プラズマ柱によるマイクロ波の散乱Ⅲ[※]水 野 幸 雄 (東大理)^{※※}

§ 1 は し が き

筆者は先に入射波が平面波の場合、および電気双極子輻射の場合¹⁾のプラズマ円柱による散乱波を与える公式を導いた。入射波が磁気双極子輻射の場合も全く同様に散乱波の公式が求まる。実験条件によつては波源は磁気双極子でよりよく近似される場合もあるであろうし、また電気双極子と磁気双極子とは一諸になつて一つのまとまつた体系をつくとも考えられるので、この場合を求めておくことも多少の意味はあるであろう。§ 2ではこの計算の結果を電気双極子の場合とまとめて報告する。§ 3では木原先生が昔に提出された一つの補助定理を引用する。それを用いると磁気双極子輻射の散乱波が電気双極子輻射の散乱波から比較的容易に求まる。また逆に後者も前者から容易に導かれる。附録ではこの補助定理の証明を与える。

§ 2 磁気および電気双極子輻射波の散乱

例によつて第1図のような配位を考えることにして、S点に磁気双極子 $\mathbf{m} e^{j\omega t}$ をおくとQ($\mathbf{r}'$)点の電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r}')$ は次のポテンシャルから導かれる。³⁾

第 1 図

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{r}') = 0 \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}') = \left(\frac{j\mathbf{k}}{R_1^2} + \frac{1}{R_1^3} \right) e^{j\omega t - jkR_1} (\mathbf{m} \times \mathbf{R}_1) \end{cases}$$

ただし ここで $\mathbf{R}_1 = \vec{SQ}$, $R_1 = |\mathbf{R}_1|$, $k = \omega/c$ をあらわす。

この式からQ点での電場は次のように求まる。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}') = \frac{k^2}{R_1^2} \left(1 - \frac{j}{kR_1} \right) e^{j\omega t - jkR_1} (\mathbf{m} \times \mathbf{R}_1) \quad (2.1)$$

※ The Scattering of microwaves by a Plasma Cylinder, Ⅲ.

※※ Y. Midzuno (Dept. of Phys. Tokyo University)

後は前の論文²⁾と全く同じ方法で散乱波を求めることができる。

S 点に z 方向の単位の強さの電気双極子 $e^{j\omega t}$ をおいたときの散乱波の電場を $E_s^{ez}(r, t)$, 磁気双極子をおいたときのそれを $E_s^{mz}(r, t)$ とおき、 $E_s^{ex}(r, t)$, $E_s^{ey}(r, t)$, $E_s^{mx}(r, t)$, $E_s^{my}(r, t)$ も同様に定義すると、前の論文から

$$E_s^{ez}(r, t) = G(\theta) \{ -u [N + u^2 L_1(\theta)] e_\rho + u(1 + u^2) L_2(\theta) e_\theta + [N + u^2 L_1(\theta)] e_z \} \quad (2.2)$$

が得られ、また (2.1) を用いての計算から

$$E_s^{mz}(r, t) = G(\theta) \sqrt{1 + u^2} \{ u^2 L_2(\theta) e_\rho + (1 + u^2) L_1(\theta) e_\theta - u L_2(\theta) e_z \} \quad (2.3)$$

が得られる。ただしここで次の記号を用いた。

$$G(\theta) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{3}{4} \pi j} \frac{k^4 (\ell + \rho)^4}{\sqrt{k \ell \rho} [(\ell + \rho)^2 + z^2]^{\frac{3}{4}}} \exp [j (\omega t - k \sqrt{(\ell + \rho)^2 + z^2})] \\ \times \int_0^\infty \eta(\rho') J_0 \left(\frac{\ell + \rho}{\sqrt{(\ell + \rho)^2 + z^2}} 2 k \rho' \sin \frac{\theta}{2} \right) \rho' d\rho', \quad (2.4)$$

$$\left. \begin{aligned} L_1(\theta) &= L \cos \theta - j M \sin \theta \\ L_2(\theta) &= L \sin \theta + j M \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

$$u = \frac{z}{\ell + \rho} \quad (2.6)$$

また ℓ, ρ, z は同じ程度に大きい量とし $1/k\ell, 1/k\rho$ に関して最低次の項のみをとった。補正項は主要項に比して $1/k\ell$ または $1/k\rho$ の程度だけ小さい量である。

