非線形物理から見たプラズマ

羽 鳥 尹 承

(名古屋大学プラズマ研究所)

(1988年7月20日受理)

Potentially Common Nonlinear Physics for Plasmas and Other Matter

Tadatsugu Hatori

(Received July 20, 1988)

Abstract

This is a brief review of the concept of multifractal which is successfully applied to the Rayleigh-Bénard convection and the intermittency of turbulent flow, and of the phasedynamics applicable to selforganization phenomena based upon the reaction-diffusion equation.

Keywords :

multifractal, phasedynamics, nonlinear plasma physics, chaos, turbulence, selforganization,

1. はじめに

プラズマ科学は膨大な領域にまで成長し、従ってプラズマの総てを一人で研究しようとする時代は過去のものとなった。プラズマ物理は、プラズマ科学の物理的側面を強調する人々によって築き上げられてきたが、「物理」の範囲を広げ過ぎたこともあり、プラズマ物理と言えども一つの専門分野としては広すぎる時代にもなっている。ここでは、さらに「物理」を「基礎物理」にまで限定し、「プラズマ基礎物理」としての二つの観点を示すことから始める。

(1) Complexity

この用語は日本語の適切な訳はまだ無いと思うが、複雑とか複合とかの意味を含めている概念と思う。一つ一つは基本的で良く知られた要素が多数集って示す性質のことである。例としてプラズマは、電磁的

相互作用をする粒子の集りで、それが多数集まって complexity を示す。一方、この例のような自由度の多さだけでなく、時間ステップの多さも complexity を生む原因となっている。カオスのように、自由度は小さく時間の1ステップは単純であっても、長時間ふるまいにおいて complexity を示す。

(2) Physics of non-

この英語は個人的創作によるものである。ある標準的な系があってその標準に「非らざるもの」を表わすとき英語では non- となる。例えば, nonlinear, nonequilibrium, nonuniform, などである。

本講座の主題である非線形物理は、物理のほとんどの理論を含んでしまっているようにも思えてくる。現代物理として線形計算を主題とした理論はむしろ少ないのではないだろうか。しかしながら、ソリトンに代表される「いわゆる非線形物理」の輪郭はむしろ明確である。表1に非線形物理を分類するための表を示す。

横の分類は現象別分類である。現象を「乱れ」

に関するものと「構造」に関するものに大別し

た。「乱れ」の中にはカオスと乱流が含まれる。

カオスと乱流の区別は自由度の違いである。

「構造」はソリトンと自己組織化を含む。ソリトンの他に広義の渦なども同類として含める。

いずれも散逸の無い極限でも存在し得る空間的

局所構造という点で共通しているが、一方自己

組織化は散逸が不可欠である。縦の分類は物質

別の分類である。プラズマは実験室プラズマと

宇宙プラズマに分かれる。閉じ込めプラズマに

とって重要な MHD は中性流体方程式と共通点が多い。プラズマは流体力学から多くの概念を受け継いでいるし、現在も多くのものを学んでいる。このような事情を考えると、基礎物理的側面だけで見るなら、実験室プラズマ、宇宙プラズマ、流体系、という物質の壁は取りはずすべきものと思われる。

2, 3 節では、「乱れ」と「構造」に関する興味ある非線形概念を一例ずつ紹介する。従来のプラズマ物理では未だ遭遇していない概念であるが、しかし将来はプラズマに適用される可能性もあり、あるいはプラズマにとって伝統的な概念とあいまって広い概念へと発展する可能性も備えていると筆者は考えている。プラズマ非線形物理の「芽」となる可能性のあるものを出すのが本講座の目標であろう。「たね」を自分のポケットの中にしまっておかず、白日の下にさらせば、「芽」が出始めるかも知れない。第6講は他の講座とは趣きが異なる。自分の仕事の紹介でも過去の総括でもなく、最後に企画されている討論会「プラズマ非線形物理の幕開け」への繋ぎとしての役割があると解釈した。第6講の内容は日本語の題名より英語の題名の方にむしろ近いかも知れない。本講座全体を構想された故矢嶋信男教授の意にかなうものとなったかは疑問であるが、今は確かめるすべが無いことを返すがえすも残念に思う。

