交流探針における共鳴現象^{*}

市 川 芳 彦 (日大理工) ※※

池 上 英 雄 (通 研) ※※※

高山、池上、宮崎によつて発見された交流探針における共鳴現象の理論的解明を行ない、共鳴ピークの特性を明らかにする。その結果、交流探針において観測される共鳴ピークの精密な分析によつて、プラズマの電子密度のみならず、衝突周波数の決定が可能である事が示される。又、完全電離プラズマにおける交流探針の共鳴現象に対する理論的予見が議論される。

§ 1. はじめに

Langmuir-probe の理論によれば、平板探針に流入する電子電流密度は、プラズマと探針の間の電位差を V とすれば、電子の速度分布が Maxwell 分布の場合には

$$j_e = n e \left\{ \frac{\kappa T_e}{2\pi m} \right\}^{1/2} \exp \{ -eV / \kappa T_e \} \quad (1)$$

であたえられる。従つて、電流を電位差 V の函数として測定すれば、電子温度が実験的に測定できる。一般に電子の速度分布を $f(v)$ とすれば、電流密度と分布函数の間には

$$\frac{d^2 j}{dV^2} = \frac{1}{4} \frac{e^2}{m} f \left(\sqrt{\frac{2eV}{m}} \right) \quad (2)$$

という関係があるので、電位差 V の函数として測定した電流の V に対する二次微分を求める事によつて、実験的に電子の速度分布を決定する事ができる。この電流の二次微分を直接実験的に測定するため探針に交流電圧 $\delta V \sin \omega t$ をかける。そうすると探針に流入する平均直流電流は

※ Resonance Phenomena of Radio-Frequency Probe

※※ Y. Ichikawa (Dep. of Phys. College of Science and Engineering, Nihon Univ.)

※※※ H. Ikegami (Electrical Communication Laboratory)

$$j_e \doteq j_0 + \frac{1}{2} \frac{d^2 j}{dV^2} (\delta V)^2 \quad (3)$$

(但し j_0 は (1) 式であたえられる量) であたえられるから、交流電圧 δV が充分小さければ、交流電圧をかけたために生じた直流電流の増加分を測定して、直ちに電子の速度分布が求められる。

特に、電子の速度分布が Maxwell 分布の場合には、探針に流れこむ電子電流は、 $V + \delta V \sin \omega t$ の電位の壁を飛びこすことのできる電子の寄与を考えて、

$$j_e = j_0 \langle \exp(-e\delta V \sin \omega t / \kappa T_e) \rangle_{A_V} = j_0 I_0(e\delta V / \kappa T_e) \quad (4)$$

但し $I_0(x)$ は虚数で x に対する 0 次の Bessel 函数となる。従つて、任意の δV の大きさに対して直流電流の増加分 $I_0(e\delta V / \kappa T_e)$ を測定する事によつて電子温度 T_e を精密に測定し得るであろう。このような考え方によつて、高山等⁽¹⁾が実験を行なつた処、オー図に示すような結果を得た。或る特定の振動数 ω_0 より低い振動数の

Fig. 1

の部分では確かに、上の理論から期待されるように交流振動数 ω には関係しない一定の増加電流を測定したが、特定の振動数 ω_0 で、電流は非常に鋭いピークを示す事を発見した。この振動数 ω_0 は、衝突周波数 ν にくらべて $\omega_0 \gg \nu$ の場合にはプラズマ振動数 ω_p に等しい事が実験によつて確かめられた。さらに ω_0 より高い振動数に対しては、共鳴のピークはもちろん消滅するが、(4)式であたえられる交流電圧による直流電流の増加分を消滅する事が見出された。

直流電流の増加分が、高い振動数の交流電圧をかけた場合に消滅する事は、高い振動数領域で

交流探針における共鳴現象

は sheath の厚さ程度の距離を電子が通過する時間の間に、交流電圧の位相が激しく変化し、探針に飛びこむ電子の感ずる電位の壁の高さは結果として static な部分だけとなる事によって理解される。

我々のこの論文の目的は、 $\omega = \omega_p$ で起る共鳴現象の機構を理論的に解明し、共鳴ピークの特性を明らかにしようという事である。その結果、共鳴ピークの分析によつて色々プラズマ診断のために有用な知識がひきだせる事が明らかにされる。

