてかんじようすれば、次のような結果を得る。

$$\epsilon(k, \omega) = \epsilon_r(k, \omega) + i\epsilon_i(k, \omega) \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_r(k, \omega) = & 1 - \frac{4\pi e^2}{m} \frac{1}{k^2} p \int \frac{1}{k \cdot v - \omega} k \cdot \frac{\partial}{\partial v} f_0(v) dv \\ & + \frac{4\pi e^2}{m} \frac{1}{k^2} p \int \frac{1}{k \cdot v - \omega} \cdot \frac{\partial}{\partial v} \{ K_r(k, v; \omega) f_0(v) \} dv \\ & - \frac{4\pi e^2}{m} \frac{1}{k^2} \pi \int \delta(k \cdot v - \omega) \frac{\partial}{\partial v} \{ K_i(k, v; \omega) f_0(v) \} dv \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_i(k, \omega) = & -\frac{4\pi e^2}{m} \frac{1}{k^2} \int \delta(k \cdot v - \omega) k \cdot \frac{\partial}{\partial v} f_0(v) dv \\ & + \frac{4\pi e^2}{m} \frac{1}{k^2} \pi \int \delta(k \cdot v - \omega) \frac{\partial}{\partial v} \{ K_r(k, v; \omega) f_0(v) \} dv \\ & + \frac{4\pi e^2}{m} \frac{1}{k^2} p \int \frac{1}{k \cdot v - \omega} \frac{\partial}{\partial v} \{ K_i(k, v; \omega) f_0(v) \} dv \end{aligned} \quad (20)$$

但し、

$$K(k, v; \omega) = \left(\frac{e^2}{\kappa T} \right) \frac{1}{2\pi^2} \int di \frac{i}{\ell^2} \frac{G(k-i, i; \omega; v)}{\Delta(k-i, i; \omega; v)} \quad (21)$$

で K_r, K_i はそれぞれ K の実数部及び虚数部である。

ϵ_r, ϵ_i のそれぞれのオ一項は、Vlasov の方程式の解から得られる部分で、多体問題の方の言葉でいえば、random phase の近似 (R.P.A) の範囲で求められる電媒常数 $\epsilon^{R.P.A}$ である。 k についての漸近展開が許されない項は 19) 20) で $\delta(k \cdot v - \omega)$ を含む項である。実際に 20) のオ一項は

$$\epsilon_i^{(1)}(k, \omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{k_d}{k} \right)^3 \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{k_d}{k} \right)^2 \right) \quad (22)$$

Binary Correlation Corrections for the Dielectric Constant of Electron Plasma

となる。 ϵ_r のオ一項は、 $k \rightarrow 0$ の近似で

$$\epsilon_r^{(1)}(k, \omega) = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 \quad (23)$$

という。普通に用いられているプラズマの電媒常数をあたえる。22)23) を用いて 8) に代入すると、

$$\gamma^{(1)} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \left(\frac{k_e}{k}\right)^3 \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{k_d}{k}\right)^2\right) \omega_p \quad (24)$$

が結果する。

§ 3. プラズマ振動の減衰係数

19) 20) にあたえられた ϵ_r ϵ_i を用いて、(7) 及び (8) から ω_c , γ を計算すれば、粒子間の相関効果を考えたプラズマ振動の振動数と減衰係数が求められる。

論文 4) では、 $k \rightarrow 0$ に対する漸近展開を用いたために $\delta(k \cdot v - \omega)$ を含む項の寄与を全部落していたが、その他に、計算の遂行のために、オ三の粒子の存在にする二個の粒子の間の相互作用の screening の効果を無視して $\Delta(k-i, i; \omega; v) \sim 1$ とおいた。 $\Delta \sim 1$ とおけば、20) のオ三項は

