大出力・多モード発振 D_2O レーザーを用いた協同 トムソン散乱計測によるイオン温度評価の計算機 シミュレーション

永津雅章, 坪内有一, 高田昇治, 佐々木浩一, 築島隆繁

(名古屋大学工学部)

(1992年4月14日受理/1992年5月25日改訂原稿受理)

Computer Simulation for Evaluating Ion Temperature by Means of Collective Thomson Scattering Using a High Power, Multi-Mode D_2O Laser

Masaaki Nagatsu, Yuichi Tsubouchi, Noriharu Takada,
Koichi Sasaki and Takashige Tsukishima

(Received April 14, 1992/Revised Manuscript Received May 25, 1992)

Abstract

Computer simulation has been carried out with the Monte Carlo method to assess the accuracy of ion temperature measurement by means of the collective Thomson scattering for the Heliotron E using a high power, multi-mode D_2O laser. Knowing the fine spectral structure of a pulsed D_2O laser emission which has been simultaneously measured using a highly frequency-resolved heterodyne detection system, we can evaluate the ion temperature with almost the same accuracy as that obtained in the conventional single-mode laser scattering.

Keywords:

computer simulation, collective Thomson scattering, ion temperature measurement, high power D_2O laser, multi-mode oscillation, Heliotron E.

1. はじめに

中・大型プラズマ実験装置で生成される超高温・高密度プラズマのイオン温度測定では, 近年, プラズマ外部から中性粒子ビームを入射し, プラズマイオンとの荷電交換により生じた高速中性粒子のエネルギー分析を行う方法, あるいは完全電離不純物イオンとの荷電交換再結合の際に放射する光を分光的に測定し, そのドップラー幅からイオン温度を評価する方法が開発され, 広く用いられるようになってきた¹⁾. しかしな

がら、将来核融合反応プラズマに適用する場合を考えると、大型化に伴い入射中性粒子ビーム密度の電離による減衰が問題になると考えられ、プラズマ中心部のイオン温度測定を可能にするためには高エネルギーイオン源の開発が必要であるとされている。また不純物イオン密度の減少に伴い利用できる発光スペクトルが限られてくる等の問題も挙げられる。

これに対して、電磁波を用いた協同トムソン散乱計測法によるイオン温度計測は、使用するレーザー光の波長を選択することにより核燃焼プラズマに対しても適用可能であること、時間・空間分解の面で優れていること等の点で極めて有力な計測法である。またこの計測法は、原理的に α 粒子エネルギー分布測定に適用できる点で魅力的であり、現在、ジャイロトロンを用いた α 粒子計測を模擬したバルクイオンおよび高エネルギー・イオンテイル部のエネルギー分布測定がJETおよびTFTR計測されている^{2),3)}。

これまで、トカマク装置における協同トムソン散乱法によるイオン温度計測の試みは、1983年にMITのAlcator-Cにおいて行われ、信号対雑音比 (S/N) ~ 1 の散乱信号の検出に初めて成功し、イオン温度の評価が行われた⁴⁾。また、1989年にはローザンヌ工科大学のTCAにおいて、単一プラズマ放電で約20%の測定精度でイオン温度が測定可能であることが報告されている⁵⁾。我が国における遠赤外レーザー散乱計測システムの開発は、レーザー源 (D_2O レーザー) については大阪大学および九州大学、散乱波検波システムについては名古屋大学、検出器については東北大学でそれぞれ分担して技術開発が進められた。現在、これらの開発技術を結集し、京都大学ヘリオトロン核融合研究センター・ヘリオトロンE装置の高密度プラズマ ($n_e \sim 10^{14} \text{cm}^{-3}$, $T_e \sim T_i \sim 300 \text{eV}$) の中心部のイオン温度を測定すべく、レーザー光源の出力増強、受信検波システム等の整備が行われている。

ヘリオトロンEプラズマにおける信号対雑音比の数値解析の結果から、 D_2O レーザーに必要とされる性能は、1)出力エネルギー200mJ以上、2)パルス幅1 μs 以上、3)発振スペクトル幅50MHz以下であること、の3点である。このうち1)および2)については既に達成されており、3)の発振スペクトル幅の測定が残された

図1. D_2O レーザー出力波形のパルス全域 (約1.4 μs) にわたるパワースペクトル2例。ここで230MHz近傍がラマン共鳴遷移周波数に対応している。

課題となっていた。最近、我々は高・周波数分解能を持つヘテロダイン受信検波システムの開発を行い、 D_2O レーザーの発振スペクトルの詳細なスペクトル構造を測定することに世界で初めて成功した⁶⁾。その結果の一例を図1に示す。図1からわかるように、複数個の縦モードの同時発振から成るスペクトル構造となっており、各縦モード成分の発振線幅は10 MHz 以下と極めて狭帯域であった。 D_2O レーザーの発振スペクトル幅は、MIT およびローザンヌ工科大学でも測定されているが^{7),8)}、両者とも D_2O レーザーの縦モード間隔より広い帯域幅 (80 MHz) のフィルター方式を用いたために、詳細なスペクトル構造を得るには至っていない。入射光は理想的には、単一モード発振、かつ発振線幅が狭帯域であることが望まれるが、ローザンヌ工科大学で行われたイオン・トムソン散乱計測 (R. Behn 他) では、図1 (a)あるいは1 (b)に類似した多モード発振構造の入射波を用いて行われている。Behn らは、散乱波スペクトルの測定結果からイオン温度を評価する際に、単一モード発振構造の入射波を仮定した理論スペクトルを用いたフィッティングを行っており、 T_e や n_e 等のプラズマパラメータの測定誤差から生じるイオン温度の評価誤差以外に、多モード発振光源に起因した付加的な評価誤差を含んでいることが予想される。

本研究論文では、 D_2O レーザーの発振スペクトルと散乱波スペクトルとを同時測定し、レーザー発振スペクトル構造を考慮した散乱波の理論スペクトルとのフィッティングを行うことによってイオン温度を評価する手法を提案し、図1に示したような多モード発振 D_2O レーザーを光源として用いても、単一モード発振レーザーの場合と同程度の測定精度でイオン温度を評価することが可能であることを示す。具体的には、ヘリオトロンE プラズマにおいて散乱計測を実施した場合を想定し、レーザーの発振スペクトル構造を考慮することにより、どの程度イオン温度の評価誤差を改善できるかをモンテカルロ法による計算機シミュレーションを用いて調べる。