§ 2. 問題の定式化

$\omega = \omega_p$ での共鳴現象であるから、この現象で最も本質的な効果は、電子間の相互作用である。さて、探針にかけられた交流電圧の効果を考えてみよう。静電的に shield された探針の電位を負に保つと、その表面に+のイオンが集積して sheath を形成する。探針の電位を変化させると sheath の領域に電子群の出入が起り effective に+の電荷の揺動が生ずる。高山等が始めに考えた共鳴現象の発生の機構は、探針の電位の振動によつて誘起されたそのような電子群の周期的な出入が振動する sheath の電位差によつて加速され、beam となつてプラズマ内に進行し、beam とプラズマの相互作用によつてプラズマ内に振動数 ω_p の振動が起る。その場合、電圧の振動周期がプラズマ振動数 ω_p と等しい時、プラズマ振動の励起が共鳴的に起るであろう、という考えである。加速機構としては、この外に Bohm²⁾ 等によつて強調されているようにプラズマと sheath の間の境界領域における未知の加速機構が考えられる。従つて、上のような機構が観測されている共鳴現象の原因であるとすれば、共鳴ピークの特性はこれらの複雑な加速機構の詳細な知識を確立してこそ、始めて理解される。

然し、sheath それ自身の構造に関する複雑な問題にはふれないで、プラズマ内部の電子温度を測定する事ができる Langmuir-probe の特徴を考えると、交流探針において観測された $\omega = \omega_p$ での共鳴現象も、sheath 及びその周辺の複雑な問題には深入りしないでも理論的に説明のつく問題ではないであろうか？

外から加えた交流電圧の作用が、直接的にプラズマ内の固有振動と共鳴する機構が本質的であるならば、観測される共鳴ピークの特性はプラズマの固有の性質を直接的に反映する事が明らかにされよう。

平板探針の場合を考える事にすれば、探針の電位の変化に応じて生ずる+電荷の揺動は、sheath の厚さ L の電気二重層の変動と見做すことができよう。従つて、探針の電位を $\delta V \sin \omega t$ で振動させると、そこには

$$E_{\text{ext}}(x, t) = \frac{\partial V}{L} D(x) \sin \omega t \quad (5)$$

$$D(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin kL}{kL} e^{+ikx} dk \quad (6)$$

であたえられる振動電場が誘起されると考えて良い。

我々は、このような振動電場が直接プラズマ内に誘起する電子分布の変動を求める。簡単のため一次元の問題としよう。基礎方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} f + v \frac{\partial}{\partial x} f + \frac{e}{m} E \frac{\partial}{\partial v} f = - \frac{e}{m} E_{\text{ext}} \frac{\partial}{\partial v} f + \left. \frac{\partial}{\partial t} f \right|_{st} \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} E = 4\pi e \int f dv \quad (8)$$

とかける $\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{st}$ は簡単に $-\nu f$ とおく。外からかけた交流電場 E_{ext} についての線型近似を行なえば、

$$f(x, v; t) = f_0(v) + f'(x, v; t) \quad (9)$$

として (7) 及び (8) は

$$\frac{\partial}{\partial t} f' + v \frac{\partial}{\partial x} f' + \frac{e}{m} E \frac{\partial}{\partial v} f_0 = - \frac{e}{m} E_{\text{ext}} \frac{\partial}{\partial v} f_0 - \nu f' \quad (10)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi e \int f' dv \quad (11)$$

となる。この方程式は Fourier 展開

交流探針における共鳴現象

$$F(x, v; t) = \iint F(k, v; \omega) e^{i(kx - \omega t)} dk d\omega \quad (12)$$

(但し F は f' E 及び E_{ext} とする)を導入する事によつて、次のように解く事ができる。
(10)は

$$-i(\omega - kv - i\nu)f'(k, v; \omega) = -\frac{e}{m}\{E(k, \omega) + E_{\text{ext}}(k, \omega)\} \frac{\partial f_0}{\partial v} \quad (13)$$

(11)は $\overline{f'(k, \omega)} = \int f'(k, \omega; v) dv$ として

$$ik E(k, \omega) = 4\pi e \overline{f'(k, \omega)} \quad (14)$$

故に

$$f'(k, v, \omega) = -i \frac{\partial f_0 / \partial v}{\omega - kv - i\nu} \left\{ \frac{4\pi e^2}{m} \frac{\overline{f'(k, \omega)}}{ik} + \frac{e}{m} E_{\text{ext}}(k, \omega) \right\} \quad (15)$$