表1. 非線形物理の分類表

		実験室プラズマ		宇宙	流体系	生物系	凝縮系
		核融合	基礎実験				
乱れ	カオス						
	乱流						
構造	ソリトン 渦 その他						
	自己組織化						

2. マルチフラクタル (multifractal)

非線形現象の中にはフラクタルな性質を持つものが多い。閉じ込められたプラズマにおいて重要な磁力線のカオスもフラクタルな性質を示す^{1)~3)}。時間相関関数の巾則減衰⁴⁾や long-time tail の存在⁵⁾などはこのフラクタルな性質の現れである。この節では数年前から登場し始めたマルチフラクタルの概念を紹介する。この概念は、自由度の低いカオスにも又自由度の高い流体乱流にも適用できるため、一般性が十分ある。又この概念は熱力学関数とのアナロジーが成立するため物理の概念と考えられる。非線形物理に数学的概念が多数入り込んでいる傾向からすれば久々に物理らしい記述法が出現した。

2.1 駆動されたレーリー・ベナール対流

低自由度力学系の例を示しつつ、マルチフラクタルの説明をする。水銀を使った対流の実験がある⁶⁾。矩形でアスペクト比は小さい ($0.7 \times 0.7 \times 1.4 \text{ cm}^3$)。対流のロールは2列できる。水平方向に静磁場 ($B = 200 \text{ G}$) が存在する。上下の温度差を上昇させると、ロールの境界に振動が発生する。その振動数 ω_0 は $\omega_0 = 230 \text{ mHz}$ である。この振動と結合させるために外部よりシート状の電流を上下方向に流す。電流は交流で振動数 ω は可変である。交流電流の振幅を増大させると系の振動は乱れカオスが発生する。電流が十分弱いうちは、2つの振動数 ω_0, ω で特徴づけられるから、位相空間での軌道は二次元トーラスとなる。電流が増大するにつれてトーラスは歪んでゆく。振動数の比 ω_0/ω が有理数か無理数かでカオスが発生するまでのルートが異なる。有理数の場合は周期倍化ルートである。無理数の場合は準周期ルートをとる。準周期ルートは乱流発生の描象としてランダウが提出したものである。ここで紹介する実験は ω_0/ω が無理数の場合でしかも黄金平均 $(\sqrt{5} - 1)/2$ の場合である。理由は実験と理論の比較を目的としているため理論がつくりやすい場合を選んだということである。準周期ルートの場合 circle map と呼ばれる写像

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi\theta_n) \quad (1)$$

で良く近似できることが分っている。パラメータ K は今の例では交流電流の振幅に比例する。

図1はカオス発生点の近傍における臨界軌道の測定点2500点を図示したものである。点は軌道のポロイダル断面との切点であり、形は歪んでいるし、ある特定の領域には他より多く集っている。なお分布が線からはずれ幅を持っているように見えるのは実験上のノイズに由来しているとのことである。さて理論の目的は図1のような点の“bunching”

図1. 測定で得られたアトラクターの二次元空間への投影 (PRL 55, 2798 (1985))

をいかに記述するかということである。このため図1の集合の中のある点(サフィックス i を付す)を考えその点から距離 ℓ の半径内に軌道が存在する確率を P_i とすると

$$P_i \propto \ell^{\alpha_i}(\ell) \quad (2)$$

となる。確率 P_i は全体の点の数 N (今の場合 2500) と半径 ℓ 内の点の数 N_i から

$$P_i = \frac{N_i}{N} \quad (3)$$

で求まる。スケーリング指数 $\alpha_i(\ell)$ は一般には ℓ の関数だが、 $\ell \rightarrow 0$ の極限では α_i は ℓ に無関係な定数となる。指数 α_i は点 i の関数でもあるため図1のような一連の集合全体として α は連続に分布する。ここで特異点のスペクトル $f(\alpha)$ を α に対する連続関数として定義する。そのために、場所 i の全集合を集計して指数 α が α と $\alpha + d\alpha$ の間に存在する数 $n(\alpha, \ell)$ を求める。分布 $n(\alpha, \ell)$ は ℓ に対しスケーリング則を持ち、スペクトル $f(\alpha)$ を導入して、

