プラズマ振動の非線型効果 II ^{*}

松浦 健哉 ^{**} ・ 小川 潔 ^{**} (電試)

(1962 年 7 月 18 日 受理)

はじめに

前論文 I ¹⁾ において我々は D-P ²⁾ 及び V-V-S ³⁾ 理論に基いて準線型理論を概観し、D-P 理論の枠内で mode-coupling 効果を示す一般式を求め、又他方で、Hamiltonian 型式での議論は Bohm-Pines 理論で一つの問題点である補助条件が考慮されていないという理論的に不備な点があるにしても、mode-coupling damping について興味ある結果を得た。この論文では、この Hamiltonian 型式での解析を足がかりにして、前論文で D-P 理論の延長として与えた。この効果を示す一般式 (I-3・15) に含まれる非線型効果の物理的な内容を検討すると共に、其の一つである mode-coupling damping について計算した結果を報告する。

Drummond-Pines ²⁾ のこの効果の検討は、物理的な内容において明確さを欠き、in-phase と out-phase に分ける其の処理方法は納得し難いものがある。まず次節では減衰の一般式の導出を、其の物理的な内容を議論し、この式を処理するに当たっての指針を提示する。オ2節では、その指針に従っての mode-coupling damping の計算を与え、オ3節の結びにおいて Hamiltonian 型式で得た結果との関連を議論するつもりである。

§1. 一般式の導出とその物理的内容の検討

Landau-Vlasov 方程式は poisson 方程式と結びつけて 準線型理論の段階で

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + i k \cdot v f_k = \frac{e}{m} E_k \cdot \frac{\partial g}{\partial v} + \frac{e}{m} \sum_q' E_{k-q} \cdot \frac{\partial f_q}{\partial v} \quad (1.1)$$

として書き改められる。 f_k は系の平衡分布からのずれの部分をフーリエ展開した時の k -成分

* Non-linear Effects in Plasma Oscillation II

** K.Matsuura and K.Ogawa (Electrotechnical Laboratory, nagatacho Tokyo)

分である。又右辺才二項の $\sum_q'$ は $q=0$ を除くことを意味する。従って右辺才一項の分布函数 $g(v, t)$ は、初期条件として与えられる分布 $F_0(v)$ に、才二項の分布 f_q の $q=0$ の部分をくり込んだ形の空間的に一様な分布として

$$g(v, t) \equiv F_0(v) + f_0(v, t) \quad (1.2)$$

と定義されている。今、注目している k -mode の波の成長率が振動数に比較して著しく小さいときには右辺才二項の非線型項を省略することが可能であって、いわゆる準線型の形で問題を処理することが出来る。これについては、 $D-P^2$), $V-V-S^3$), 又は前論文¹⁾を参照されたい。非線型項の本質的な効果が生ずるのは、省略された非線型項の検討にあるのである。

勿論、其の効果が顕著にあらわれるのは振動の成長率が著しく大きい場合であるが、この場合を一般的に取り扱うことは数学的にも非常に困難なことである。又、この場合には従来の準線型理論自身が成り立たない。そこで我々は準線型理論が成立する条件、即ち、振動の成長率が振動数に較べて非常に小さいという制限のもとで、次の段階としての非線型効果の検討を試みよう。

このような制限のもとでは (2.1) における f_k, E_k は振動展開

$$f_k = f_k^{(1)} + f_k^{(2)} + f_k^{(3)} + \dots \quad (1.3)$$

$$E_k = E_k^{(1)} + E_k^{(2)} + E_k^{(3)} + \dots$$

でもって取り扱うことが出来る。

其の時 (2.1) は、展開の各次数で

$$\frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial t} + i k \cdot v f_k^{(1)} = \frac{e}{m} E_k^{(1)} \cdot \frac{\partial g}{\partial v} \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial f_k^{(2)}}{\partial t} + i k \cdot v f_k^{(2)} = \frac{e}{m} E_k^{(2)} \cdot \frac{\partial g}{\partial v} + \frac{e}{m} \sum_q' E_{k-q}^{(1)} \cdot \frac{\partial f_q^{(1)}}{\partial v} \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial f_k^{(3)}}{\partial t} + i k \cdot v f_k^{(3)} = \frac{e}{m} E_k^{(3)} \cdot \frac{\partial g}{\partial v} + \frac{e}{m} \sum_q' \left\{ E_{k-q}^{(2)} \cdot \frac{\partial f_q^{(1)}}{\partial v} + E_{k-q}^{(1)} \cdot \frac{\partial f_q^{(2)}}{\partial v} \right\} \quad (1.6)$$