(15)の両辺を v について積分して右辺才一項を移項すれば

$$\varepsilon(k, \omega) \overline{f'(k, \omega)} = -i \int \frac{\partial f_0 / \partial v}{\omega - kv - i\nu} dv \frac{e}{m} E_{\text{ext}}(k, \omega) \quad (16)$$

$$\varepsilon(k, \omega) = 1 + \frac{4\pi e^2}{m} \frac{1}{k} \int \frac{\partial f_0 / \partial v}{\omega - kv - i\nu} dv \quad (17)$$

を得る。(14)を用いると、外部から作用している交流電圧によつて誘起されるプラズマ内の内部電場の Fourier 成分は

$$E(k, \omega) = \left\{ \frac{1}{\varepsilon(k, \omega)} - 1 \right\} E_{\text{ext}}(k, \omega) \quad (18)$$

であたえられる。(16)の結果を、(15)に代入すると、外部交流電圧の作用によつて生じたプラズマ内の分布函数の歪みは

$$f'(k, \omega; v) = -i \frac{\partial f_0 / \partial v}{\omega - kv - i\nu} \cdot \frac{1}{\varepsilon(k, \omega)} \cdot \frac{e}{m} E_{\text{ext}}(k, \omega) \quad (19)$$

であたえられる。(6)を用いて 結局

$$f'(x, v; t) = -\frac{e\delta V}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} \int \frac{1}{\omega - kv - i\nu} \text{Im} \left\{ \frac{1}{\varepsilon(k, \omega)} \right\} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin kL}{kL} e^{+i(kx - \omega t)} \quad (20)$$

を得る。

平板探針の位置を $x=0$ としているので (E_{ext} の定義), 探針に流れこむ電子流は、(20)を用いて、

$$j_e = \left\langle e \int_{-\infty}^{\infty} v (f_0(v) + f'(0; v; t)) dv \right\rangle \quad (21)$$

$$v(t) = \left\{ \frac{2e}{m} (V + \delta V \sin \omega t) \right\}^{1/2} \quad (22)$$

であたえられる。

§ 3. 具体的な計算

前節で得た結果を、弱電離プラズマの場合と完全電離プラズマの場合について具体的に計算しよう。(17)であたえられるプラズマの電媒常数は、長波長の極限では、近似的に

$$\varepsilon(k, \omega) = 1 - \left(\frac{\omega(k)^2}{\omega^2} \right) + i \left(\frac{\omega(k)^2}{\omega^2} \right) \frac{2}{\omega} (r_L + \nu) \quad (23)$$

とかける。但し r_L は $\nu \rightarrow 0$ の場合に本質的な Landau 減衰係数である。

交流探針における共鳴現象

$$\text{又 } \omega^2(k) = \omega_p^2 + v_T^2 k^2$$

先づ 弱電離プラズマの場合を考えよう。この場合には $\nu \neq 0$ であるから

$$\text{Im } \frac{1}{\varepsilon(k, \omega)} = \frac{2 \left(\frac{\omega(k)^2}{\omega} \right)^2 \frac{\nu}{\omega}}{\left\{ 1 - \left(\frac{\omega(k)^2}{\omega} \right)^2 \right\}^2 + 4 \left\{ \left(\frac{\omega(k)^2}{\omega} \right)^2 \frac{\nu}{\omega} \right\}^2} \quad (24)$$

(20)において、空間的には略一様な変動を考えるとして、 ω にくらべて kv を無視すると、
(24)で、電子の熱運動による分散効果を無視するならば

$$f'(0, v; t) = \frac{e \delta V}{\kappa T} \frac{1}{\omega L} \frac{2 \frac{\nu}{\omega}}{\left\{ 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \right\}^2 + 4 \left(\frac{\nu}{\omega} \right)^2} v f_0(v) e^{-i \omega t} \quad (25)$$

