プラズマの境界層 II^{*}

— Maxwell 分布の場合 —

伏見 康治 (プラズマ研)^{**}
 矢島 信男 (プラズマ研)
 都築 俊夫 (阪大理)^{**}

1° 磁場により閉じこめられたプラズマの境界層における static な振舞についての知識を与えるマックスウェル方程式は、前の報告⁽¹⁾で与えた。空間座標 x 点における、ベクトル及びスカラーポテンシャルを夫々 $A(x)$, $\Phi(x)$ とし、この点における粒子圧を $P(A, \Phi)$ とすると

$$\begin{cases} \frac{d^2 \Phi}{dx^2} = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial P}{\partial \Phi} \\ \frac{d^2 A}{dx^2} = -\mu \frac{\partial P}{\partial A} \end{cases} \quad (1)$$

である。ここで

$$P(A, \Phi) = \int 2mU(x) n(\vec{u}) u d^3 u \quad (2)$$

$$U^2(x) = u^2 - \frac{2e}{m} \Phi(x) + \frac{2e}{m} vA(x) - \frac{e^2}{m^2} A^2(x)$$

であり、 $n(u, v, w)$ は、プラズマの十分内部 $x \rightarrow -\infty$ でのプラズマ粒子の速度分布関数である。又積分領域は $x \geq x' > -\infty$ のすべての x' に対して $U(x') > 0$ である。

(1) の第一積分は

$$\frac{1}{2\mu} \left(\frac{dA}{dx} \right)^2 - \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{d\Phi}{dx} \right)^2 + P(A, \Phi) = \text{const.} \equiv c \quad (3)$$

* The boundary layer of plasma II
 — Maxwell velocity distribution —

** K. Husimi, N. Yajima

(Institute of Plasma Physics, Nagoya University)

T. Tsuzuki (Department of Physics, Osaka University)

である。この式は、重要な知識を表現している。 $x \rightarrow -\infty$ である境界条件を与えれば、 C は決定される。 $x \rightarrow +\infty$ とすれば、そこには粒子は存在しないから、 $P \rightarrow 0$ となり、(3)は

$$\frac{1}{2\mu} \left(\frac{dA}{dx} \right)_{\infty}^2 - \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{d\Phi}{dx} \right)_{\infty}^2 = C \quad (4)$$

となり、この式は、 $x \rightarrow -\infty$ における一つの条件に対して、無数に多くの解が存在することを示している。neutral confinement と云うことは、それらのうちの特別な一つの場合にすぎない。しかもそれらの解は、プラズマの内部に行くに従って、ある一つの形に近ずいてゆく。このことは、Thomas-Fermi の原子模型の場合と全く同じ事情になっている。原子の内部のポテンシャル函数は、その原子が中性であるか、イオンであるかには関係しない。このように、我々の問題では、系全体での A や Φ の振舞を知ることが、重要であることが分る。

以上のことは、この問題に対して Sommerfeld の、Thomas-Fermi 原子模型に⁽²⁾する優れた論文⁽²⁾の手法を応用出来るのではないかと云うことを示している。我々は彼の方法を用いる。

最後に、最近の論文にふれておこう。Grad⁽³⁾は、やはり同時問題を論じている。しかし、彼は問題をあまりに簡単化したために (ion と electron の mass difference を無視した)、charge separation を無視してしまっている。従って、彼に対しても Harris や Tonks に対すると同じ批判が成立する。又理想化された場合として、mass difference を無視することを認めるとしても、彼の preprint のなかの定理は誤っている。彼は、一般に速度分布函数か、粒子のエネルギーだけに依存して、速度の方向に依存せず、かつ trapped particle がないときには、プラズマの十分内部での“境界面”に平行な電流 J_y は、vector potential A に比例すると主張する。しかし、例えば三次元マクスウェル分布 $\exp[-m(u^2 + v^2 + w^2)/2RT]$ を持つ場合について計算してみれば分るように J_y は $A^{1/2}$ に比例する。

2° 我々の方法は、一般的な速度分布の場合に拡張することは簡単なので、プラズマが十分内部 ($x \rightarrow -\infty$) でマクスウェル速度分布 (一次元)

$$n_{1,e}(\vec{u}) = \sqrt{\frac{m_{1,e}}{2\pi kT}} n_{0,e} e^{-\frac{m_{1,e} u^2}{2kT}} \delta(v) \delta(w) \quad (5)$$