$$n(\alpha, \ell) = d\alpha \rho(\alpha) \ell^{-f(\alpha)}. \quad (4)$$

ここに関数 $\rho(\alpha)$ は ℓ に関して特異なふるまいをしない関数である。当然に、 $f(\alpha)$ は

$$0 \leq f(\alpha) \leq d \quad (5)$$

を満たすべきである。 d はユークリッド的次元数で今の場合 $d=2$ である。式(2)及び(4)は重要な意味を含んでいる。特に(4)から、 $f(\alpha)$ が熱力学におけるエントロピーと似た量であることが分るであろう。 $\ell \rightarrow 0$ の極限で(4)のような漸近表示が存在すること自体、一般には証明されてはいない。しかし今の例では circle map (1) を基礎にし、(4)は証明でき、さらに関数 $f(\alpha)$ を理論的に求めることができる。図2は、関数 $f(\alpha)$ の理論と実験が良く合っていることを示している⁷⁾。 α の大きいところで多少のずれがある。

関数 $f(\alpha)$ は軌道の特徴づける一連の情報を含んでいる、 $f(\alpha)$ 自身、上述のごとく観測できる量である。一方他の観測可能な量として、一般化された次元のセット

$\{D_q, q=0, 1, \dots\}$ がある⁸⁾。すなわち D_q は

$$D_q = \lim_{\ell \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{q-1} \frac{\ln x(q)}{\ln \ell} \right\}, \quad (6)$$

ここに“分配関数” x は、

$$x(q) = \sum_{i=1}^N P_i^q. \quad (7)$$

特に D_0 をフラクタルディメンジョン、 D_1 をインフォメーションディメンジョン、 D_2 を相関ディメンジョンなどと呼んでいる。表式(7)は(2)及び(4)を使って積分で表せ

図2. f - α ダイアグラムの理論(実線)と測定(点)の比較 (PRL 55, 2798 (1985))

て,

$$x(q) = \int d\alpha' \rho(\alpha') \ell^{-f(\alpha')} \ell^{q\alpha'} \quad (8)$$

となる。 ℓ が小さい極限を考えているので積分(8)は指数 $q\alpha' - f(\alpha')$ を最小にする α' の値が最大の寄与をする。その α' の値を $\alpha(q)$ とすれば

$$\left. \frac{d}{d\alpha'} [q\alpha' - f(\alpha')] \right|_{\alpha'=\alpha(q)} = 0 \quad (9)$$

又

$$\left. \frac{d^2}{d\alpha'^2} [q\alpha' - f(\alpha')] \right|_{\alpha'=\alpha(q)} > 0 \quad (10)$$

となる。(9) 及び(10) より, 次のようになる。

$$f'(\alpha(q)) = q, \quad (11)$$

$$f''(\alpha(q)) < 0. \quad (12)$$

次元 D_q の定義(6)に代入すれば

$$D_q = \frac{1}{q-1} [q\alpha(q) - f(\alpha(q))] \quad (13)$$

が得られた。(13) 式の両辺に $(q-1)$ を掛け q で微分し, (9) 式を考慮すれば,

$$\alpha(q) = \frac{d}{dq} [(q-1) D_q] \quad (14)$$

となる。(13) 及び(14) 式は $\{D_q\}$ のセットと $\{\alpha(q), f(\alpha(q))\}$ のセットは互に一方を知れば他方も求められることを意味している⁹⁾。まず $\alpha, f(\alpha)$ が分かれば(13) より D_q が求まる。逆に D_q を知っていれば, (14) 式で α が求まり, (13) に代入すれば $f(\alpha)$ が求まる。