遠赤外レーザーによるイオン・トムソン散乱計測のS/N 評価に関する数値解析は、1981年に Sharp ら⁹⁾、および Watterson¹⁰⁾により行われ、イオン温度の測定精度が、プラズマ・パラメータや入射光パワー、及び検知器の性能の違いに対してどのように依存するかが調べられた。その結果、当時の技術で可能なイオン温度の測定精度は10%~20%と評価されている。続く1982年には Siegrist らは、波数ベクトルと磁場のなす角度が散乱光スペクトル分布に与える影響を計算機シミュレーションにより調べ、イオン・トムソン散乱法によるトカマク・プラズマのポロイダル磁場強度および安全係数 q の測定の可能性を示唆している¹¹⁾。また最近では、1990年に Krug らが TCA トカマクにおける散乱実験パラメータを用いたシミュレーションを行い、実験条件の最適化により10%以下の測定精度でイオン温度を評価することができると報告している¹²⁾。以上、これまでに行われた計算機シミュレーションは、全て入射レーザー光が単色光であると仮定してイオン温度の測定精度を評価しており、前記のような入射レーザー光の発振モード構造を考慮に入れた計算機シミュレーションは本論文が初めてである。また本研究では、イオン温度を評価するための最小二乗フィッティング操作において、散乱波スペクトル強度のウイング部に重みをつけた手法を採用することにより、文献12)等で行われた重みを付けない最小二乗法に比べ、イオン温度の評価誤差の改善 (10%か

ら4%に改善)が計られている。

以下、第2章では図1(a)あるいは1(b)の発振スペクトル構造のD₂Oレーザーを光源として用いたイオントムソン散乱計測を想定することにし、その場合のイオン温度の測定精度を調べるための計算機シミュレーションの方法について述べる。第3章にその解析結果および討論を、そして第4章に本研究の結論を記述する。

2. シミュレーション手法

2.1. 入射波が多モード成分をもつ場合の散乱波のパワースペクトル

具体的なシミュレーション・アルゴリズムを説明する前に、入射波スペクトルが多モード構造である場合、散乱波のパワースペクトルがどのような形で表されるかについて記述する。

一般に、多モード構造の入射波の電界 E は次式で表される。

$$E_i = \sum_n E_n \cos(\omega_{in} t - \mathbf{K}_{in} \cdot \mathbf{r} + \phi_n) \quad (1)$$

ここで、 E_n 、 ω_{in} 、 $\mathbf{K}_{in}$ 、 ϕ_n はそれぞれ n 番目のモードの電界振幅ベクトル、角周波数、波数ベクトル、位相を表し、各モードの周波数広がりが無視できると仮定した。(1)式のような多モード構造のレーザービームをプラズマ中に入射したとき、立体角 $\Delta\Omega$ 内に散乱される散乱光のパワースペクトル密度 $P_s(\omega_s)$ は次式で与えられる。(付録を参照。)

$$P_s(\omega_s) = r_e^2 n_e \ell \Delta\Omega \sum_n P_{in} S(\mathbf{K}_n, \omega_s - \omega_{in}) \quad (2)$$

ただし、 r_e は電子古典半径、 n_e は散乱領域での平均電子密度、 ℓ は散乱領域の長さ、 $\Delta\Omega$ は受光面が散乱中心に対して張る立体角であり、 P_{in} は n 番目のモードパワー、 $S(\mathbf{K}_n, \omega_s - \omega_{in})$ は動的構造因子(dynamic form factor)と呼ばれる密度揺動パワースペクトル密度である。ここで $\mathbf{K}_n$ は、 $\mathbf{K}_{sn}$ を n 番目のモードの散乱光の波数ベクトルとすると、 $\mathbf{K}_n = \mathbf{K}_{sn} - \mathbf{K}_{in}$ で与えられる。また ω_s は、ここでは散乱波の角周波数を表している。(2)式は、入射光が多モードである場合、散乱光のパワースペクトルが各モードについての散乱光のパワースペクトルを重ね合わせたものとして表されることを示している。 $S(\mathbf{K}_n, \omega_s - \omega_{in})$ を評価する際、本論文では電子およびイオンの速度分布はいずれも Maxwell 分布であると仮定した。

現在の多モード発振D₂Oレーザーを入射源として用いた場合の散乱光の理論スペクトルを求めるために、図1(a)、(b)をそれぞれ図2(a)、(b)のように模擬した。各モードの上に記した数字は、図1のパワースペクトルの最大振幅を100とした時の各モードの振幅であり、縦モード間隔は簡単のため40 MHzとした。また図中の周波数軸上に上向きに示した矢印は、散乱光のスペクトル分布を求める際に必要となる周波数軸上の原点としてとった点を示している。図3は、入射光が単一モードである場合(図中曲線(i))と、図2(a)の多モード構造の場合(曲線(ii))および図2(b)の多モード構造である場合(曲線(iii))の各々につい

図2. 図1に示した D_2O レーザー発振パワースペクトルのモデリング.

図3. ヘリオトロンEの高密度プラズマに対する散乱波の理論スペクトル. (i)入射光が単一モードである場合, (ii)図2(a)の多モード構造である場合 (mode(a)), (iii)図2(b)の多モード構造である場合 (mode(b)).

て, ヘリオトロンEの高密度プラズマ放電 ($n_e = 10^{14} \text{ cm}^{-3}$, $T_e = T_i = 300 \text{ eV}$) に対して計算された散乱光の理論スペクトルを示している. ここで, 散乱角 $\theta_s = 15^\circ$ とし, 波数 $k = 42.6 \text{ cm}^{-1}$, $\alpha = (k\lambda_D)^{-1} = 18.2$ の値を用いた. また, 図中の各スペクトルは周波数軸上原点での値で規格化されている. 図3から, D_2O レーザーのモード構造の変化により, 散乱光の理論スペクトルの形状が変化していることがわかる. ここで, 図2において矢印で示した周波数の原点を変化させても, 散乱波スペクトルは相対的に周波数シフトするのみで, スペクトル形状には変化は生じない. 入射レーザー光のスペクトルが散乱波スペクトルと同時に測定される場合には, 両者スペクトルの周波数間に一対一の対応が得られるので上記の周波数軸上の原点の取り方は問題にならない. なお, 図3に示した理論スペクトルは, プラズマ中の電子, イオンはそれぞれの温度で決まる Maxwell 分布をしており, 散乱波の測定は無限に長い時間にわたって行われていることを前提としている. 実際の測定では, 測定時間は有限 (パルス幅 $\times$ 測定回数) であり, 測定毎に変動する. また, 種々の雑音が混入する.