その他の方向の双極子輻射源の場合の散乱波の電場の主要項は

$$E_s^{ex}(r, t) = -u E_s^{ez}(r, t) \quad (2.7)$$

$$E_s^{my}(r, t) = -\sqrt{1 + u^2} E_s^{ez}(r, t) \quad (2.8)$$

$$E_s^{ey}(r, t) = \sqrt{1 + u^2} E_s^{mz}(r, t) \quad (2.9)$$

$$E_s^{mx}(r, t) = -u E_s^{mz}(r, t) \quad (2.10)$$

で与えられる。

次に $u \rightarrow 0$ および $u \rightarrow \pm\infty$ でのこれらの電場の間の関係を考えておこう。

i) $u \rightarrow 0$

$$|L_1(\theta) E_s^{ez}(r, t)| \approx |N E_s^{mz}(r, t)| \quad (2.11)$$

$$E_s^{ez}(r, t) \approx -E_s^{my}(r, t), \quad E_s^{ex}(r, t) \approx 0 \quad (2.12)$$

$$E_s^{ey}(r, t) \approx E_s^{mz}(r, t), \quad E_s^{mx}(r, t) \approx 0 \quad (2.13)$$

ii) $u \rightarrow \pm\infty$

$$E_s^{mz}(r, t) \approx \pm E_s^{ez}(r, t) \times \theta_z \quad (2.14)$$

$$E_s^{ex}(r, t) \approx \pm E_s^{my}(r, t), \quad E_s^{ez}(r, t) \approx 0 \quad (2.15)$$

$$E_s^{mx}(r, t) \approx \mp E_s^{ey}(r, t), \quad E_s^{mz}(r, t) \approx 0 \quad (2.16)$$

(複写は上下同順)

(2.11)は(2.13)と合せて考えると既に平面波の場合に指摘した関係式に相当することがわかる。(2.12), (2.13), (2.15), (2.16)はそれぞれの双極子をおいたときの一次波の様子を考えれば容易に理解できよう。例えば(2.12)の最初の式は次の意味で有用である。それは第2図のような導波管の切口から放射される波を双極子場で近似するとき、この波は z 方向の電気双極子場とも、

y 方向の磁気双極子場とも見做せるが、

この式によれば $z = 0$ の面内では、そのどちらと考えても結果が同じであるので、実際との比較の際、この種の曖昧さがさけられる。

第2図

§ 3. "木原"の補助定理とその応用

1947年に木原先生は導波管に関連して次の補助定理を提出した。¹⁾

補助定理 I

(x_0, y_0, z_0) の位置に x 方向を向いた単位能率 $e^{j\omega t}$ の磁(電)気双極子がおかれたときのヘルツ・ベクトルを $\Pi^{mx} (\Pi^{ex})$ で表わし、 $\Pi^{my} (\Pi^{ey})$ 等も同様に定義すると

$$\Pi^{mx} = \frac{1}{jk} \left(\frac{\partial}{\partial y_0} \Pi^{ez} - \frac{\partial}{\partial z_0} \Pi^{ey} \right) \quad (3.1)$$

$$\Pi^{ex} = -\frac{1}{jk} \left(\frac{\partial}{\partial y_0} \Pi^{mz} - \frac{\partial}{\partial z_0} \Pi^{my} \right) \quad (3.2)$$

および、これらの式で (x, y, z) を cyclic に交換した関係式が成立する。」

補助定理II

$$\left[(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_0^2}) \Pi^{mx} = \frac{\partial}{\partial x_0} \frac{\partial}{\partial z_0} \Pi^{mz} - jk \frac{\partial}{\partial y_0} \Pi^{ez} \right] \quad (3.3)$$

$$\left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_0^2} \right) \Pi^{ex} = \frac{\partial}{\partial x_0} \frac{\partial}{\partial z_0} \Pi^{ez} + jk \frac{\partial}{\partial y_0} \Pi^{mz} \quad (3.4)$$

および、これらで $\Pi^{mx} \rightarrow \Pi^{my}$, $\Pi^{ex} \rightarrow \Pi^{ey}$, $x_0 \rightarrow y_0$, $y_0 \rightarrow -x_0$ のおきかえで得られる関係式が成立する。」

$\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ はヘルツ・ベクトルから微分演算だけで得られるから、例えば導体円柱の外部の輻射場の計算などにはこれらの補助定理が極めて有効である。

これらの公式はヘルツ・ベクトルの代りに電場 $\mathbf{E}$, または磁場 $\mathbf{B}$ 自身を用いても成立する。このことを用いると、S 点に磁気双極子がおかれている場合のプラズマ円柱による散乱波は、電気双極子輻射の散乱波の公式から容易に計算される。すなわち ℓ, ρ, z を同じ程度に大きい量とすると、 $\mathbf{E}_s^{ex}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{E}_s^{ey}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{E}_s^{ez}(\mathbf{r}, t)$ は皆同じ程度の大きさの量であるが

$$\frac{\partial}{\partial x_0} = -\frac{\partial}{\partial \ell}, \quad \frac{\partial}{\partial y_0} = -\frac{1}{\ell} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial z_0} = -\frac{\partial}{\partial z} \quad (3.5)$$

であり、 $\exp[j(\omega t - k\sqrt{(\ell+\rho)^2 + z^2})]$ を微分して得られる項以外はすべて一次だけ高次の項を与えることを考慮すると、例えば $\mathbf{E}_s^{mx}(\mathbf{r}, t)$ の主要項は

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s^{mx}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{jk} \left(\frac{\partial}{\partial y_0} \mathbf{E}_s^{ez}(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial z_0} \mathbf{E}_s^{ey}(\mathbf{r}, t) \right) \\ &\approx \frac{1}{jk} \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{E}_s^{ey}(\mathbf{r}, t) \\ &\approx -\mathbf{E}_s^{ey}(\mathbf{r}, t) \frac{z}{\sqrt{(\ell+\rho)^2 + z^2}} \end{aligned} \quad (3.6)$$