$$\begin{aligned} \epsilon_i^{(3)}(k, \omega) = & \pi (\omega_p^2 / \hbar) (4\pi e^2 / \kappa T) \cdot \frac{1}{8\pi^3} \int d\mathbf{i} \frac{(\mathbf{i} \cdot \boldsymbol{\theta})}{\ell^2} \int d\mathbf{v} f_0(\mathbf{v}) \\ & \cdot \frac{1}{(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2} \int d\mathbf{v}' \delta(\omega - (\mathbf{k} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{i} \cdot \mathbf{v}')) \{ (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{v}) \chi(\mathbf{i}) \\ & + (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{v}') \chi(\mathbf{k} - \mathbf{i}) \} f_0(\mathbf{v}') d\mathbf{v}' \end{aligned} \quad (25)$$

となる。この表式と、論文 4) の 93) 式をくらべてみれば、 r_{corr} は將にこの項の寄与であることがわかる。この項を計算すると

$$\epsilon_i^{(3)}(k, \omega) \approx 0.06 \left(\frac{k}{k_d}\right)^{2.2} g \quad (26)$$

を得る。20) のオ二項は explicit には計算していないが、その形をみてもわかるように、それは一般に $F(k/k_d)$ を k の任意の函数として

$$\epsilon_i^{(2)}(k, \omega) \approx F(k/k_d) \epsilon_i^{(1)} g \quad (27)$$

とかけるであろう。従つて結局、粒子間の相関効果を考慮すると、プラズマ振動の減衰係数は

$$r = \left\{ 1 + F(k)g \right\} r_L + 0.03g \cdot \left(\frac{k}{k_d} \right)^2 \omega_p \quad (28)$$

であたえられる事がわかる。それ故、論文 4) で示したように、 k の小さい領域では g について高次である相関効果による減衰過程の方が、Landau の減衰過程より本質的になることが確かめられた。このように、或る波数領域では相関パラメーター g について高次の項の方が大きな寄与をもつようになるという事は、クーロン相互作用による長距離相関の効果の特殊性のあらわれである。

クーロン相互作用の長距離相関の効果のもつと本質的な特徴は、17) 式であらわされる二個の粒子間の相互作用を screen する才三の粒子の影響である。此の論文では、前の報告で述べた予測が実際正しい事を示す議論の筋道を明らかにする事を目的としたので、そのような粒子間の相互作用の遮弊効果は一切無視して $\Delta \sim 1$ とおいて 25) 式を導いたが、実は、このように才三の粒子の存在の影響を無視する事は、乱暴の極みなのである。Ichikawa-Sasakura⁷⁾ によつて論じられているように、 $(\omega - (\mathbf{k} - \mathbf{i}) \cdot \mathbf{v})^2 \gg (\kappa T/m)\ell^2$ の場合には 17) の Δ は

$$\Delta \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - (\mathbf{k} - \mathbf{i}) \cdot \mathbf{v})^2} + i \Delta_i \quad (29)$$

となり、 $\Delta_r = 0$ が満足されるような波数の領域に対して二個の粒子の間のクーロン相互作用は screen されないで、むしろ enhance される事になる。このような相互作用の enhancement は、プラズマ内にプラズマ振動の wake が励起されることを意味する。このような相互作用の共鳴的 enhancement が、プラズマの電媒常数の性質にどのような影響を持つか、くわしく調べなければならない。この点に関する検討は次の機会にゆずる。

- 1) L. Landau : J. of Phys USSR 10 (1946), 25
- 2) A. Lenard and Ira. Bernstein : Phys. Rev. 112 (1958), 1456
- 3) 佐藤, 市川.: 核融合研究 6 (1961), 37
- 4) Y. H. Ichikawa : Prog. Theoret. Phys. 24 (1960), 1083
- 5) P. Nozieres and D. Pines : Nuovo Cimento 9 (1958) 470,
Phys. Rev. 109 (1958) 762
- 6) 中 嶋 : 物性論研究 2集8巻 (1960) 340
- 7) Ichikawa, Sasakura : Prog. Theoret. Phys.