(13) 式は次のようにも書ける。

$$f(\alpha(q)) = q\alpha(q) - (q-1) D_q \quad (15)$$

(14) を考え合せれば, D_q と $f(\alpha)$ はルジャンドル変換の関係にあることが分る。このように $f(\alpha)$ は熱力学的自由エネルギーとのアナロジーを持っている。

以上は指数 α とそのスペクトル関数 $f(\alpha)$ の概念の説明であったが, リアプノフ指数 Λ とそのスペクトル関数 $h(\Lambda)$ の概念もパラレルに展開することができる¹⁰⁾。

2. 2 乱流における間欠性

コルモゴロフの 5/3 乗則は良く知られているように慣性小領域(inertial subrange)で成立している。この領域は空間スケール r が, $\eta \ll r \ll L$, を満たす領域のことである。 L は外的要因で決まるエネルギー入射の空間スケールであり, $\eta (\equiv (\nu^3/\varepsilon)^{1/4})$ は散逸スケールである。 ν は粘性係数, ε はエネルギー散逸である。 η より大きい空間スケールでは粘性の効果は無視できるため流体の流れ $\vec{u}(\vec{x})$ は,

r ($\gg \eta$) の空間スケールで見れば、正則ではなくなる。そこで、流れの構造関数 (longitudinal structure function) という量を導入する。すなわち

$$\langle \Delta u^p \rangle = \left\langle \left\{ \frac{\vec{r}}{r} \cdot \left[\vec{u}(\vec{x} + \vec{r}) - \vec{u}(\vec{x}) \right] \right\}^p \right\rangle \quad (16)$$

で定義し、実験的にも測定可能であるため理論と比較する努力が続けられてきた。慣性小領域では特定の空間スケールは存在しないから構造関数 $\langle \Delta u^p \rangle$ は r の巾則となることが期待され

$$\langle \Delta u^p \rangle = r^{\xi_p} \quad (17)$$

となる。コルモゴロフの1941年理論によれば、

$$\xi_p = \frac{p}{3} \quad (18)$$

となるが、実験の結果とはずれがある。従ってエネルギー散逸 ε の間欠性を導入する必要がある。マンデルブローは ε に対するフラクタルモデルを示唆した¹¹⁾。彼の示した幾つかの可能性の一つは、 β -モデルと呼ばれる理論として結実した¹²⁾。様々なスケールの渦があるため、その大きさを、 $\ell_n = L 2^{-n}$ とする。大きさ ℓ_n を持った渦がカスケードして大きさ ℓ_{n+1} の渦にエネルギーを伝達する際、 ℓ_{n+1} の渦のうち全体の β (< 1) の体積にエネルギーが伝わり他の部分にはエネルギーは伝わらないとする。 β はすべての過程で定数とする。このようなモデルで ξ_p を求めると

$$\xi_p = \frac{D-2}{3} p + 3 - D \quad (19)$$

となり、 D はフラクタル次元で、 $\beta = 2^{D-3}$ で与えられる。しかしこれでも指数 ξ_p は実験と合わなかった。さらにフリッシュとパリージ (Frisch and Parisi) はマルチフラクタルモデルへと発展させた¹³⁾。一つのフラクタル次元では決められず、多数のフラクタルが統計的に分布したモデルを導入した。 $r \rightarrow 0$ 極限で

$$\frac{\Delta u}{r^h} \neq 0 \quad (20)$$

を満たす空間領域の集合を $S(h)$ とする。乱流が1941年のコルモゴロフ理論の描象であれば $h = 1/3$ 以外は空集合となる。しかしマルチフラクタルでは、 h は連続的な値をとり得る。集合 $S(h)$ とすれば、空間の任意の点が、集合 $S(h)$ に属す確率 $p(h)$ は