計算機シミュレーションのフローチャート

図4. イオン温度評価のためのシミュレーション手法フローチャート

以下のシミュレーションでは、有限時間での測定により不可避免的に侵入する測定誤差を評価し、このような誤差を含んだスペクトル分布からどの程度の精度でイオン温度を推定できるかを示す。

2.2. シミュレーション・アルゴリズム

本研究で用いたイオン温度評価の計測機シミュレーションのフローチャートを図4に示す。まず初めに入射レーザー光のモード数と各モードの振幅、プラズマの電子密度 ($n_e = 10^{14} \text{cm}^{-3}$)、電子温度 ($T_e = 300 \text{ eV}$)、イオン温度の真値 ($T_i = 300 \text{ eV}$) を用いて真の散乱信号のスペクトル分布を(2)式から決定する(図3に相当)。次に、これをベースとして実験で得られる散乱信号のスペクトル模擬するが、まず、実験では

図5. 受信検波システムの概略図

図5に示した検知システムを用いて散乱波パワースペクトルを測定するものとする。このとき、post detection 後の S/N はよく知られているように、次式で与えられる。

$$S/N = \frac{P_s}{P_s + P_n} (1 + \Delta f \cdot \tau)^{1/2} \quad (3)$$

ここで、 P_s , P_n はそれぞれ IF アンプのバンド幅 Δf に入ってくる散乱波パワーおよび雑音パワーの平均値、 τ は積分時間（パルス幅）である。

図5において、IF 段の出力電圧 $v(t)$ は散乱波電界 $E_s(t)$ に比例した成分 $v_s(t)$ と雑音成分 $v_n(t)$ の和として表される。 $v_s(t)$ は入射波電界 E_i および IF 周波数におけるプラズマ密度揺動の積に比例しており、 $v_n(t)$ は散乱波受信アンテナで受ける背景雑音電界およびミキサで発生するショット雑音等を含んでいる。従って、 $v(t)$ は平均値が0のガウス性不規則信号とみなすことができる。 $v(t)$ を $t=0$ から $t=\tau$ まで観測したとすれば、 $v(t)$ は周波数間隔 $\delta f = 1/\tau$ のフーリエ級数で表すことができる。

$$v(t) = \sum_{j=0}^N \left\{ V_s(f_j) \sin 2\pi f_j t + V_c(f_j) \cos 2\pi f_j t \right\} \quad (4)$$

$$f_{j+1} - f_j = \delta f, \quad N = \Delta f \cdot \tau$$

ここに、 j は IF のバンド幅 Δf 内の成分のみをとる。(4)式は線形であるから、 $v(t)$ がガウス性不規則信号であるためには、フーリエ成分 $V_s(f_j)$, $V_c(f_j)$ は「ガウス分布した母集団から無作為に抽出したサンプル値」となっているはずである。post detection では、 $v^2(t)$ の時間平均 $\overline{v^2(t)}$ が測定される。 $\overline{v^2(t)}$ はバンド幅 Δf に入ってくる散乱波パワーおよび雑音パワーの和、 $P_s + P_n$ に比例している。 $V_s(f_j)$ および $V_c(f_j)$ は相互に独立であることを考慮すると次の関係が求まる。

$$\overline{v^2(t)} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^N \left\{ V_s^2(f_j) + V_c^2(f_j) \right\} \quad (5)$$

もし、 f_N と f_0 の間の $V_s(f_j)$ および $V_c(f_j)$ が分散値 σ^2 の同じ母集団からのサンプル値であるとするとき、 $\overline{v^2(t)}$ は各 f_j 毎に2個の独立なサンプル値の二乗を $N+1$ 個加えたものになっている。従って、 $2\overline{v^2(t)}/\sigma^2$ は自由度

$$n = 2(1 + \Delta f \cdot \tau) \quad (6)$$

の χ^2 分布に従う。ここで、

$$X \equiv \frac{2 \overline{v^2(t)}}{\sigma^2} \quad (7)$$

により χ^2 分布の確率変数 X を導入すると、公式により X の期待値 $\langle X \rangle$ および分散 $\langle \Delta X^2 \rangle = \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle$ は次式で与えられる。

$$\langle X \rangle = n \quad (8)$$

$$\langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle = 2n \quad (9)$$

(6)～(9)式から直ちに次の関係が導かれる。

$$\frac{S}{N} \equiv \frac{\langle \overline{v^2} \rangle}{\langle (\overline{v^2} - \langle \overline{v^2} \rangle)^2 \rangle^{1/2}} = (n/2)^{1/2} = (1 + \Delta f \cdot \tau)^{1/2} \quad (10)$$

これは(3)式において $P_s \gg P_n$ とした関係になっている。

以下のシミュレーションでは、実験条件に近い値として $\tau = 1 \mu s$ 、 $\Delta f = 10 \text{ MHz}$ に選び、周波数分解 $1/\tau$ 毎の $V_s(f_j)$ および $V_c(f_j)$ は Δf の周波数間隔にわたり同じ分散値 σ^2 をとることとし、 σ^2 の値は Δf にわたる理論スペクトルの平均値を採用した。

(5)式によれば、平滑化周波数 Δf に無関係に、測定される散乱波スペクトルは f_j 毎に自由度2の χ^2 分布に従う。 f_j を同定することは $\Delta f = 0$ と置いたのと同値であり、(10)式より標準偏差と平均値との比は1となる。すなわち、測定スペクトルは理論スペクトルの平均値を中心に100%の相対誤差をもったスペクトルとなる。計算機では、 $V_s(f_j)$ および $V_c(f_j)$ に平均値0、分散が $S(k, 2\pi f_j)$ をもつガウス性ランダム信号をそれぞれ発生させ、さらに各 f_j 毎に独立な $\{V_s(f_j), V_c(f_j)\}$ の組を $(N+1)$ 個発生させ、それらの二乗和として $\overline{v^2}(t)$ を作り出している。このため、この操作は平均0、分散1の正規化したガウス性母集団からサンプル値を抽出していることになるので、上述の議論と等価である。このような操作を行い、 Δf の間隔で各チャンネル毎にスペクトルの平滑化を行い、下限周波数 f_L から上限周波数 f_U にわたって求めたものが、一回の散乱測定によって得られる散乱波の標本スペクトル分布 $S_h(f_m)$ に対応する。ここで、 $f_m = f_L + m\Delta f/2$ であり、本シミュレーションでは $f_U - f_L = 300 \text{ MHz}$ とした。この擬似散乱波スペクトルに最もよく適合する理論曲線を、 T_i をパラメータとして最小二乗法で求め、その時のパラメータ値 T_i を一回の散乱測定で得られる T_i のサンプル値とする。以上の散乱波計測シミュレーションを100回行い、100個のイオン温度サンプル値 $\hat{T}_i$ を用いて、 $\hat{T}_i$ の平均値 $\langle \hat{T}_i \rangle$ および分散 $\langle (\hat{T}_i - \langle \hat{T}_i \rangle)^2 \rangle$ を評価した。