として簡単に求まる。これらの定理はもつと高次の項を計算するときも有効に利用されることが

できる。

終りに色々と御指導をいただいた木原先生に感謝いたします。

附 録 補 助 定 理 の 証 明

木原先生の前証明は磁気双極子が4つの電気双極子の組で表現できるという直観的なものであった。ここでは少し別の見方からの証明を与える。

一般に誘電体の存在する空間に電気双極子または磁気双極子の源がおかれたときの電磁場を求める問題とは、具体的に云えば ϵ が一般に場所の函数であつて $\mathbf{J}$ や ρ が0であるときのマクスウェル方程式と適当な境界条件とを満足する解であつて、波源の近傍でそれぞれの波源の特異性をもつようなものを見出すことを意味する。波源が誘電体の外におかれていれば、この特異性は真空中のそれぞれの双極子の電磁場

電気双極子

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{E}^e(\mathbf{r}, t) &= \left\{ k^2 \left(\frac{\mathbf{e}}{R} - \frac{\mathbf{R}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{R})}{R^3} \right) - jk \left(\frac{\mathbf{e}}{R^2} - \frac{3\mathbf{R}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{R})}{R^4} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\mathbf{e}}{R^3} - \frac{3\mathbf{R}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{R})}{R^5} \right) \right\} e^{j(\omega t - kR)} \quad (\text{A} \cdot 1) \\ \mathbf{B}^e(\mathbf{r}, t) &= \left\{ -k^2 \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{R}}{R^2} + jk \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{R}}{R^3} \right\} e^{j(\omega t - kR)} \quad (\text{A} \cdot 2) \end{aligned} \right.$$

磁気双極子

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{E}^m(\mathbf{r}, t) &= \left\{ k^2 \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{R}}{R^2} - jk \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{R}}{R^3} \right\} e^{j(\omega t - kR)} \quad (\text{A} \cdot 3) \\ \mathbf{B}^m(\mathbf{r}, t) &= \left\{ k^2 \left(\frac{\mathbf{e}}{R} - \frac{\mathbf{R}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{R})}{R^3} \right) - jk \left(\frac{\mathbf{e}}{R^2} - \frac{3\mathbf{R}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{R})}{R^4} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\mathbf{e}}{R^3} - \frac{3\mathbf{R}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{R})}{R^5} \right) \right\} e^{j(\omega t - kR)} \quad (\text{A} \cdot 4) \end{aligned} \right.$$

で与えられる。ただしここで $\mathbf{e}$ は双極子の向きをあらわす単位ベクトル、 $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ 、 $\mathbf{r}_0$ は波源の位置、 $R = |\mathbf{R}|$ である。ところがマクスウェル方程式も境界条件も一般に場に対して線型であるから、例えば $\mathbf{E}^{ex}(\mathbf{r}, t)$ 、 $\mathbf{E}^{ey}(\mathbf{r}, t)$ が解ならば、その任意の一次結合、従つて $(\partial/\partial y_0)\mathbf{E}^{ex}(\mathbf{r}, t)$ などもやはり解になっている。従つて $\mathbf{E}^{ex}(\mathbf{r}, t)$ と $\mathbf{E}^{ey}(\mathbf{r}, t)$ とから適当な一次結合をつくつて、それが $\mathbf{E}^{mz}(\mathbf{r}, t)$ と同じ特異性を波源の近傍で持つよう

水 野 幸 雄

に出来れば、得られたものは $E^{mz}(r, t)$ 自身にほかならない。かくして双極子の電場の間の線型な関係式は、それが真空中の式 (A・1) ~ (A・4) に対して成立すれば波源の外に物体があつてもやはり成立する。磁場の間の関係式も同様である。所が (A・1) ~ (A・4) に対しては (3.1) および (3.2) と同型の関係式が成立することは直接計算によつて容易に確かめられる。かくして補助定理 I が証明された。補助定理 II は I から容易に導かれる。

波源の近傍が一様等方な媒質で満されている場合も特異性は (A・1) ~ (A・4) に似た式で与えられ、同じ議論が成立つのでやはり補助定理が成立する。しかし もつと一般のときは磁気双極子のつくる場の意味が曖昧になり、はつきりした話をするとはむずかしい。

なお、§ 1 で扱つた Born 近似の問題では定理が入射波に対して成立すれば充分であるから、話はずつと簡単である。

参 考 文 献

- 1) 水野 : 核融合研究 5 (1960) 383, 6 (1961) 28, 126,
Y. Midzuno : J. Phys. Soc. Japan 16 (1961) 971.
- 2) Y. Midzuno : J. Phys. Soc. Japan 16 (1961) 1403.
- 3) 小谷 : 電磁気学 (岩波講座, 現代物理学 I. B.) p79.
- 4) 寺沢寛一編 : 自然科学者のための数学概論、応用編 (岩波, 1960) p593.