プラズマ振動の非線型効果Ⅱ

となり、又 Poisson方程式は

$$E_k^{(n)} = \frac{4\pi e}{k^2} i k \int d^3 v f_k^{(n)} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (1.7)$$

である。今、注目している k -mode の波の、高調波でなく、基本波への非線型効果は展開のオ三次からである。そこで、我々はその最初の項である振動展開のオ三次のみを問題にしよう。

各次数での f_k, E_k なる量の時間的変化として

$$\begin{aligned} f_k^{(1)}, E_k^{(1)} &\propto e^{-i\Omega_k^{(1)} t} \\ f_k^{(2)}, E_k^{(2)} &\propto e^{-i\Omega_k^{(2)} t} \\ f_k^{(3)}, E_k^{(3)} &\propto e^{-i\Omega_k^{(3)} t} \end{aligned} \quad (1.8)$$

を仮定すると (1.4) - (1.7) から $f_k^{(1)}, f_k^{(2)}, f_k^{(3)}$ は

$$f_k^{(1)} = i \left(\frac{e}{m} \right) \frac{1}{\Omega_k^{(1)} - k \cdot v} \cdot E_k^{(1)} \cdot \frac{\partial g}{\partial v} \quad (1.9)$$

$$f_k^{(2)} = i \left(\frac{e}{m} \right) \frac{1}{\varepsilon(\Omega_k^{(2)}, k)} \frac{1}{\Omega_k^{(2)} - k \cdot v} \sum_q' E_{k-q}^{(1)} \cdot \frac{\partial f_q^{(1)}}{\partial v} \quad (1.10)$$

$$f_k^{(3)} = i \left(\frac{e}{m} \right) \frac{1}{\Omega_k^{(3)} - k \cdot v} \left[E_k^{(3)} \cdot \frac{\partial g}{\partial v} + \sum_q' \left\{ E_{k-q}^{(2)} \cdot \frac{\partial f_q^{(1)}}{\partial v} + E_{k-q}^{(1)} \cdot \frac{\partial f_q^{(2)}}{\partial v} \right\} \right] \quad (1.11)$$

として求められる。 $\varepsilon(\Omega_k^{(2)}, k)$ は

$$\varepsilon(\Omega_k^{(2)}, k) \equiv 1 + \frac{4\pi e^2}{m} \frac{1}{k^2} \int d^3 v \frac{k \cdot \frac{\partial g}{\partial v}}{\Omega_k^{(2)} - k \cdot v} \quad (1.12)$$

で定義されるものである。一方 $E_k^{(3)}$ は (1.7) (1.11) から

$$E_k^{(3)} = -\frac{4\pi e^2}{m} \frac{1}{\varepsilon(\Omega_k^{(3)}, k)} \frac{k}{k^2} \sum_q' \int d^3v \frac{1}{\Omega_k^{(3)} - k \cdot v} \left\{ E_{k-q}^{(2)} \cdot \frac{\partial f_q^{(1)}}{\partial v} + E_{k-q}^{(1)} \cdot \frac{\partial f_q^{(2)}}{\partial v} \right\} \quad (1.13)$$

$\varepsilon(\Omega_k^{(3)}, k)$ は

$$\varepsilon(\Omega_k^{(3)}, k) \equiv 1 + \frac{4\pi e^2}{m} \frac{k}{k^2} \int d^3v \frac{1}{\Omega_k^{(3)} - k \cdot v} \cdot \frac{\partial g}{\partial v} \quad (1.14)$$

として定義されるものである。式 (1.13) に於いて (1.8) を考慮して時間微分すれば

$$\frac{\partial E_k^{(3)}}{\partial t} = \frac{4\pi e^2}{m} \frac{1}{\varepsilon(\Omega_k^{(2)}, k)} \frac{k}{k^2} \sum_q' \int d^3v \frac{1}{\Omega_k^{(3)} - k \cdot v} \left\{ i(\Omega_{k-q}^{(2)} + \Omega_q^{(1)}) E_{k-q}^{(2)} \cdot \frac{\partial f_q^{(1)}}{\partial v} + i(\Omega_{k-q}^{(1)} + \Omega_q^{(2)}) E_{k-q}^{(1)} \cdot \frac{\partial f_q^{(2)}}{\partial v} \right\} \quad (1.15)$$