本研究で用いた最小二乗法では、測定された散乱波スペクトルの各チャンネルの平均値と理論スペクトルの平均値との差の二乗に、後述する重み関数 $w(f_m)$ を掛けたものを全チャンネル数にわたり合計し、これを最小にするようなイオン温度を求めた。即ち m 番目のチャンネルの標本スペクトル値を $S_h(f_m)$ 、推定ス

ベクトル $\hat{S}(f)$ の Δf にわたる平均値を $\langle \hat{S}(f_m) \rangle$, 全チャンネル数を M とし, 次式の

$$G = \sum_{m=1}^M w(f_m) \left\{ S_h(f_m) - A \cdot \langle \hat{S}(f_m) \rangle \right\}^2 \quad (11)$$

が, 最小となる時のイオン温度を推定値とする方法を採用した. ここで, 重み関数 $w(f_m)$ は, 図3に示したように散乱波スペクトルの値が大きくなる低周波数域での二乗誤差を, レベルの小さくなる高周波域での二乗誤差と比べて同等に扱えるようにするため, 次式のような重み $w(f_m)$ をつけて考えることにした.

$$w(f_m) \equiv \left\{ A \cdot \langle \hat{S}(f_m) \rangle \right\}^{-2} \quad (12)$$

(11)および(12)式において, 係数 A は理論スペクトルと測定スペクトル間の大きさの違いを補正するために理論スペクトルに掛ける可変パラメータである. 実際の最小二乗法計算では, イオン温度 T_i および係数 A を変化させ, T_i および A の組合せのうち, (11)式の G の値が最小となる時のイオン温度を推定値とした.

最終的には, 最初に理論スペクトルを求める時に用いたイオン温度 T_i で正規化した次式で定義される基準化偏り誤差 (バイアス誤差) B , および基準化標準偏差 D を測定精度の指標とした.

$$\text{基準化偏り誤差 } B = \frac{|\langle \hat{T}_i \rangle - T_i|}{T_i} \times 100\% \quad (13)$$

$$\text{基準化標準偏差 } D = \frac{\{ \langle (\hat{T}_i - \langle \hat{T}_i \rangle)^2 \rangle \}^{1/2}}{T_i} \times 100\% \quad (14)$$

本シミュレーションでは, 観測周波数幅 $f_U - f_L$ は 300 MHz に固定し, 下限周波数 f_L を種々変化させた場合について適合の良否を調べた.

3. シミュレーション結果および討論

イオン温度以外のプラズマパラメータ (電子温度 T_e , 電子密度 n_e 等) が測定誤差を含む場合には, これらの測定値をもとに計算した理論スペクトルが誤差を含むことになり, 測定された散乱波スペクトルとの最小二乗法により得られたイオン温度はこのため誤差を伴うことになる. 本章ではまず最初にイオン温度以外のプラズマパラメータが誤差を含まないと仮定した場合のシミュレーション結果について述べ, その後で, 電子温度 T_e と電子密度 n_e の測定誤差を考慮に入れたイオン温度評価のシミュレーション結果を示す.

測定対象としては現在実験を進めているヘリオトロン E プラズマとし, (i) 入射光を単一モード発振とし単一モードを仮定した理論スペクトルによりフィッティングを行った場合 (case 1), 多モード発振 D₂O レーザーを光源として用いた場合の散乱波スペクトルを, 単一モード発振を仮定した理論スペクトルによってフィッティングする場合 (case 2), および同時測定で得られた入射波スペクトルをもとに計算された理論スペクトルを用いてイオン温度を評価する場合 (case 3) のシミュレーション結果を示す.

図6. 入射光が単一モードである場合 (case 1) のシミュレーション結果. (a)最適フィット例および(b)100回のシミュレーションの結果得られたイオン温度の度数分布表 (真値 $T_i=300$ eV) .

図7. case 1 の場合のフィッティング下限周波数 f_L とイオン温度評価の基準化標準偏差 D (丸印) および基準化偏り誤差 B (四角印) .

3.1. イオン温度以外のプラズマパラメータが測定誤差を含まない場合

まず初めに, case 1 の場合の最適フィットの一例と, 100回のシミュレーションの結果得られたイオン温度の推定値 $\hat{T}_i$ の度数分布表を参考のため図6に示す. 図6(a)において, 実線は真のスペクトル, ヒストグラムは疑似散乱信号スペクトル (標本スペクトル $S_h(f)$), 点線は最適フィットした推定スペクトル $\hat{S}(f)$ を示している. (この例では実線と殆ど区別できない) 図6(b)は, フィッティングを行う周波数領域 (帯域幅300 MHz) の下限周波数 f_L が100 MHz の場合に得られたイオン温度の度数分布を示している. ここで, イオン温度の評価誤差を表す量として, 2章で導入した基準化偏り誤差 B および基準化標準偏差 D を用い, f_L を50 MHz から300 MHz まで, 50 MHz ごとに変えていった場合について, 基準化標準偏差と基準化偏り誤差がどのように変化するかを図7に示した. 図中, 全ての f_L に対して基準化標準偏差は5%以下, 基準化偏り誤差は1%以下であることから, 入射光が単一モードである場合には f_L を50 MHz~300

MHz の間のいずれに設定しても, 単一プラズマ放電で基準化標準誤差 6% 以下でイオン温度を推定することが可能である.

次に, 図 1 (a) または 1 (b) の多モード発振スペクトル構造をもつ入射波の場合を考える. 前記のように, シミュレーションではこれらを図 2 のような線スペクトル構造にモデル化し, それぞれの場合に対する散乱波スペクトルをモンテカルロ法によりシミュレートした. 図 8 および図 9 は, このようにして得られた模擬散乱波スペクトルを, 単一モードの入射波を仮定した理論スペクトルを用いてフィッティングを行った場合 (case 2) と, モード構造が同時測定により既知であるとして計算された理論スペクトルによってフィッティングを行った場合 (case 3) の基準化標準偏差と基準化偏り誤差の f_L 依存性をそれぞれ示している. ここで, case 2 の場合には明らかに基準化偏り誤差は, 先に示した case 1 の場合 (図 7) に比べて悪くなるのがわかる. また, 入射光が図 2 (a) のモード構造を持つ場合 (mode (a) と呼ぶ) と, 図 2 (b) のモード構造を持つ場合 (mode (b) と呼ぶ) との比較から, モード数のより多い入射光の場合ほど, 基準化偏り誤差が大きくなるのがわかる. 下限周波数 f_L が高くなると, 入射光が多モードである場合と単一モードである場合の基準化偏り誤差はともに減少するが, 単一モードである場合の基準化偏り誤差が 1% 以下であるのに対して, 多モードの場合には 10% 以上となっている.