を持つ場合について論じる。無次元の量

プラズマの境界層Ⅱ—Maxwell 分布の場合—

$$\varphi \equiv \frac{e}{kT} \Phi, \quad a \equiv \frac{ec}{kT} A \quad (6)$$

を導入する。積分領域に trapped region が現れない、即ち $\varphi - \frac{1}{2} \lambda a^2$ 及び $\varphi + \frac{1}{2} \lambda \kappa a^2$ が正の増大函数とすると、粒子圧は

$$P(a, \varphi) / kT = e^{\varphi - \frac{1}{2} \lambda a^2} + e^{-\varphi - \frac{1}{2} \lambda \kappa a^2} \quad (7)$$

となる。ここに κ は ion mass M に対する electron mass m の比である。又 $\lambda = kT / mc^2$ 。長さの単位として Debye 長を導入する。

$$x = \lambda_D \xi, \quad \lambda_D^{-1} = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\epsilon kT}} \quad (8)$$

マックスウェル方程式は、 ξ の微分を dot で示して

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = e^{\varphi - \frac{1}{2} \lambda a^2} - e^{-\varphi - \frac{1}{2} \lambda \kappa a^2} \\ \dot{a} = \lambda a (e^{\varphi - \frac{1}{2} \lambda a^2} + \kappa e^{-\varphi - \frac{1}{2} \lambda \kappa a^2}) \end{cases} \quad (9)$$

となる。境界条件は

$$\varphi = \dot{\varphi} = a = \dot{a} = 0 \quad \text{for } x \rightarrow -\infty \quad (10)$$

及び

$$\begin{aligned} \varphi \rightarrow \infty, \quad \dot{\varphi} = \text{finite} = \epsilon \\ a \rightarrow +\infty, \quad \dot{a} = \text{finite} = b \end{aligned} \quad \text{for } x \rightarrow +\infty \quad (11)$$

である。(10)を用いるとオー積分(3)は

$$\frac{1}{2} \dot{a}^2 - \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + e^{\varphi - \frac{1}{2} \lambda a^2} + e^{-\varphi - \frac{1}{2} \lambda \kappa a^2} = 2 \quad (12)$$

となり、これに(11)を入れると、 ϵ と b の関係

$$b^2 - \epsilon^3 = 4 \quad (13)$$

をうる。

ところで、(12)より系の Lagrangian L は

$$L = \frac{1}{2} \dot{a}^2 - \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - e^{\frac{\phi}{2}} \frac{1}{2} \lambda a^2 - e^{-\frac{\phi}{2}} \frac{1}{2} \lambda \kappa a^2$$

だから、 a 、 ϕ に共役な運動量は

$$\begin{aligned} p_a &= \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} = \dot{a}, \\ p_\phi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = -\dot{\phi} \end{aligned} \quad (14)$$

だから Hamiltonian H は

$$H = \frac{1}{2} p_a^2 - \frac{1}{2} p_\phi^2 + e^{\frac{\phi}{2}} \frac{1}{2} \lambda a^2 + e^{-\frac{\phi}{2}} \frac{1}{2} \lambda \kappa a^2 \quad (15)$$

である。従って、(9)と等価な方程式は

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{a} &= \frac{\partial H}{\partial p_a} = p_a \end{aligned} \right. \quad (16)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = -p_\phi \end{aligned} \right. \quad (17)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{p}_a &= -\frac{\partial H}{\partial a} = \lambda a \left(e^{\frac{\phi}{2}} \frac{1}{2} \lambda a^2 + \kappa e^{-\frac{\phi}{2}} \frac{1}{2} \lambda \kappa a^2 \right) \end{aligned} \right. \quad (18)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{p}_\phi &= -\frac{\partial H}{\partial \phi} = -e^{\frac{\phi}{2}} \frac{1}{2} \lambda a^2 + e^{-\frac{\phi}{2}} \frac{1}{2} \lambda \kappa a^2 \end{aligned} \right. \quad (19)$$

となる。我々は、この方程式を基礎にして、 $a \ll 1$ 及び $a \gg 1$ について解き、内接法により、全系の解を近似的に求める。

3° $a \ll 1$ ($\xi \rightarrow \infty$) としよう。 ϕ 、 a は微少量なので、(18)、(19) 右辺を展開して、その初項のみを取る。(16)～(19) から

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{da}{d\xi} &= -\frac{p_\phi}{p_a} \\ \frac{dp_\phi}{dp_a} &= \frac{\frac{1}{2} \lambda (1-\kappa) a^2 - 2\phi}{\lambda (1+\kappa) a} \end{aligned} \right. \quad (20)$$