従って (1.15) に (1.9) (1.10) を代入すれば、摂動才3次に於いて、 k -mode

の基本波への非線型効果を示す一般式

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_k^{(3)}}{\partial t} = & -i \frac{4\pi e^2}{m} \left(\frac{e}{m} \right)^2 \frac{1}{\varepsilon(\Omega_k^{(3)}, k)} \frac{k}{k^2} \sum_{qq'}' \int d^3v \frac{1}{\Omega_k^{(3)} - k \cdot v} \\ & \times \left[-\frac{4\pi e^2}{m} \frac{1}{\varepsilon(\Omega_{k-q}^{(2)}, k-q)} (\Omega_{k-q}^{(2)} + \Omega_q^{(1)}) \frac{(k-q)}{(k-q)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{\Omega_q^{(1)} - q \cdot v} \right. \\ & \times E_q^{(1)} \cdot \frac{\partial g^{(v)}}{\partial v} \int d^3v' \frac{1}{\Omega_{k-q}^{(2)} - (k-q) \cdot v'} E_{k-q-q'} \cdot \frac{\partial}{\partial v'} \frac{1}{\Omega_{q'}^{(1)} - q' \cdot v'} E_{q'}^{(1)} \cdot \frac{\partial g^{(v')}}{\partial v'} \\ & \left. + \frac{1}{\varepsilon(\Omega_{k-q}^{(2)}, k-q)} (\Omega_{k-q}^{(2)} + \Omega_q^{(1)}) E_q^{(1)} \cdot \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{\Omega_{k-q}^{(2)} - (k-q) \cdot v} \right] \end{aligned}$$

$$\times E_{k-q-q'}^{(1)} \cdot \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{\Omega_q^{(1)} - q' \cdot v} E_{q'}^{(1)} \cdot \frac{\partial g(v)}{\partial v} \Big] \quad (1.16)$$

が求められる。但し、この式の導出に当って才二項は、才一項と合せるために k を固定して $k-q \rightarrow q''$ をおき、更に q'' を q に置き換えた式である。以上の導出において注意を要するのは、(1.12) (1.14) で与えられた $\varepsilon(\Omega_k^{(2)}, k)$, $\varepsilon(\Omega_k^{(3)}, k)$ は決して $\Omega_k^{(2)}$, $\Omega_k^{(3)}$ を決定する式ではないことである。 $\Omega_k^{(2)}$, $\Omega_k^{(3)}$ は (1.8) 式と (1.5) 及び (2.16) の右辺とを見較べて

$$\Omega_k^{(2)} = \pm \Omega_{k-q}^{(1)} \pm \Omega_q^{(1)} \quad (1.17)$$

$$\Omega_k^{(3)} = \pm \Omega_{k-q-q'}^{(1)} \pm \Omega_{q'}^{(1)} \pm \Omega_q^{(1)}$$

で与えられるものとしよう。 $\Omega_k^{(1)}$ は線型理論の範囲で式

$$\varepsilon(\Omega_k^{(1)}, k) = 1 + \frac{4\pi e^2}{m} \int \frac{1}{k^2} \frac{1}{\Omega_k^{(1)} - k \cdot v} k \cdot \frac{\partial F_0(v)}{\partial v} \quad (1.18)$$

で決められるものを用いる。ここで $\Omega_k^{(1)} = \omega_k^{(1)} + i\gamma_k^{(1)}$ としたとき、近似 $\frac{\gamma_k^{(1)}}{\omega_k^{(1)}} \ll 1$ 及び

$(k \cdot v / \omega_k^{(1)})^2 \ll 1$ でよく知られているように、

$$\omega_k^{(1)2} = \omega_p^2 + k^2 \langle v^2 \rangle \quad (1.19)$$

として求められる。今後は $\Omega_k^{(1)} \approx \omega_k^{(1)}$ として (1.19) を使用する。

さて (1.16) の右辺の各項を $q' = -q$ と $q' \neq -q$ なる二つの部分に分けて、 $q' \neq -q$ の項は一種の random phase 項として無視しよう。其の時 (1.16) は