図 8. case 2 の場合の下限周波数 f_L とイオン温度評価の基準化標準偏差 D (丸印) および基準化偏り誤差 B (四角印).

(a) 入射光が図 2 (a) の多モード構造である場合 (mode (a))

(b) 入射光が図 2 (b) の多モード構造である場合 (mode (b))

図9. case 3 の場合の下限周波数 f_L とイオン温度評価の基準化標準偏差 D (丸印) および基準化偏り誤差 B (四角印).
 ●■: 入射光が図 2 (a) の多モード構造である場合 (mode(a))
 ○□: 入射光が図 2 (b) の多モード構造である場合 (mode(b))

次に, case 3 の場合には, たとえ入射光が mode(a) および mode(b) のように多モードであっても, とともに基準化偏り誤差は小さく, 2% 以下であることがわかる. これは case 1 の場合とほぼ同じ誤差となっている. 一方, 基準化標準偏差については f_L の低い領域で大きくなっているが, f_L が 200 MHz の場合には 4% 以下の値となっており, これも case 1 とほぼ同じ結果になっている. f_L の低周波数域で誤差が大きくなる理由を説明するため, 図10(a), 10(b) および 10(c) に入射光が単一モードである場合, および図 2 (a) あるいは 2 (b) のモード構造を持つ多モードである場合の, それぞれについて計算された散乱光の理論スペクトル (ここで無限長観測時間を仮定している) を示す. 図中 (i) から (v) のスペクトル曲線は, イオン温度がそれぞれ 200 eV, 250 eV, 300 eV, 350 eV, および 400 eV の場合をそれぞれ示している. 図10から, 入射光がより多モードになるほど, スペクトル中心

部においてイオン温度の変化に伴うスペクトルの形状の変化量が少なくなることがわかるが, このことは, 入射光がより多モードになるほど散乱光のスペクトル中心部でのフィッティングの精度が悪くなることを示唆している. 実際の測定では, 不純物イオンの影響により散乱光のスペクトルは中心部が歪み¹³⁾, またスペクトルの裾野付近では S/N が悪くなると考えられるが, そのような制約に対しても下限周波数を 200 MHz 付近に設定することが得策であると考えられる.

図10. イオン温度を 200 eV から 400 eV まで変化させた場合の散乱波の理論スペクトル. (a), (b), (c) はそれぞれ入射光が単一モードの場合, 図 2 (a) の多モードである場合および図 2 (b) の多モードである場合の理論スペクトルを表す. (i) $T_i=200$ eV, (ii) $T_i=250$ eV, (iii) $T_i=300$ eV, (iv) $T_i=350$ eV, (v) $T_i=400$ eV.

表 1. 基準化標準偏差 D および基準化偏り誤差 B の Δf 依存性 ($f_L = 100 \text{ MHz}$, $f_U - f_L = 300 \text{ MHz}$)

$\Delta f \text{ (MHz)}$	フィッティング条件 (入射光モード構造)	基準化標準 偏差 D (%)	基準化偏り 誤差 B (%)
10	case 1	3.41	0.70
	case 3 mode(a)	4.41	0.88
20	case 1	3.27	0.77
	case 3 mode(a)	4.20	0.98
50	case 1	3.54	0.74
	case 3 mode(a)	4.70	0.86

からわかるように平滑化帯域幅の依存性は弱く, case 1 の場合には Δf の各値に対して $B \sim 0.7\%$, $D \sim 3.3 \sim 3.5\%$ となり, case 3 の場合においても $B \sim 0.9\%$, $D \sim 4.2 \sim 4.7\%$ とほぼ単一モードの場合と変わらない.

以上の結果より, 入射光が多モードである場合でも, そのモード構造を同時測定し, これを考慮した理論スペクトルを用い, 適切な周波数領域を選んでフィッティングを行えば, 入射光が単一モードである場合と同程度の精度でイオン温度を測定することが可能であることがわかる.

3.2. T_e , n_e の測定誤差の影響

散乱信号の理論スペクトルは, T_e , n_e の測定値を用いて計算するため, T_e , n_e の測定誤差 (ここでは簡単のため, 基準化偏り誤差は 0% とし, 基準化標準偏差のみを考えることにする.) がイオン温度の最適フィット値に誤差を生じさせる. その影響を調べるため, 以下のシミュレーションを実施した.

まず, 測定される T_e あるいは n_e 値を固定して考え, $T_e = 300 \text{ eV}$ および $n_e = 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ の値が測定されたとする. 従って, イオン温度評価のための理論スペクトルはこれらの値を用いる. 次に模擬散乱信号のスペクトルを計算する際に用いる真の T_e あるいは n_e 値については, unknown な量とし, 測定値 $T_e = 300 \text{ eV}$, $n_e = 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ を平均値とし, ある分散値をもつガウス分布に従う値として与える. すなわち, T_e および n_e の測定値のばらつきはガウス分布的であると仮定する. さて, T_e あるいは n_e の測定誤差値をガウス性乱数によって生成する際に, T_e および n_e の測定誤差はそれぞれの正規化された標準偏差で与えられると考え, 例えば T_e の測定誤差が $\pm 10\%$ の場合には平均値 300 eV , 標準偏差は 30 eV とする. このようにして模擬散乱信号スペクトルを生成し, T_e , n_e の測定値を用いて計算した理論スペクトルと最小二乗フィッティングを行う.

まず電子温度の測定誤差がイオン温度の評価に及ぼす影響について調べる. T_e の測定誤差が 0% , $\pm 10\%$, および $\pm 20\%$ の場合についてイオン温度の基準化標準偏差および基準化偏り誤差のシミュレーション結果を表 2 に示す. ここで入射光が単一モードである場合と図 2 の mode(a) または mode(b) のモード構造を持つ多モードである場合の 3 種類について考え, 多モードの場合には, そのモード構造を考慮にいった理論スペクトルとのフィッティングを行った (case 3). なお, 表 2 (a) は平滑化周波数幅 Δf は 10 MHz とし,

次に, 平滑化周波数幅 Δf の取り方が基準化標準偏差 D および基準化偏り誤差 B にどのように影響するかを示すため, 表 1 に case 1 および case 3 の各場合に対して行ったシミュレーションの結果を示す. ここで, 平滑化周波数帯域幅を 10 MHz , 20 MHz および 50 MHz と変化させ, フィッティングの下限周波数 f_L を 100 MHz に固定し, さらに観測周波数を 300 MHz とした. 表 1