を得る。これを (21)に代入すれば

$$j_e = j_0 I_0 \left(\frac{e \delta V}{\kappa T} \right) + e \frac{e \delta V}{\kappa T} \cdot \frac{1}{\omega L} \cdot \frac{2 \frac{\nu}{\omega_p}}{\left\{ 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \right\}^2 + 4 \left(\frac{\nu}{\omega_p} \right)^2} \\ \cdot \left\langle \int_{v(t)}^{\infty} v^2 f_0(v) dv e^{-i \omega t} \right\rangle \quad (26)$$

となる。ここで $e(V + \delta V \sin \omega t) \gg \kappa T_e$ であるような場合を考える事にすれば

$$\int_{v(t)}^{\infty} v^2 f_0(v) dv = -\frac{1}{2} n_e \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{eV}{m}} \sqrt{\frac{\kappa T}{m}} e^{-\frac{eV}{\kappa T e}} \\ - \frac{e \delta V}{\kappa T} \sin \omega t \cdot \left[1 + \frac{\delta V}{V} \sin \omega t \right]^{1/2} \quad (27)$$

さらに $V \gg \delta V$ とすれば、

$$\left\langle e^{-\frac{e \delta V}{\kappa T}} e^{i \omega t} \right\rangle = -I_1 \left(\frac{e \delta V}{\kappa T} \right) \quad (28)$$

を用いて、結局、電子電流は

$$j_e = j_0 I_0 \left(\frac{e \delta V}{\kappa T} \right) + \\ + j_0 \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\frac{\nu}{\omega_p^2}}{\left\{ 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \right\}^2 + \left(\frac{\nu}{\omega_p} \right)^2} \cdot \frac{\lambda_D}{L} \cdot \frac{\omega_p}{\omega} \sqrt{\frac{eV}{\kappa T}} I_1 \left(\frac{e \delta V}{\kappa T} \right) \quad (29)$$

であたえられる。オ二項は $\omega = \omega_p$ で共鳴ピークをあたえ、その共鳴巾は、電子の衝突周波数 ν によつて定められる。

上の計算では、電子の熱運動によるプラズマ振動数の分散の効果を無視したが、その効果を考慮に入れることは簡単である。そのためには

交流探針における共鳴現象

$$I(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon_i}{\left\{ 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 - \left(\frac{V_T}{\omega} \right)^2 k^2 \right\}^2 + \varepsilon_i^2} \frac{\sin kL}{kL} dk \quad (30)$$

を計算すればよい。これは

$$I(\omega) = \frac{\pi}{L} \cdot \left[\frac{\varepsilon_i}{\left\{ 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \right\}^2 + \varepsilon_i^2} + \left(\frac{V_T}{\omega L} \right)^2 \cdot \varepsilon_i^{-1} \cdot \exp \left\{ - \frac{\omega L}{V_T} \left\{ \left(1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \right)^2 + \varepsilon_i^2 \right\}^{1/4} \sin \frac{\theta}{2} \right\} \cdot \cos \left\{ \frac{\omega L}{V_T} \left\{ \left(1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \right)^2 + \varepsilon_i^2 \right\}^{1/4} \cos \frac{\theta}{2} - \frac{\theta}{2} \right\} \right] \quad (31)$$

$$\tan \theta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2}} \quad (32)$$

をあたえる。〔 〕の中のオー一項が(29)の型をあたえる項である。共鳴ピークの高さは熱運動の効果を考えない場合は ω_p / ν に比例するが、熱運動の効果は、その factor を

$$\frac{\omega_p}{\nu} \rightarrow \frac{\omega_p}{\nu} \left[1 + \left(\frac{V_T}{\omega L} \right)^2 e^{-\frac{\omega L}{V_T} \sqrt{\frac{\omega_p}{2\nu}}} \cos \left(\frac{\omega L}{V_T} \sqrt{\frac{\omega_p}{2\nu}} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (33)$$

とかえる。従つて、熱運動の分散効果は、弱電離プラズマの場合には、全く無視して差支えない。

次に、完全電離プラズマの場合を考えよう。この場合には $\nu \rightarrow 0$ 。 処で $k \rightarrow 0$ で $r_L \rightarrow 0$ であるから、

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \frac{1}{\varepsilon(k, \omega)} &= \pi \delta(\varepsilon^r(k, \omega)) \\ &= \frac{\pi}{2} \omega(k) \{ \delta(\omega - \omega(k)) + \delta(\omega + \omega(k)) \} \end{aligned} \quad (34)$$