$$\frac{\partial E_k^{(3)}}{\partial t} = -i \frac{4\pi e^2}{m} \left(\frac{e}{m} \right)^2 \frac{1}{\varepsilon(\Omega_k^{(3)}, k)} \frac{1}{k^2} \sum' \int d^3 v \frac{1}{\Omega_k^{(3)} - k \cdot v}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left[-\frac{4\pi e^2}{m} \frac{1}{\varepsilon(\Omega_{k-q}^{(2)}, k-q)} (\Omega_{k-q}^{(2)} + \Omega_q^{(1)}) \frac{(k-q)}{(k-q)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{\Omega_q^{(1)} - q \cdot \nu} \right. \\
 & \times E_q^{(1)} \cdot \frac{\partial g^{(1)}(\nu)}{\partial \nu} \int d^3 \nu' \frac{1}{\Omega_{k-q}^{(2)} - (k-q) \cdot \nu'} \cdot k \cdot \frac{\partial}{\partial \nu'} \frac{1}{\Omega_{-q}^{(1)} + q \cdot \nu'} E_{-q}^{(1)} \cdot \frac{\partial g^{(1)}(\nu')}{\partial \nu'} \\
 & + \frac{1}{\varepsilon(\Omega_{k-q}^{(2)}, k-q)} (\Omega_{k-q}^{(2)} + \Omega_q^{(1)}) E_q^{(1)} \cdot \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{\Omega_{k-q}^{(2)} - (k-q) \cdot \nu} \\
 & \left. \times k \cdot \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{\Omega_{-q}^{(1)} + q \cdot \nu} E_{-q}^{(1)} \frac{\partial g^{(1)}(\nu)}{\partial \nu} \right] E_k^{(1)} \quad (1.20)
 \end{aligned}$$

となる。Drummon-Pines においてはこの分け方に対応するものとして $q' \approx k$ なる in-phase と、そうでない out-phase の部分にとった。しかし次のような物理的な内容の検討から、我々の分け方の natural であることが明らかになる。

さて (1.20) 式から k -mode の振動の減衰率 (又は生長率) は、右辺の各項が実数になる部分として求められる。そのためには項の中の

$$\frac{1}{\varepsilon(\Omega_k^{(3)}, k)}, \frac{1}{\varepsilon(\Omega_k^{(2)}, k)}, \frac{1}{\Omega_k^{(3)} - k \cdot \nu}, \frac{1}{\Omega_k^{(2)} - k \cdot \nu}, \frac{1}{\Omega_k^{(1)} - k \cdot \nu}$$

なる部分の虚数部分 (即ち δ 函数のかかる部分) の奇数回の積として与えられる項を抜き出せば良い。しかし、そのようなすべての項をとることはいたずらに計算を面倒にするだけであるから、我々は一つの近似として一回かかった項だけを問題にしよう。その時、これらの項の中で $1/\varepsilon(\Omega_k^{(2)}, k)$ 、又は $1/\Omega_k^{(2)} - k \cdot \nu$ に於ける虚数部分の項が、丁度 mode-coupling damping に対応するものである。このことは Hamiltonian 型式での議論から次のように類推される。

まず $\Omega_k^{(3)}$ の分析から始めよう。(1.17) で与えられる $\Omega_k^{(3)}$ の値は 各複号のところの符号のあらゆる組合せの数だけ、即ち 8 通りある。今、注目している波の基本波のみを問題にし

プラズマ振動の非線型効果 II

ていることから、近似的に ω_p になるのはその中で6通りある。しかしその中で $q' = -q$ とおいたとき、正確に $\omega_k^{(1)}$ (又は $-\omega_k^{(1)}$) になるのは4通りであるが、この場合には $1/\varepsilon(\Omega_k^{(3)}, k)$ の実数部分が正確に0となり (Appendix 参照) (1.20) の右辺への寄与はない。従って $\Omega_k^{(3)}$ として残るのは

$$\Omega_k^{(3)} = \begin{cases} -\Omega_{k-q-q'}^{(1)} + \Omega_{q'}^{(1)} + \Omega_{q'}^{(1)} \quad q' = -q \quad \omega_p + \frac{1}{2} \frac{\langle v^2 \rangle}{\omega_p} (q^2 - k^2) & (1.21) \\ + \Omega_{k-q-q'}^{(1)} - \Omega_{q'}^{(1)} - \Omega_{q'}^{(1)} \approx -(\omega_p + \frac{1}{2} \frac{\langle v^2 \rangle}{\omega_p} (q^2 - k^2)) & (1.22) \end{cases}$$

の二通りである。このうち (1.20) の右辺の $E_k^{(1)}$ が $E_k^{*(1)}$ とならないのは下の場合、つまり (1.22) である。それゆえ今後、 $\Omega_k^{(3)}$ としては (1.22) をとり、 $E_k^{(1)}$ の場合だけを問題にしよう。

さて $\Omega_k^{(3)}$ として (1.22) をとるとき、それに対応する $\Omega_{k-q}^{(2)}$ は (2.17) の符号の組合せのうち

$$\Omega_{k-q}^{(2)} = \Omega_{k-q-q'}^{(1)} - \Omega_{q'}^{(1)} \quad q' = -q \quad \omega_k^{(1)} - \omega_q^{(1)} \quad (1.23)$$