表2. T_e の測定精度が基準化標準偏差Dおよび基準化偏り誤差Bに及ぼす影響(a) $\Delta f = 10 \text{ MHz}$, $f_L = 100 \text{ MHz}$ の場合

T_e の測定精度 (%)	フィッティング条件 (入射光モード構造)	基準化標準偏差 D (%)	基準化偏り誤差 B (%)
0	case 1	3.41	0.70
	case 3 mode(a)	4.94	0.88
± 10	case 1	3.68	0.78
	case 3 mode(a)	4.88	1.01
± 20	case 1	4.95	6.84
	case 3 mode(a)	6.84	0.96

(b) $\Delta f = 10 \text{ MHz}$, $f_L = 200 \text{ MHz}$ の場合

T_e の測定精度 (%)	フィッティング条件 (入射光モード構造)	基準化標準偏差 D (%)	基準化偏り誤差 B (%)
0	case 1	3.27	0.48
	case 3 mode(a)	3.28	0.57
	case 3 mode(b)	3.47	0.67
± 10	case 1	3.23	0.48
	case 3 mode(a)	3.28	0.60
	case 3 mode(b)	3.54	0.72
± 20	case 1	3.29	0.43
	case 3 mode(a)	3.44	0.56
	case 3 mode(b)	4.05	0.73

スペクトルの形状には殆ど影響を及ぼさないためである。

以上の結果より, $T_i \sim T_e \sim 300 \text{ eV}$, $n_e \sim 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ のプラズマに対して, たとえ T_e および n_e に $\pm 20\%$ 程度の測定誤差があったとしても, イオン温度を $\pm 5\%$ 程度の基準化標準誤差で測定可能であることがわかる。

本計算機シミュレーションでは, ヘリオトロン E の代表的プラズマ・パラメータのうち高密度プラズマ放電を主な測定対象として行ったが, $T_e \sim 1,000 \text{ eV}$, $T_i \sim 300 \text{ eV}$ のように電子温度が高いヘリオトロン E プラズマの場合には, 散乱スペクトルはイオン音波共鳴周波数にピークを持つスペクトル形状となる。イオン音波共鳴ピークのスペクトル形状は, T_e/T_i の値, すなわちイオン温度の値に敏感に依存するため, イオン温度の評価精度が向上することが期待される。過去, TCA トカマクで行われたイオン温度測定では, He プラズマ放電を用いることによってイオン音波共鳴ピークが顕著となるプラズマを測定対象とした実験を行い, イオン温度測定精度の向上を図っている⁵⁾。

4. 結論

本論文では, 周波数分解の優れたヘテロダイン受信検波システムによる D_2O レーザーの発振スペクトルの測定結果をもとに, 現在の多モード発振 D_2O レーザーをヘリオトロン E の高密度プラズマに適用し散乱計測を行った場合について, イオン温度の測定精度を調べるための計算機シミュレーションを行った。ただ

フィッティングの下限周波数 f_L が 100 MHz とした場合の case 1 と mode(a) 時の case 3 について, 表2 (b)は $\Delta f = 10 \text{ MHz}$, $f_L = 200 \text{ MHz}$ とした場合の case 1, mode(a) および mode(b) それぞれの場合の case 3 の場合を示している。

表2 より, T_e の測定誤差が悪くなると一般的にイオン温度の基準化標準偏差が悪くなるが, f_L が 100 MHz の場合に比べ, f_L が 200 MHz の場合には T_e の測定誤差が $\pm 20\%$ に及んでもイオン温度の基準化標準偏差は高々 4% 程度であり, イオン温度評価への影響は殆ど無視できることがわかる。これは先に述べた理由と同様にスペクトル形状の変化がスペクトル裾野側で T_e 依存性が弱くなるためであると考えられる。一方, n_e の測定精度の影響は, n_e の測定誤差が $\pm 20\%$ に及んでもまったく現れなかった。これは, n_e の値は $\alpha (= (k\lambda_D)^{-1})$ に関係するが, $\alpha \gg 1$ であるため

し、電子、イオンの速度分布はいずれも Maxwell 分布であると仮定した。その結果、 D_2O レーザーの発振スペクトルを散乱波信号と同時測定し、これを考慮した理論スペクトルを用いて、なおかつ最適な周波数領域を選んでフィッティングを行えば、イオン温度の測定精度（ここでは基準化標準偏差 D と基準化偏り誤差 B の両者を意味する）がモード構造を考慮しない場合に比べて大幅に改善され、入射光が単一モードである場合と同程度の測定精度、即ち $D \sim 3.3\%$ 、 $B \sim 0.7\%$ でイオン温度を測定できることを示した。これらの測定誤差の値は、参考文献9)~12)で報告されている値 ($D \sim 10\%$) よりも小さくなっているが、これは最小二乗法の重み関数の導入によって、より精度良くフィッティングすることが可能になったためである。ちなみに、重み関数を 1 とした場合のシミュレーション結果は、基準化偏り誤差についても大きくなり、 $B \sim 10\%$ が最小値となることを確認している。また、電子温度及び電子密度の測定誤差がイオン温度の測定値に与える影響について調べた結果、これらはほとんどイオン温度の測定精度に殆ど影響を与えないことを示した。

本研究ではイオン温度 300 eV 程度のヘリオトロン E プラズマを主な測定対象としたが、現在、中・大型核融合実験装置で得られているような 1 keV 以上のイオン温度を持つプラズマに対しても、本研究で示した多モード発振遠赤外線レーザーによるイオン・トムソン散乱計測は適用可能である。例えば、イオン温度が 1 keV 以上のプラズマに対し、波数として前記の値を用いるとイオン・ドップラー広がり幅 f_{ion} は 450 MHz 以上の広帯域スペクトルとなる。入射波が図 1 に示したような多モード発振構造を持つ場合には、散乱波スペクトルは図 3 と同様なスペクトル広がり (case(a)で約 20 MHz, case(b)で約 60 MHz) を生じる。 f_{ion} に対するこのスペクトル広がり幅の比は $T_i \sim 300$ eV の場合に比べると相対的に小さくなるが、case 2 のフィッティング法によるイオン温度評価では、依然として、偏り誤差は case(a)で約 10%、case(b)で約 30 % であり、入射光源の多モード発振の効果は無視できない。これに対し、case 3 のように入射光源のスペクトルが既知である場合には、散乱波スペクトルを良好な S/N で、かつ周波数分解よく測定可能であるならば 1 keV 以上のイオン温度を持つプラズマに対しても本研究で示した評価誤差程度でイオン温度を測定することが可能である。現在、帯域幅 1 GHz を有する高速デジタイザも市販されており、デュアル・ホモダイン検波方式による受信検波システムを採用すれば、全帯域幅 2 GHz にわたる散乱波スペクトル解析も可能である。また、散乱波スペクトルの半値幅が 1 GHz 以上となるイオン温度測定に対しては、フィルター方式による散乱波受信検波系を用いることも考えられる。