をうる。 p_ϕ も p_a も微少量なので、 β 、 γ を定数として

プラズマの境界層Ⅱ—Maxwell分布の場合—

$$\frac{d\varphi}{da} \approx \beta \frac{\varphi}{a}$$

$$\frac{dp_a}{dp_a} \approx \gamma \frac{p_a}{p_a}$$
(21)

とおくと、(20)より

$$\varphi = \frac{\lambda(1-\kappa)a^2}{2\{2-\beta\gamma(1+\kappa)\}}$$

をうる。(21)より、 $\beta=\gamma=2$ なることは明らかだから

$$\varphi = \frac{\lambda(1-\kappa)}{4\{1-2\lambda(1+\kappa)\}} a^2$$
(22)

をうる。同様にすれば、 p_a, p_φ を a の関数として表わして

$$p_a = \sqrt{\lambda(1+\kappa)} a$$

$$p_\varphi = -\frac{\lambda^{3/2}(1-\kappa)\sqrt{1+\kappa}}{2\{1-2\lambda(1+\kappa)\}} a^2$$
(23)

となる。(14)を用いれば、 $\xi \rightarrow -\infty$ での a, φ の空間座標表示を求めることは簡単である。

4° 次に $a \gg 1$ ($\xi \rightarrow +\infty$)での漸近解を求めよう。(11)より、 p_a, p_φ は $\xi \rightarrow +\infty$ で $p_{a\infty} = b, p_{\varphi\infty} = -\varepsilon$ に近づくので、この値からのずれを X, Y とする。 X, Y は $a \rightarrow \infty$ で零となる。

$$\left\{ \begin{array}{l} p_a = p_{a\infty} + X \\ p_\varphi = p_{\varphi\infty} + Y \end{array} \right.$$
(24)

(16),(17)より、 φ を a で表わしたときの、初めの項は

$$\varphi = \alpha a + F$$

となる。ここに $\alpha \equiv -P_{\varphi\infty}/P_{a\infty}$, F は定数である。そこで φ の上の値よりのずれを $-Z$ とおくと

$$\varphi = \alpha a + F - Z \quad (25)$$

X, Y, Z は微量である。

ここで次の近似をする。即ち、境界層の外の方では、プラズマは、ほとんどイオンばかりであり、電子の影響は無視出来る。このようにすれば、(16)～(19)は、

$$\dot{a} = P_{a\infty} + X \quad (26)$$

$$\dot{Z} = \alpha X + Y \quad (27)$$

$$\dot{X} = \lambda \kappa a e^{-\alpha a - \frac{1}{2} \lambda \kappa a^2 - F} \quad (28)$$

$$\dot{Y} = e^{-\alpha a - \frac{1}{2} \lambda \kappa a^2 - F} \quad (29)$$

となる。(26),(28)より直ちに

$$X = \frac{\lambda \kappa}{P_{a\infty}} \int_{\infty}^a a e^{-\alpha a - \frac{1}{2} \lambda \kappa a^2 - F} da$$

をうる。部分積分をして、その初項を取ると

$$X \simeq - \frac{1}{P_{a\infty}} e^{-\alpha a - \frac{1}{2} \lambda \kappa a^2 - F} \quad (30)$$

となる。(28)(29)(30)より

$$Y = \frac{1}{\lambda \kappa a} X \simeq - \frac{1}{\lambda \kappa P_{a\infty} a} e^{-\alpha a - \frac{1}{2} \lambda \kappa a^2 - F} \quad (31)$$

(27)(28)(30)より

$$Z \simeq \frac{\lambda \kappa \alpha a + 1}{\lambda^2 \kappa^2 P_{a\infty}^2 a^2} e^{-\alpha a - \frac{1}{2} \lambda \kappa a^2 - F} \quad (32)$$

をうる。(32)を(25)に代入すれば

$$\varphi = \alpha a + F - \frac{\lambda \kappa \alpha a + 1}{\lambda^2 \kappa^2 P_{a\infty}^2 a^2} e^{-\alpha a - \frac{1}{2} \lambda \kappa a^2 - F} \quad (33)$$

となる。(32)(33)の分数部分の1の項は、もし neutral confinement $\alpha = 0$ を考えるときには、初項となる。

5° 内接法により両極端での解(22),(33)をつなごう。簡単な函数として

$$\varphi = \frac{\beta a^2 (\alpha a + F)^2}{\gamma a^2 (\alpha a + F) + \delta (\lambda \kappa \alpha a + 1) e^{-\alpha a - \frac{1}{2} \lambda \kappa a^2}}$$