$$p(h) \propto r^{3-D(h)} \quad (21)$$

となる。従って構造関数(16)は積分で表せて、

$$\langle \Delta u^p \rangle \propto \int d\mu(h) r^{ph+3-D(h)}, \quad (22)$$

ここに $\mu(h)$ は $D(h) > 0$ となる集合 $S(h)$ の測度を与える。 $r \rightarrow 0$ の極限では(22)の積分を鞍点法で見積もれて、

$$\langle \Delta u^p \rangle \propto r^{\xi_p}$$

ただし、指数 ξ_p は

$$\xi_p = \min_h [p h + 3 - D(h)] \quad (28)$$

となる。

マルチフラクタルの具体的なモデルとしてはランダム β モデルがある。 β -モデルに現れた定数 β をランダム化したモデルである¹⁴⁾。又最近では p -モデルという理論が現れ実験と理論の良い一致を主張している¹⁵⁾。

以上、マルチフラクタルの概念をレーリー・ベナール対流と乱流の間欠性を例にとって解説した。大切なことは概念そのものである。プラズマ以外の現象として処理してしまってもいけない。現象にひとたび理論の手が加わると新しい概念が生まれ他の現象への波及効果が期待できる。「プラズマは非線形の宝庫」でありすべての非線形概念はプラズマと無縁ではあり得ない。

3. 自己組織化と動的縮約

ここで紹介するのは反応拡散系に基く自己構造形成に関する興味ある理論形式である。内容は蔵本由紀氏になる講義ノートによっている¹⁶⁾。文献を紹介すればここでこの講座を止めてもよいが、より簡潔なプラズマ向け紹介を試みる。複雑な偏微分方程式系から物理量と時空のオーダリングを行い、縮約された非線形方程式を導く理論的枠組として、「てい減摂動法」というものを我々は知っている。谷内俊弥氏を中心としたグループにより開発され種々の現象に応用されてきた。そして縮約された方程式がソリトン解を持っていたため、ソリトン物理にとっても極めて重要な意義があった。ここで紹介する動的縮約はてい減摂動と同じ方向の理論であるが、少し違っている。違いの一つはてい減摂動が波動現象を対象としたのに対し、この“phasedynamics”と呼ばれている動的縮約は自己組織化を対象としている。筆者がおもしろいと思った点は、この手法が歴史的にはもっと古く独立に開発された数々の手法と本質的には何ら変らないものとして理解できるという事実である。すなわち

1) Klylov - Bogoliubov - Mitropolysky 法

2) 分岐理論に基づく動的縮約

(2-1) Hopf 分岐

(2-2) Newell - Whitehead 法

3) Chapmann - Enskog 法

4) Phasedynamics

などは同等の内容を持っている。1)はプラズマにとって馴染みがある非線形振動論である。振動の振幅及び位相に対する縮約された方程式が求まる。2-1)の方程式は、変数 $\vec{x}(t)$ に対して

$$\left(\frac{d}{dt} - L_0\right)\vec{x} = \epsilon L_1 \vec{x} + \vec{M} : \vec{x} \vec{x} + \vec{N} : \vec{x} \vec{x} \vec{x} \quad (24)$$

一方 2-2) は $\vec{x}$ を時間空間の関数に拡張し拡散項を導入し,

$$\left(\frac{d}{dt} - L_0\right)\vec{x} = \epsilon L_1 \vec{x} + \vec{M} : \vec{x} \vec{x} + \vec{N} : \vec{x} \vec{x} \vec{x} + \vec{D} : \nabla \nabla \vec{x} \quad (25)$$

を基礎方程式として扱う。 L_0 は無摂動系の線形演算子で ϵL_1 は摂動系の微小線形演算子である。 $\vec{M}, \vec{N}$ は2階, 3階の定数テンサーである。 $\vec{D}$ は拡散係数で一般にはテンサーである。動的縮約後の方程式は,