本研究の計算機シミュレーションでは、レーザーの発振スペクトル線の広がり幅を無視して解析を行ったが、簡単な数値評価からこの効果は無視できることが示される。例えば、スペクトル線の広がりを測定結果の半値幅 $\Delta f_L \sim 5$ MHz とし、真のイオン・ドップラー広がり幅が $f_{ion} \sim 300$ MHz である場合を考える。これらがともにガウス分布のスペクトル形状で近似できる場合、散乱波スペクトルの広がりの寄与は $(\Delta f_L / f_{ion})^2 \sim 0.03\%$ 程度であることが示され¹⁴⁾、このため、線スペクトルの広がりの効果はほとんど無視できることがわかる。

また本論文では、不純物イオンの寄与を無視し、スペクトルの裾野領域でのフィッティングを行うことによってイオン温度の評価を行ったが、本研究で示した最小二乗法の適用により不純物イオンの寄与はかなり軽減されるものと期待される。

謝辞

本研究を進めるにあたり、有益な助言を頂いた京都大学ヘリオトロン核融合研究センター・大引得弘博士、佐野史道博士、核融合科学研究所・須藤 滋博士、佐藤浩之助博士、大阪産業大学・綱脇恵章博士、九州大学・岡田龍雄博士および中部大学・岡島茂樹博士に深く感謝します。また D_2O レーザーのスペクトル測定に際しては、京都大学ヘリオトロン核融合研究センターの方々に協力を得ました。ここに謝意を表します。ショットキ・バリア・ダイオードチップの供与では、つね日頃、東北大学電気通信研究所水野皓司博士にご協力を頂きました。ここに深く感謝致します。

なお、本研究の一部は、平成3年度核融合科学研究所の共同研究の一環として行われたものであり、計算機シミュレーションに関しては同研究所計算機利用共同研究として行われた。

参 考 文 献

- 1) 例えば, O. V. Orlinsij nd G. Magyar : Nuclear Fusion **28** (1988) 611.
- 2) A. E. Costley : Private Communication.
- 3) J. S. Machuzak *et al.* : Rev. Sci. Instrum. **61** (1990) 3544 ; H. Park : Private Communication.
- 4) P. Woskoboinikow *et al.* : *Europhysics Conference Abstract of 11th European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics*, Aachen (1983) Vol. 7D, Part II, P. 81.
- 5) R. Behn *et al.* : Phys. Rev. Lett. **62** (1989) 2833.
- 6) M. Nagatsu *et al.* : *Conference Digest on 16th Intl Conf. on Infrared and Millimeter Waves*, Lausanne, 1991 pp250-252.
- 7) P. Woskoboinikow *et al.* : IEEE J. Quantum Electron. QE-19 (1983) 4.
- 8) R. Behn, *et al.* : IEEE J. Quantum Electron. QE-24 (1988) 549.
- 9) L. E. Sharp, *et al.* : Plasma Phys. **23** (1981) 357.
- 10) R. L. Watterson *et al.* : J. Appl. Phys. **52** (1981) 3249.
- 11) M. R. Siegrist *et al.* : Plasma Phys. **24** (1982) 1449.
- 12) P. A. Krug *et al.* : Plasma Physics and Controlled Fusion **32** (1990) 713.
- 13) D. E. Evans : Plasma Phys. **12** (1969) 573.
- 14) Y. Takeiri, T. Tsukishima *et al.* : Plasma Phys. Lab. Kyoto University Research Rep. PPLK-R-37 (1989).

付録. 入射波が多モード発振成分をもつ場合の散乱波パワースペクトル

入射波電界 E_i は次式で表されたとする.

$$E_i = \sum_n E_n \cos(\omega_{in} t' - \mathbf{K}_{in} \cdot \mathbf{r}' + \phi_n) \quad (\text{付-1})$$

ここで, E_n , ω_{in} , $\mathbf{K}_{in}$, ϕ_n はそれぞれ, n 番目のモードの電界振幅ベクトル, 角周波数, 波数ベクトル, 位相を表す.

一つの電子が受ける加速度 $\dot{\mathbf{V}}$, 及び $\mathbf{e}_s$ 方向に散乱された時刻 t , 位置 $\mathbf{R}$ における散乱波電界 $E_s(\mathbf{R}, t)$ は,

$$\dot{\mathbf{V}} = \frac{e}{m} \mathbf{E}_i \quad (\text{付-2})$$

$$E_s(\mathbf{R}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} [\mathbf{e}_s \times (\mathbf{e}_s \times \dot{\mathbf{V}})]_{t'} \quad (\text{付-3})$$

ただし, e 及び m はそれぞれ電子の電荷及び質量, ϵ_0 は真空の誘電率, c は光速であり, t' は観測点までの遅延時間を考慮し次式で与えられる.

$$t' = t - (R - \mathbf{r}' \cdot \mathbf{e}_s)/c \quad (\text{付-4})$$

(付-2) 式を (付-3) 式へ代入して,

$$E_s(\mathbf{R}, t) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m c^2} \cdot \frac{1}{R} [\mathbf{e}_s \times (\mathbf{e}_s \times \mathbf{E}_i)]_{t'} \quad (\text{付-5})$$

(付-1) 式より,

$$E_s(\mathbf{R}, t) = \frac{r_e}{R} \sum_n \left\{ \mathbf{e}_s \times (\mathbf{e}_s \times \mathbf{E}_n) \right\} \cos(\omega_{in} t' - \mathbf{K}_{in} \cdot \mathbf{r}' + \phi_n) \quad (\text{付-6})$$

ここに, $r_e = e^2 / (4\pi\epsilon_0 m c^2)$ は電子の古典半径である.

時刻 t' に位置 $\mathbf{r}'$ を中心に微小体積 $d\mathbf{r}'$ 内に存在する $n(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}'$ 個の電子は同位相で散乱波電界に寄与する. 従って,

$$E_s(\mathbf{R}, t) = \frac{r_e}{R} \operatorname{Re} \left\{ \sum_n \int \left\{ \mathbf{e}_s \times (\mathbf{e}_s \times \mathbf{E}_n) \right\} n(\mathbf{r}', t') \right. \\ \left. \times \exp \left\{ j(\omega_{in} t' - \mathbf{K}_{in} \cdot \mathbf{r}' + \phi_n) \right\} d\mathbf{r}' \right\} \quad (\text{付-7})$$

ただし, $\operatorname{Re}[\cdot]$ は $[\cdot]$ の実数部を意味する. (付-7) 式は, 散乱波電界 $E_s(\mathbf{R}, t)$ が各モードについての散乱波を重ね合わせたものとして表されることを示している.