で与えられる。そこで $1/\varepsilon(\Omega_{k-q}^{(2)}, k-q)$ 又は $1/\Omega_{k-q}^{(2)} - (k-q) \cdot v$ の虚数部分の δ -関数は

$$\delta(\Omega_{k-q}^{(2)} - (k-q) \cdot v) \approx \delta(\omega_k^{(1)} - \omega_q^{(1)} - (k-q) \cdot v)$$

となり、この種の δ 関数は Hamiltonian 型式において議論された時の丁度 Fig 1 (a), (b) で示されるメカニズムに相当するものであることが容易に理解される。(c), (d) のメカニズムに対応するものは (1.20) には含まれていない。これは多分、振動の higher order に含まれるものであろうと推測される。しかし、この報告での結果と Hamiltonian 型式での結果の対応には別に支障は来さない。というのは Hamiltonian 型式の場合においても (c) (d) に対応するものは main term ではなかったからである。

[Fig 1]

一方, $1/\varepsilon(\Omega_k^{(3)}, k)$ 又は $1/\Omega_k^{(3)} - k \cdot v$ の虚数部分が含まれる項は, 才3高調波の成長率及び Landau damping に対する高次の補正項を与えられるものであろう。又

$1/\Omega_k^{(1)} - k \cdot v$ の虚数部分が含まれる項も Landau damping に対する高次の補正項である。これらについての詳細な議論及び計算は次の報告で行なう。我々は, この報告では

(1.20) の mode-coupling damping に相当する部分だけを論じよう。

そこで, これから取り扱う (1.20) の mode-coupling damping を与える項を抽出するための上の議論を結果論的に眺めれば, 要するに (1.8) の代りに摂動の n 次量である $f_k^{(n)}, E_k^{(n)}$ として

$$f_k^{(n)} = f_k^{(n)} e^{-i\Omega_k^{(n)} t} + f_k^{*(n)} e^{i\Omega_k^{(n)} t} \quad (1.24)$$

$$E_k^{(n)} = E_k^{(n)} e^{-i\Omega_k^{(n)} t} + E_k^{*(n)} e^{i\Omega_k^{(n)} t}$$

$$(n=1, 2, 3, \dots)$$

ととった時 (ここで $f_k^{*(n)}, E_k^{*(n)}$ は (1.7) (1.9) (1.10) (1.11) 等で虚数単位 i を $-i$ に置き換え, 且つ E_k, f_k の * 印を交換したものとして与えられる) (1.20) の右辺に生ずる多くの項の中から次のような項を問題にすることに対応している。即ち

$$\frac{\partial E_k^{(3)}}{\partial t} = -i \frac{4\pi e^2}{m} \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{1}{\varepsilon(\Omega_k^{(3)}, k)} \frac{1}{k^2} \sum_q \int d^3 v \frac{1}{\Omega_k^{(3)} - k \cdot v}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left[\frac{4\pi e^2}{m} \frac{1}{\epsilon(\Omega_{k-q}^{(2)}, k-q)} \Omega_k^{(3)} \frac{(k-q)}{(k-q)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{\Omega_q^{(1)} - q \cdot v} E_q^{*(1)} \cdot \frac{\partial g(v)}{\partial v} \right. \\
 & \int d^3 v' \frac{1}{\Omega_{k-q}^{(2)} - (k-q) \cdot v'} k \cdot \frac{\partial}{\partial v'} \frac{1}{\Omega_{-q}^{(1)} + q \cdot v'} E_{-q}^{*(1)} \cdot \frac{\partial g(v')}{\partial v'} \\
 & + \frac{1}{\epsilon(\Omega_{k-q}^{(2)}, k-q)} \Omega_k^{(3)} E_q^{*(1)} \cdot \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{\Omega_{k-q}^{(2)} - (k-q) \cdot v} k \cdot \frac{\partial}{\partial v} \\
 & \left. \frac{1}{\Omega_q^{(1)} + k \cdot v} E_{-q}^{*(1)} \cdot \frac{\partial g(v)}{\partial v} \right] E_k^{(1)} \quad (1.25)
 \end{aligned}$$

その他の項はすべて前記の理由から，mode-coupling damping の対象にはならないと考えられる。

§ 2. mode-coupling damping

前記の指針に従い (1.25) の右辺の各項に含まれる $1/\epsilon(\Omega_k^{(3)}, k)$ ， $1/\Omega_k^{(3)} - k \cdot v$ ， $1/\Omega_q^{(1)} \pm q \cdot v$ はすべて実数部分をとるものとする。これらの値及び $1/\epsilon(\Omega_{k-q}^{(2)}, k-q)$ ， $1/\Omega_{k-q}^{(2)} - (k-q) \cdot v$ の実数部分，虚数部分の具体的な値の導出はすべて Appendix に与えてある。