(25)では良く知られているようにTDGL (time - dependent Ginzburg - Landau equation) となる。

3)はボルツマン方程式に基づいてNavier - Stokes 方程式を導くための展開形式である。4)は後ほど説明する。

単刀直入に1)~4)の共通点を述べるなら、非摂動系に中立モードが存在することである。1)では振動の振幅と位相、2)では、 $L_0 \vec{x}^{(0)} = 0$ を満たす中立ベクトル $\vec{x}^{(0)}$ 、3)ではボルツマン衝突項の運動の恒量(温度、密度、流れの速度)が中立モードである。中立モードとは、摂動の無い系で時間的に発展しない解のことである。解きたい方程式は非線形の摂動が存在している。1)では非線形結合、2)では方程式の右辺で、不安定性を含んでいる。3)では系の空間的非一様性、4)では位相のずれなどである。摂動のために中立モードは中立に留らず、時間空間的に遅い発展を始める。他の減衰するモードは早い時間スケールを持つと仮定し、すぐ減衰して断熱的な準定常状態に達し、その後の発展は中立モードの時間空間発展という遅い過程を通じて進行する。このような仮定の下に動的縮約された非線形方程式が、仮定に反したふるまいをしなければ以上の仮定は正当化される。

具体的な例を示さないと分りにくいと思うので、4) phasedynamics の一例を紹介しよう。扱う方程式は反応拡散系である。すなわち

$$\frac{d}{dt} \vec{X} = \vec{F}(\vec{X}) + D \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \vec{X} \quad (26)$$

を取り上げる。 $\vec{F}(\vec{X})$ はもちろん $\vec{X}$ について非線形関数である。方程式(26)は進行波型の解

$$\vec{X} = \vec{X}_0(x - ct), \quad (27)$$

c は定数、を持つと仮定する。 $\vec{X}_0$ が無摂動系である。従って、 $\vec{X}_0$ に対し次の方程式が成立する。

$$-c \frac{\partial}{\partial x} \vec{X}_0 = \vec{F}(\vec{X}_0) + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \vec{X}_0 \quad (28)$$

無摂動解(27)が y 依存性を持った時の発展方程式を求めるのが目的となる。無摂動進行解(27)の変数 $x - ct$ を位相と呼ぶ。摂動の影響で位相 ϕ は y 依存性を含みつつ変形し,

$$\phi(x, y, t) = x - ct - \Psi(y, t) \quad (29)$$

となる。基礎方程式(26)は並進対称性を持っているから定常解に位相(29)を代入すれば Ψ は任意定数で

かまわない。従って(28)を Ψ で微分すれば、中立モード $\vec{u}_0$ が得られる。すなわち

$$L u_0 = 0 \quad (30)$$

ただし演算子 L は

$$L \equiv c \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial}{\partial \vec{X}_0} \cdot \vec{F}(\vec{X}_0(\phi)) + D \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (31)$$

であり固有関数 $\vec{u}_0$ は

$$\vec{u}_0 = \frac{\partial}{\partial \phi} \vec{X}_0(\phi) \quad (31)$$

で定義されている。このように時間-空間の対称性に基づく中立モードはゴールドストーンモード(Goldstone mode)と呼ばれている。変形された位相 ϕ を通じて、摂動解 $\vec{X}(x, y, t)$ を中立モードとそれからのずれ ρ に分離する。

$$\vec{X}(x, y, t) = \vec{X}_0(\phi) + \vec{\rho}\left(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \dots\right). \quad (32)$$

この手法では位相 ϕ を通じてすべての時間空間発展が起こると仮定している。位相 ϕ は無摂動型、 $x - ct$ 、からずれ、(29)で新しい位相のずれ Ψ に書き換えたが、何が位相であるかを未だ明確に定義していなかった。そもそも、摂動解(32)の分離はもともとの変数 $\vec{X}$ が ϕ と $\vec{\rho}$ に分離されたとも見させるが、それでは自由度が1つ増えてしまっている。従ってもとの自由度にもどすためには、制約条件を一つ設けてもかまわない。(32)を見れば、位相 ϕ の定義を変えればずれ $\vec{\rho}$ の値も異なってくるのが分る。ここで分離条件を課す、

$$(\vec{u}_0^\dagger, \vec{\rho}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\phi \vec{u}_0^\dagger(\phi) \cdot \vec{\rho} = 0 \quad (33)$$