さて, $n(\mathbf{r}', t')$ のフーリエ変換を $n(\mathbf{k}, \omega)$ と示すと,

$$n(\mathbf{r}', t') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{K}}{(2\pi)^3} n(\mathbf{K}, \omega) \exp \left\{ j(\omega t' - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r}') \right\} \quad (\text{付-8})$$

以下, 簡単のため $\mathbf{e}_s$ が $\mathbf{E}_n$ に垂直な場合のみを考える.

(付-4), (付-8) 式を (付-7) 式に代入し整理すると $E_s(\mathbf{R}, t)$ は次のように表せる.

$$E_s(\mathbf{R}, t) = -\frac{r_e}{R} \sum_n E_n \operatorname{Re} \left[\exp(j\phi'_n) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} n(\mathbf{K}_n, \omega) \right. \\ \left. \times \exp \left\{ j(\omega_{in} + \omega)t \right\} \right] \quad (\text{付-9})$$

ここで,

$$\mathbf{K}_n = \mathbf{K}_{sn} - \mathbf{K}_{in}, \mathbf{K}_{sn} = \frac{\omega_{sn}}{c} \mathbf{e}_s \quad (\text{付-10}) \\ \omega_{sn} = \omega_{in} + \omega$$

また,

$$n(\mathbf{K}_n, \omega) = \int \frac{d\mathbf{K}}{(2\pi)^3} n(\mathbf{K}, \omega) I(\mathbf{K} - \mathbf{K}_n) \quad (\text{付-11})$$

$$I(\mathbf{K} - \mathbf{K}_n) = \int d\mathbf{r}' \exp \left\{ -j(\mathbf{K} - \mathbf{K}_n) \cdot \mathbf{r}' \right\} \quad (\text{付-12})$$

$$\phi'_n = -\omega_{sn} \frac{R}{c} + \phi_n \quad (\text{付-13})$$

(付-12) 式により $I(\mathbf{k} - \mathbf{k}_n)/(2\pi)^3$ はデルタ関数 $\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_n)$ に帰着される.

次に, 散乱波電界 $E_s(\mathbf{R}, t)$ のパワースペクトル密度 $P_s(\omega)$ を求めるため, (付-9) 式の次式のよう
に書き直す.

$$E_s(\mathbf{R}, t) = -\frac{r_e}{R} \sum_n \frac{E_n}{2} \exp(j\phi'_n) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} n(\mathbf{K}_n, \omega) \exp j(\omega_{in} + \omega)t \\ + c.c. \quad (\text{付-14}) \\ \equiv \sum_n \left\{ A_n(t) + A_n^*(t) \right\}$$

ここで, c.c. および $*$ は複素共役を表し, $A_n(t)$ を次式で定義した.

$$A_n(t) = -\frac{r_e}{R} \frac{E_n}{2} \exp(j\phi'_n) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} n(\mathbf{K}_n, \omega) \exp j(\omega_{in} + \omega)t$$

(付-14) 式より, 散乱波電界の二乗時間平均値を求めると,

$$\langle |E_s(\mathbf{R}, t)|^2 \rangle = \left\langle \sum_n [A_n + A_n^*] \sum_m [A_m + A_m^*] \right\rangle \\ = \sum_n \sum_m \langle A_n A_m + A_n^* A_m + A_n A_m^* + A_n^* A_m^* \rangle \quad (\text{付-15})$$

上式右辺の各項のうち, $\langle A_n A_m \rangle$, $\langle A_n^* A_m^* \rangle$ の項は有限の周波数 $(\omega_{in} + \omega_{im})$ で振動する成分を持つため, 時間積分により零となる. 結局, (付-15) 式で残ってくる項は, $\langle A_n^* A_m + A_n A_m^* \rangle$ のうち, $n=m$ の項のみとなる.

このため,

$$\begin{aligned}
& \langle |E_s(\mathbf{R}, t)|^2 \rangle \\
&= \frac{r_e^2}{R^2} \sum_n \frac{|E_n|^2}{2} T \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \\
&\quad \times n(\mathbf{K}_n, \omega) n(\mathbf{K}_n, \omega')^* \exp\{j(\omega - \omega')t\} \\
&= \frac{r_e^2}{R^2} \sum_n \frac{E_n^2}{2} T \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \\
&\quad \times n(\mathbf{K}_n, \omega) n(\mathbf{K}_n, \omega')^* \delta(\omega - \omega') \\
&= \frac{r_e^2}{R^2} \sum_n \frac{E_n^2}{2} T \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} |n(\mathbf{K}_n, \omega)|^2
\end{aligned}$$

さて、多モード発振成分の入射光を用いた場合の散乱波パワースペクトル密度 $P_s(\omega)$ を表す際に、散乱波周波数領域の周波数軸 ω_s を用いて表すことにする。このため、上式の右辺において $\omega = \omega_s - \omega_{in}$ と書き直し、単位面積当たりの n 番目のモードの入射パワーを p_{in} 、実効散乱領域の体積を V_s 、散乱領域での平均電子密度 n_e 、実効受光面積を A とすると、受光系に入る全散乱波のパワースペクトル密度 $P_s(\omega_s)$ は、

$$P_s(\omega_s) = r_e^2 V_s \frac{A}{R^2} \sum_n P_{in} T \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{TV_s} n(\mathbf{K}_n, \omega_s - \omega_{in}) \quad (\text{付-16})$$

となる。ここで、動的構造因子 (dynamic form factor) $S(\mathbf{k}_n, \omega_s - \omega_{in})$ を次式で定義すると、

$$S(\mathbf{K}_n, \omega_s - \omega_{in}) \equiv T \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{TV_s} \frac{|n(\mathbf{K}_n, \omega_s - \omega_{in})|^2}{n_e} \quad (\text{付-17})$$

$P_s(\omega_s)$ は、散乱領域の長さを ℓ 、受光面が散乱中心に対して張る立体角を $\Delta\Omega (=A/R^2)$ 、 n 番目のモードのパワーを P_{in} として

$$P_s(\omega_s) = r_e^2 n_e \ell \Delta\Omega \sum_n P_{in} S(\mathbf{K}_n, \omega_s - \omega_{in}) \quad (\text{付-18})$$

で与えられる。