となる。この場合もし電子の熱運動の効果を無視すると、共鳴は $\delta(\omega - \omega_p)$ の型になる。従つて、熱運動による分散効果を考える事が必要である。そうすると、簡単に

$$f'(0, v; t) = \frac{e \delta V}{\kappa T_e} \frac{\sin\left\{ \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{V_T} L \right\}}{\frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{V_T} L} \frac{v}{V_T} f_0(v) e^{i\omega t} \quad (35)$$

となり、電子電流密度は

$$\begin{aligned} j_e &= j_0 I_0 \left(\frac{e \delta V}{\kappa T} \right) \\ &+ j_0 \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin\left\{ \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{V_T} L \right\}}{\frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{V_T} L} \sqrt{\frac{e V}{\kappa T}} I_1 \left(\frac{e \delta V}{\kappa T} \right) \end{aligned} \quad (36)$$

となる。従つて、この場合にも $\omega \sim \omega_p$ で鋭い共鳴のピークが出現する。然し、共鳴の巾はプラズマ内電子の熱運動及び探針上に形成された sheath の厚さによつて定められる。この

交流探針における共鳴現象

場合、興味深い事は、(36)の形からわかるように、共鳴ピークの両側に凹みが生ずる事、及び 2nd maximum が観測し得るかもしれない事である。

§ 4. 実験結果との比較

不完全電離プラズマの場合、§ 3. の計算結果によれば、共鳴ピークの半値巾 $\Delta \omega$ は

$$\Delta \omega = \nu \quad (37)$$

即ち、衝突周波数をあたえ、共鳴ピークの高さは

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_p}{\nu} \right) \cdot \frac{\lambda_D}{L} \cdot \sqrt{\frac{eV}{\kappa T_e}} I_1 \left(\frac{e\delta V}{\kappa T_e} \right) j_0 \quad (38)$$

であたえられる事がわかつた。

高山等の実験によれば、共鳴ピークの高さが圧力を増すことによつて減少する事が確められているが、これは (38) 式によつて理解される。

オー図の共鳴の半値巾から ν を定める事ができる。それは

$$\nu \sim (3 \sim 4) M_c \quad (39)$$

という値をあてる。この値を(38)に代入してピークの高さを評価してみると、sheathの厚さLは大体 Debye 距離の数倍程度である事がわかる。これは、他の知識から得られる結果と consistent である。それ故、我々の理論は交流探針における共鳴現象の本質を正しく解明したものといえよう。

完全電離プラズマの場合の共鳴ピークの特徴は、弱電離プラズマの場合と違い、その半値巾は

$$\Delta \omega = 1.9 \frac{v_T}{L} \quad (40)$$

そのピークの高さは

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{eV}{\kappa T}} I_1 \left(\frac{e\delta V}{\kappa T} \right) j_0 \quad (41)$$

であたえられる。(41)と(38)を比較すると、完全電離プラズマの共鳴ピークの高さは、同

じ密度の弱電離プラズマの場合の共鳴ピークの高さにくらべて

$$2 \left(\frac{\nu}{\omega_p} \right) \frac{L}{\lambda_D} \text{ 倍} \quad (42)$$

だけ高くなる事がわかる。(42)でLは弱電離プラズマ内の sheath の厚さである。

§ 5. おわりに

以上、§ 3. 及び § 4 の考察によつて、我々は交流探針の共鳴現象を正しく解明した事がわかる。

$\omega > \omega_p$ の領域で交流電圧の影響が消滅する事については、§ 2 において定性的に議論された。この領域の問題に対する定量的な分析を進めるためには、sheath そのものの構造をもう少し精密に考えなければならない。これは sheath の力学的ふるまい及び sheath とプラズマの間の境界領域の問題を解明するために特に重要な問題であるが、プラズマそのものの診断のためには、上に述べた共鳴現象の分析が本質的である。

最後に、この問題について色々討論して下さい下さった物性研の中嶋さん、教育大の小島さん、プラズマ研の高山さんに感謝の意を表します。

引 用 文 献

- 1) Takayama, et al, Physical Review Letters. Vol. 5
(1960) 238
- 2) D. Bohm, The Characteristics of Electrical Discharges
in Magnetic Fields, Mc.Graw-Hill Book Co. New York
(1949)