すなわちベクトル $\vec{\rho}$ はゴールドストーンモード $\vec{u}_0$ とは直交するように位相を定義する。位相を一意的に定義すれば、位相の発展方程式は、

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi = \Omega \left(\frac{\partial}{\partial y} \Psi, \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Psi, \dots \right) \quad (34)$$

の形に求まるはずである。(34)の右辺の関数形は結果的に正当化される。縮約された非線形方程式(34)を具体的に求めるために、 $\vec{X}(x, y, t)$ の表式(32)を元の方程式(26)に代入して得られる式は

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \vec{\rho} + \vec{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{X}_0} \vec{F}(\vec{X}_0) + D \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \vec{\rho} \\ &= \left[c \vec{u}_0 + \vec{F}(\vec{X}_0) + D \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \vec{X}_0 \right] \\ &+ \frac{\partial \Psi}{\partial t} \vec{u}_0 + D \left[-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \vec{u}_0 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \phi} \vec{u}_0 \right]. \end{aligned} \quad (35)$$

左辺は最低次で $L\vec{\rho}$, 右辺第一項は $\vec{X}_0$ の定義より消える。従って

$$L\vec{\rho} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} \vec{u}_0 + D \left[-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \vec{u}_0 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \phi} \vec{u}_0 \right]. \quad (36)$$

ずれ $\vec{\rho}$ は, wave front から十分離れている時 ($\phi \rightarrow \pm \infty$) 0 になるのが妥当であるから, 離散固有関数系

$$L\vec{u}_\lambda = \mu_\lambda \vec{u}_\lambda, \quad (\lambda = 0, 1, \dots, \infty), \quad (37)$$

で展開できて

$$\vec{\rho} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \rho_\lambda \vec{u}_\lambda \quad (38)$$

となる。 $\lambda = 0$ が除外されているのは分離条件 (33) があるためである。又, $\lambda = 0$ に縮退はないと仮定すれば $\vec{u}_0$ は一種類しかない。方程式 (36) が $\vec{\rho}$ について解けるための条件

$$(\vec{u}_0^\dagger, L\vec{\rho}) = 0 \quad (39)$$

より

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi = \Omega = \nu \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \mu \left(\frac{\partial}{\partial y} \Psi \right)^2 \quad (40)$$

ここに係数 ν, μ は

$$\nu = D(\vec{u}_0^\dagger, \vec{u}_0) \quad (41)$$

$$\mu = D(\vec{u}_0^\dagger, \frac{d}{d\phi} \vec{u}_0) \quad (42)$$

与えられ, バーガーズ型方程式 (40) が得られた。

MHDを基礎とした自己組織化としてテラー理論が有名である。すなわち, ヘリシティ保存という制約の下で磁気エネルギーを極小にする変分原理で準定常状態の磁場配位が決まるというものである。コロンプスの卵のようなアイデアであるが, その後の研究に与えた影響は絶大であった。このテラー過程は1974年IAEAの東京会議の post dead line paper として初めて登場している。当時著者はその会議に出席して今でも記憶している。その後1987年12月にテキサス大学オースチンにて, 乱流に関する日米ワークショップが行われた。著者はそれに参加する機会に恵まれた。当時たまたまオースチンに滞在していたテラーもワークショップに参加した。有名なテラーとはどんな人物が大へん興味があった。彼は基礎的物理にも積極的に議論に加わり, リードして行くタイプであった。テラーの変分原理そのものは, 実は彼が最初ではなく宇宙のMHD分野の人のアイデアであったそうである。テラーの再発見, 再認識ということであろうが, 基礎物理に造詣の深い人であったからこそできたのであろう。この分野のその後の発展についてはこの講座で紹介するのは適当ではない。