これからの計算にあたって次の二つの仮定をする。

- (1) 準線型で与えられる分布 g として近似的に Maxwell 分布

$$F_0(v) = n \left(\frac{m}{2\pi\kappa T} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left[-\frac{m}{2\kappa T} v^2 \right]$$

を用いること。

(2) 波数ベクトル k と q が殆ど平行に近い極限を考えること。

(1)の仮定については前論文 I の Hamiltonian 型式での議論のところで述べてあるから省略するが、これはあくまで一つの近似である。準線型理論の範囲内で、すみやかにならされて準平衡の状態に達した時、其の後 mode-coupling 効果で電子分布がどのように変化してゆくのか、及びこのことと粒子間の衝突効果によって準平衡分布が平衡分布 (Maxwell 分布) になる過程とがどのような関連にあるのかを議論するときには、この (1) の仮定は焦点とすべき問題の本質をなくしてしまう。しかし、波の減衰を議論するには、準線型理論に成り立つ条件の範囲内では、それ程、現象の本質を失わないであろうと考えられる。又仮定 (2) は

Hamiltonian 型式の議論から damping が k と q との間の角 θ_{kq} が殆ど 0 に近いとき最大になったことの意味から、一般の角度の場合の計算の厄介さと相まってとった近似である。

[1] $\text{Re} [1/\varepsilon(\Omega_{k-q}^{(2)}, k-q)]$, $\text{Im} [1/\Omega_{k-q}^{(2)} - (k-q) \cdot v]$ の場合

Appendix において与えた式 (A.1) (A.2) (A.3) (A.4) (A.6) を用いて (1.25) の第一項 T_1 は

$$T_1 = -\frac{\pi}{8} \left(\frac{4\pi e^2}{m} \right)^2 \left(\frac{e}{m} \right)^2 \frac{1}{\omega_p^3} \frac{\omega_k^{(3)}}{k^2} \sum_q' \frac{1}{q^2 - k^2} H(k, q) I(k, q) E_k^{(1)} \quad (2.1)$$

$$H(k, q) \equiv \int d^3 v \left\{ 1 - \frac{k \cdot v}{\omega_p} + \left(\frac{k \cdot v}{\omega_p} \right)^2 \right\} (k - q) \cdot \frac{\partial}{\partial v} \\ \times \left\{ 1 + \frac{q \cdot v}{\omega_p} + \left(\frac{q \cdot v}{\omega_p} \right)^2 \right\} E_q^{*(1)} \frac{\partial F_0(v)}{\partial v} \quad (2.2)$$

$$I(k, q) \equiv \int d^3 v \delta(\omega_k^{(1)} - \omega_q^{(1)} - (k - q) \cdot v) k \cdot \frac{\partial}{\partial v} E_{-q}^{*(1)} \frac{\partial F_0(v)}{\partial v} \quad (2.3)$$

として与えられる。 $H(k, q)$, $I(k, q)$ はベクトル k , q , v の向きを Appendix に示したようにとり、 k と q の間の角 θ_{kq} を 0 とする極限では容易に積分することが出来て、次のように求められる。

$$H(k, q) = H_1(k, q) + H_2(k, q) + H_3(k, q) \quad (2.4)$$

$$H_1(k, q) \equiv \int d^3 v (k-q) \cdot \frac{\partial}{\partial v} E_q^{*(1)} \cdot \frac{\partial}{\partial v} F_0(v) = 0 \quad (2.5)$$

$$H_2(k, q) \equiv \frac{1}{\omega_p} \int d^3 v \left\{ (k-q) \cdot \frac{\partial}{\partial v} (q \cdot v) E_q^{*(1)} \cdot \frac{\partial}{\partial v} \right. \\ \left. - (k \cdot v) (k-q) \cdot \frac{\partial}{\partial v} E_q^{*(1)} \cdot \frac{\partial}{\partial v} \right\} F_0(v) = 0 \quad (2.6)$$

