電子の反跳によるプラズマ振動数の振幅依存性^{*}

法 橋 ^{***} 登 (日立中研、カナダ原子力公社)

The amplitude-dependent frequency of plasma oscillation is obtained by using a consistent set of Maxwell equations and the equation of motion for an electron wave packet. The amplitude-dependent term in the dispersion relation is seen to be proportional to the recoil energy which is gained (lost) by an electron in absorbing (emitting) a plasmon.

プラズマ波に伴う電場のポテンシャル $e\varphi(t) \cos(\omega(t)t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ のなかにおかれた電子の波動方程式は

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \varphi + e\varphi \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \psi \quad (1)$$

である。 φ, ω は一般に時間の函数であるが、 φ の変化は

$$\frac{\partial(e\varphi)}{\partial t} \times \left(\frac{2\pi}{\omega}\right) / \hbar\omega \ll 1 \quad (2)$$

の程度にゆるやかであるとする。(2)により(1)にあらわれる φ, ω は考えている時刻の附近では一定=その時刻の瞬間値であるとして縮退系の摂動論¹⁾を用いれば運動量 $\mathbf{P}$ の電子のエネルギー W および有効質量 m^* に対して次の表式を得る。

$$V = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + \frac{1}{2m} (\mathbf{P} \pm \hbar \mathbf{k})^2 \mp \hbar\omega \pm \sqrt{\left\{ \frac{1}{2m} (\mathbf{P} \pm \hbar \mathbf{k})^2 \mp \hbar\omega - \frac{\mathbf{P}^2}{2m} \right\}^2 + (e\varphi)^2} \right\} \quad (3)$$

$$\frac{1}{m^*} = \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{P}^2} \cong \frac{1}{m} \left[1 \pm \frac{\hbar^2 k^2 / m}{\left\{ \left(\frac{1}{2m} (\mathbf{P} \pm \hbar \mathbf{k})^2 \mp \hbar\omega - \frac{\mathbf{P}^2}{2m} \right)^2 + (e\varphi)^2 \right\}^{1/2}} \right] \quad (4)$$

* Dependence of Plasma Frequency on Amplitude due to Electron Recoil

*** N. Hokkyo (Hitachi Cent. Research Lab., Atomic Energy of Canada Ltd.)

(3)で

$$\frac{1}{2m} (P \pm \hbar k)^2 \mp \hbar \omega - \frac{p^2}{2m} = 0 \quad (5)$$

を満足するPの値でenergy gap があらわれるが、これは電子Pによるプラズモンの吸収（複号上）、放出（複号下）の際のエネルギー・運動量の保存則にはかならない。ポテンシャルとともに ω/k で動く wave system でみれば (5) は Bragg の反射条件になる。(3), (4)でマルで囲った複号はPがバンド理論でいう first zone に属するとき、second zone に属するとき+である。^{*}

第1図 Wave system で Bragg の条件（エネルギーギャップ）が成立つところでプラズモンの吸収、放出が行われる

※ 波動函数をしらべればわかるように、second zone の電子はポテンシャルをつぶすように、first zone の電子はたすけるようにはたらく。このことからポテンシャルの decay, build up の条件がでる筈である。nuclear matter の Overhauser model³⁾では second zone が unoccupied states になっている。

電子の反跳によるプラズマ振動数の振幅依存性

さて電子の群速度あるいは電子波束の速度 $\mathbf{v} = \partial \mathbf{w} / \partial \mathbf{P}$ の時間変化

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \mathbf{P}^2} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \varphi \partial \mathbf{P}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \mathbf{P}^2} (e \nabla \varphi) + \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \varphi \partial \mathbf{P}} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

で簡単のため

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \ll \left(\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \mathbf{P}^2} / \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \varphi \partial \mathbf{P}} \right) e (\nabla \varphi) \quad (7)$$

と仮定すれば $\partial^2 \mathbf{w} / \partial \mathbf{P}^2 = 1 / m^*$ であるから、 $\mathbf{E} = \nabla \varphi$ として

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{e \mathbf{E}}{m^*} \quad (7)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = e \nabla \varphi / m^*, \quad m^* = m^*(e \varphi)$$

第2図 波束には入射電子波とポテンシャルによる反射電子波とが混ざっている。

次に Maxwell 方程式

$$\nabla \mathbf{E} = 4\pi e (n - n_0) \quad (8)$$

(n_0 : イオン密度、 n : 電子密度)

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi e}{c} n \mathbf{v} = 0 \quad (9)$$

から²⁾

$$\frac{d \mathbf{E}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \mathbf{E} = -4\pi e \mathbf{v} \quad (10)$$

(10) をもう一度時間で微分して (7), (4) を用い、 $\mathbf{E}$ を φ にもどすと

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega_p^2 \left[1 \pm \frac{\hbar^2 k^2 / m}{\left[\left(\frac{1}{2m} (\mathbf{P} \pm \hbar \mathbf{k})^2 \mp \hbar \omega - \frac{\mathbf{P}^2}{2m} \right)^2 + (e\varphi)^2 \right]^{1/2}} \right] \varphi = 0 \quad (11)$$

(11) で $d^2/dt^2 \rightarrow (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2 \simeq (\omega - \mathbf{k}\mathbf{P}/m)^2$ として電子の等方的運動量分布と $(\mathbf{k}\mathbf{P}/m)/\omega \ll 1$ を仮定すると

$$\begin{aligned} \omega^2(\mathbf{k}) = & \omega_p^2 \left[1 + \left(\sum_{\mathbf{P}}^2 - \sum_{\mathbf{P}}^1 \right) \frac{\hbar^2 k^2 / m}{\left[\left(\frac{1}{2m} (\mathbf{P} \pm \hbar \mathbf{k})^2 \mp \hbar \omega - \frac{\mathbf{P}^2}{2m} \right)^2 + (e\varphi)^2 \right]^{1/2}} \right] \\ & + \sum_{\mathbf{P}} k^2 (\mathbf{P}/m)^2 \end{aligned} \quad (12)$$

ただし $\sum^2, \sum^1$ はそれぞれ second zone, first zone に属する $\mathbf{P}$ についての和、すなわち $\sum^2$ は $\mathbf{P}/m \leq \omega/k \mp \hbar k/2m$, $\sum^1$ は $\mathbf{P}/m \leq \omega/k \pm \hbar k/2m$ なる $\mathbf{P}$ についての和である。(12) で電子の反跳エネルギー $\hbar k^2/2m \rightarrow 0$ とすれば通常の分散関係になる。 ω は (11) の解として得られる φ を通して時間に関係する。

参 考 文 献

- 1) J.C. Slater, Rev. Mod. Phys. 30 (1958) 192
- 2) R.V. Polovin, JETP 4 (1957) 290
- 3) A.W. Overhauser, Phys. Rev. 4 (1960) 415