4. おわりに

第1節で、非線形物理の分類表を示した。現象の軸と物質の軸がつくりだす2次元空間の各場所に、それぞれの研究がある。二つの軸は理論的分類、実験的分類に対応していると思う。実験家は物質との関わりが深く簡単には当面の物質を離れることはできない。その物質にまつわるあらゆることを知らなければならないし、非線形現象に限らず様々な現象を研究対象とする。一方理論家にとっては現象別分類の方が物質別分類より適当な場合があるのではないか。プラズマ物理においてはしかし、理論家といえどもプラズマという物質の中で仕事をしてきた。実験と理論・シミュレーションは未だそれほど分化が進んでいないのかもしれない。

日本におけるプラズマ物理は誕生以来30年ほど経過し、そろそろ大人になりかかっている。人間の場合は大人になると様々な分野の人と接触し、協力して仕事を始める。その時、自分はどのような立場で社会の役に立てるか、又自分の特徴は何かをはっきり自覚すべきかもしれない。理論家は物質の枠を越えることに実験家ほど制約はないはずだ。理論家たるもの、表1における横軸の方向に見る目を持つべきではないだろうか。その上で、プラズマ物理が物理の中で果たすべき役割を認識して、プラズマ物理を発展させるように心掛けるのが理想だろう。

第6講は他に比べ短かくなったが、この程度のページ数で十分である。プラズマ物理との関わりについて具体的に書ける部分もあったが、あいにくその勇気を持ち合わせなかった。むしろ読者諸兄の御感想を承りたい。

参 考 文 献

- 1) T. Hatori : 核融合研究 58巻, (1987). 433
- 2) T. Hatori : プラズマ研便り. Vol. 5, No. 3, (1988) 1.
- 3) T. Hatori, H. Irie and K. Urata : in preparation for *Prog. Theor. Phys. Supplement "New Trends in Chaotic Dynamics of Hamiltonian Systems"*.
- 4) T. Hatori and H. Irie : *Prog. Theor. Phys.* 78, (1987) 249.
- 5) T. Hatori, T. Kamimura and Y. H. Ichikawa : *Physica* 14D (1985) 193 ; Y. H. Ichikawa, T. Kamimura and T. Hatori : *Physica* 14D (1987) 247.
- 6) A. Libchaber, C. Laroche and S. Fauve : *J. Physique-Letters* 43 (1982) L-211. A. Libchaber, S. Fauve and C. Laroche : *Physica* 7D (1983) 73 ; J. Stevans, F. Heslot and A. Libchaber : *Phys. Rev. Lett.* 55 (1985) 596.
- 7) M. H. Jensen, L. P. Kadanoff, A. Libchaber, I. Procaccia and J. Stavans : *Phys. Rev. Lett.* 55 (1985) 2798.
- 8) H. G. E. Hentschel and I. Procaccia : *Physica* 8D (1983) 435.
- 9) T. C. Halsey, M. H. Jensen, L. P. Kadanoff, I. Procaccia and B. I. Shraiman : *Phys. Rev. A* 33 (1986) 1141.
- 10) T. Mori, H. Hata, H. Mori, T. Horita and K. Tomita : *Prog. Theor. Phys.* 79 (1988) 296 及びその中で引用されている文献。
- 11) B. B. Mandelbrot : *J. Fluid Mech* 62 (1974) 331.
- 12) U. Frisch, P. L. Sulem and M. Nelkin : *J. Fluid Mech* 87 (1978) 719.
- 13) U. Frisch and G. Parisi : in *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics*, ed. by M. Ghil, R. Benzi and G. Parisi (North-Holland, NY, 1985), p. 84.
- 14) R. Benzi, G. Paladin, G. Parisi and A. Vulpiani : *J. Phys. A : Math. Gen.* 17 (1984) 3521.
- 15) C. Meneveau and K. R. Sreenivasan : *Phys. Rev. Lett.* 59 (1987) 1424.
- 16) Y. Kuramoto : 物性研究 49-3 (1987).