ととる。 β, γ, δ は $a \rightarrow +\infty$ で(33)に、 $a \rightarrow 0$ で(22)につながらるように決める。その結果は、

$$\varphi = \frac{\lambda (1-\kappa) a^2 (2\alpha + F)^2}{\lambda (1-\kappa) a^2 (\alpha a + F) + 4F^2 \{1 - 2\lambda(1+\kappa)(\lambda \kappa \alpha a + 1) e^{-\alpha a - \frac{1}{2} \lambda \kappa a^2}\}} \quad (34)$$

と、条件式

$$F^2 e^F = \frac{1-\kappa}{4\lambda \kappa^2 P_{a\infty}^2 \{1 - 2\lambda(1+\kappa)\}} \quad (35)$$

である。

ここでFの意味を調べよう。(26)と(30)からaを ξ で表わすと

$$a = p_{a\infty}(\xi - \xi^*) + \frac{1}{\lambda \kappa p_{a\infty}^3(\xi - \xi^*)} e^{-\alpha p_{a\infty}(\xi - \xi^*) - \frac{1}{2} \lambda \kappa p_{a\infty}^2(\xi - \xi^*)^2 - F}$$

となり、これは、解が translational invariant であることを示している。小さい補正項を無視すれば

$$\varphi = -p_{\varphi\infty} \xi + \varphi_{\infty}$$

だから

$$F = \varphi_{\infty} - p_{\varphi\infty} \xi^* \quad (36)$$

となり、結局Fは translation に対する不変量と云うことになる。特に neutral confinement を考えるときには、 $P_{\varphi\infty} = 0$ だから、原点のえらび方に無関係に static potential は一定値

$$\varphi_{\infty}^2 e^{\varphi_{\infty}} = \frac{1-\kappa}{16\lambda \kappa^2 \{1 - 2\lambda(1+\kappa)\}} \quad (37)$$

に飽和する。

(34) と (16) ~ (19) を用いれば、vector 及び static potential 及び電場・磁場の表示がえられる。我々に特に興味ある場合、即ち neutral confinement ($p_{\phi\infty} = 0$, $p_{a\infty} = 2$) の場合について、数値的に積分した結果はグラフに示す通りである。 ϕ_{∞} の値は typical な温度に対して (37) より求めた。

$T = 10 \text{ KeV}$ に対して

$$\phi_{\infty} = 11$$

$$e\Phi_{\infty} = 110 \text{ KeV}$$

$T = 1 \text{ KeV}$ に対して

$$\phi_{\infty} = 13$$

$$e\Phi_{\infty} = 13 \text{ KeV}$$

このように、static potential の飽和値は、プラズマの温度の約 10 倍である。これらのグラフから明らかなことは

- (1) 諸量の変化の様子は温度によってほとんど変わらない。
- (2) 電場が最小値をとる点は、electron rich region から ion rich region にうつる local neutral な点である。この点より外側では磁場は外部磁場の大きさにほとんど等しい。このことは ion の運動は電流にはほとんど寄与しないことを示している。
- (3) 電場のグラフと合せ考えれば、electron は主に磁場により、ion は主に電場により反撥される。
- (4) 磁場の値の $1/e$ 巾で境界層の厚みを定義すると、約 8 electron Larmor 半径である。この値は、shock の方で云われている、ion と electron の Larmor 半径の幾何平均

$$\sqrt{\frac{4}{m} \frac{M}{m}} \sqrt{\frac{m}{2n_0 e^2 \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{\kappa}}} \lambda_p$$

と数値的には等しい。

- (5) 電気的二重層の厚さも電場の $1/e$ 巾で定義すれば約 7 electron Larmor 半径である。

プラズマの境界層Ⅱ—Maxwell分布の場合—

$$\frac{1}{2\mu} B_0^2 = n_0 kT$$

B_0 : 外部磁場

長さの単位は電子ラーマー半径 $\sqrt{\frac{m}{2n_0 e^2 \mu}}$

伏見・矢島・都築

参 考 文 献

- (1) 伏見・矢島・都築 核融合研究 6 137(1961)

K. Husimi, N. Yajima and T. Tsuzuki

"On the Structure of a Fresh Plasma Surface"

- (2) A. Sommerfeld ZS. f. Phys. 78 283 (1932)

- (3) H. Grad NYO — 9491

"The Boundary Layer Between a Plasma and a Magnetic
Field — I"