$$H_3(k, q) \equiv \frac{1}{\omega_p^2} \int d^3 v \left[(k \cdot v)^2 (k-q) \cdot \frac{\partial}{\partial v} E_q^{*(1)} \cdot \frac{\partial}{\partial v} \right. \\ \left. + (k-q) \cdot \frac{\partial}{\partial v} (q \cdot v)^2 E_q^{*(1)} \cdot \frac{\partial}{\partial v} - (k \cdot v) (k-q) \cdot \frac{\partial}{\partial v} (q \cdot v) E_q^{*(1)} \cdot \frac{\partial}{\partial v} \right] F_0(v) \\ = \frac{n}{\omega_p^2} |k-q| \left\{ 2k^2 - kq \right\} |E_q^{*(1)}| \quad (2.7)$$

$$I(k, q) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{4}{v_T^5} \frac{k (\omega_k^{(1)} - \omega_q^{(1)})}{|k-q|^3} - \frac{2}{v_T^3} \frac{k}{|k-q|} \right\} \exp \left[-\frac{m}{2\kappa T} \left(\frac{\omega_k^{(1)} - \omega_q^{(1)}}{|k-q|} \right)^2 \right] \left| E_{-q}^{*(1)} \right| \quad (2.8)$$

$H(k, q)$ の計算では $\left(\frac{k \cdot v}{\omega_p} \right)^3$ 以上の order の項は無視した。又 v_T は $v_T \equiv \sqrt{2\kappa T/m}$

で定義されている。(2.7) (2.8) を(2.1) に代入して整頓すると

$$T_1 = \sqrt{\pi} \left(\frac{e}{m} \right)^2 \omega_k^{(3)} \sum_q' \left[\frac{1}{4} \frac{1}{\omega_p v_T^3} \frac{(2k-q)}{q^2 - k^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{\omega_p v_T^5} \frac{(\omega_k^{(1)} - \omega_q^{(1)})^2 (q-2k)}{q^2 - k^2 (k-q)^2} \right] \\ \times \exp \left[-\frac{m}{2\kappa T} \left(\frac{\omega_k^{(1)} - \omega_q^{(1)}}{|k-q|} \right)^2 \right] |E_q^{(1)^2}| E_k^{(1)} \quad (2.9)$$

同様に (1.25) のオ二項 T_2 は

$$T_2 = -\frac{\pi}{8} \left(\frac{4\pi e^2}{m} \right)^2 \left(\frac{e}{m} \right)^2 \frac{1}{\omega_p^2} \frac{\omega_k^{(3)}}{k^2} \sum_q' \frac{(k-q)^2}{q^2 - k^2} J(k \cdot q) E_k^{(1)} \quad (2.10)$$

$$J(k, q) \equiv \int d^3 v \left\{ 1 - \frac{k \cdot v}{\omega_p} \right\} E_q^{*(1)} \cdot \frac{\partial}{\partial v} \delta(\omega_k^{(1)} - \omega_q^{(1)} - (k-q) \cdot v) \\ \times k \cdot \frac{\partial}{\partial v} E_{-q}^{*(1)} \cdot \frac{\partial}{\partial v} F_0(v) \quad (2.11)$$

積分 $J(k, q)$ は次のように二つの部分に分ける。

$$J(k, q) = J_1(k, q) + J_2(k, q) \quad (2.12)$$

$$J_1 \equiv \int d^3 v E_q^{*(1)} \cdot \frac{\partial}{\partial v} \delta(\omega_k^{(1)} - \omega_q^{(1)} - (k-q) \cdot v) k \cdot \frac{\partial}{\partial v} E_{-q}^{*(1)} \cdot \frac{\partial}{\partial v} F_0(v) \quad (2.13)$$

$$J_2 \equiv -\frac{1}{\omega_p} \int d^3 v (k \cdot v) E_q^{*(1)} \cdot \frac{\partial}{\partial v} \delta(\omega_k^{(1)} - \omega_q^{(1)} - (k-q) \cdot v) \\ \times k \cdot \frac{\partial}{\partial v} E_{-q}^{*(1)} \cdot \frac{\partial}{\partial v} F_0(v) \quad (2.14)$$

これらの積分は関係式

$$\int d^3 v E_q^{*(1)} \cdot \frac{\partial}{\partial v} \delta(\omega_k^{(1)} - \omega_q^{(1)} - (k-q) \cdot v) G(v) = 0 \\ \int d^3 v f(v) E_q^{*(1)} \cdot \frac{\partial}{\partial v} \delta(\omega_k^{(1)} - \omega_q^{(1)} - (k-q) \cdot v) G(v) \\ = -\int d^3 v \left\{ E_q^{*(1)} \cdot \frac{\partial}{\partial v} f(v) \right\} G(v) \delta(\omega_k^{(1)} - \omega_q^{(1)} - (k-q) \cdot v)$$

を用いて直ちに求められる。其の結果は

$$J_1 = 0 \quad (2.15)$$

$$J_2 = \frac{m}{\sqrt{\pi}} \left\{ -\frac{2}{\omega_p v_T^3} \frac{k^2}{|k-q|} + \frac{4}{\omega_p v_T^5} \frac{k^2 (\omega_k^{(1)} - \omega_q^{(1)})^2}{|k-q|^3} \right\} \\ \exp \left[-\frac{m}{2\kappa T} \left(\frac{\omega_k^{(1)} - \omega_q^{(1)}}{|k-q|} \right)^2 \right] |E_q^{(1)}|^2 \quad (2.16)$$

故に (2.12) (2.15) (2.16) を (2.10) に代入して

$$T_2 = \sqrt{\pi} \left(\frac{e}{m} \right)^2 \omega_k^{(3)} \sum_q' \left[\frac{1}{4} \frac{1}{\omega_p^3 \nu_T^3} \frac{|k-q|}{q^2 - k^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{\omega_p \nu_T^5} \frac{(\omega_k^{(1)} - \omega_q^{(1)})^2}{q^2 - k^2} \frac{1}{|k-q|} \right] \\ \exp \left[- \frac{m}{2 \kappa T} \left(\frac{\omega_k^{(1)} - \omega_q^{(1)}}{k - q} \right)^2 \right] |E_q^{(1)}|^2 E_k^{(1)} \quad (2.17)$$

[2] $\text{Im} [1/\varepsilon(\Omega_{k-q}^{(2)}, k-q)]$, $\text{Re} [1/\Omega_{k-q}^{(2)} - (k-q) \cdot v]$ の場合

Appendix において与えられている式 (A.1) (A.2) (A.3) (A.5) (A.7) を用いて (1.25) のオー一項 T_1' は

$$T_1' = -\frac{\sqrt{\pi}}{8} \left(\frac{4\pi e^2}{m} \right)^2 \left(\frac{e}{m} \right)^2 \frac{1}{\omega_p^3 \nu_T^3} \frac{\omega_k^{(3)}}{k^2} \sum_q' \frac{|k-q|}{(k-q)^2} \frac{(\omega_k^{(1)} - \omega_q^{(1)})}{q^2 - k^2} \\ \times H(k, q) K(k, q) \exp \left[- \frac{m}{2 \kappa T} \left(\frac{\omega_k^{(1)} - \omega_q^{(1)}}{|k-q|} \right)^2 \right] E_k^{(1)} \quad (2.18)$$

$$K(k, q) = \int d^3 v \frac{1}{(k-q) \cdot v} \left\{ 1 + \frac{(\omega_k^{(1)} - \omega_q^{(1)})}{(k-q) \cdot v} \right\} k \cdot \frac{\partial}{\partial v} \left\{ 1 - \frac{q \cdot v}{\omega_p} \right\} E_{-q}^{*(1)} \cdot \frac{\partial F_0(v)}{\partial v} \quad (2.19)$$

となる。 $H(k, q)$ は (2.2) で与えられたものである。 $K(k, q)$ は $(k \cdot v / \omega_p)^2$ 以上の項を落して、次のように求められる。

$$K(k, q) = K_1(k, q) + K_2(k, q) \quad (2.20)$$

$$K_1(k, q) = \int d^3 v \frac{1}{(k-q) \cdot v} k \cdot \frac{\partial}{\partial v} E_{-q}^{*(1)} \cdot \frac{\partial}{\partial v} F_0(v) = 0 \quad (2.21)$$

$$K_2(k, q) = \int d^3 v \left\{ \frac{(\omega_k^{(1)} - \omega_q^{(1)})}{((k-q) \cdot v)^2} k \cdot \frac{\partial}{\partial v} E_{-q}^{*(1)} \cdot \frac{\partial}{\partial v} \right. \\ \left. - \frac{1}{\omega_p} \frac{1}{(k-q) \cdot v} k \cdot \frac{\partial}{\partial v} (q \cdot v) E_{-q}^{*(1)} \cdot \frac{\partial}{\partial v} \right\} F_0(v) \quad (2.22)$$

$$= \left\{ \frac{8}{v_T^4} \frac{k(\omega_k^{(1)} - \omega_q^{(1)})}{(k-q)^2} + \frac{2}{v_T^2 \omega_p} \frac{kq}{|k-q|} \right\} n |E_{-q}^{*(1)}| \quad (2.23)$$

従って (2.4) ~ (2.7), (2.20) ~ (2.23) を用いて (2.18) は

$$\begin{aligned} T_1' = & \sqrt{\pi} \left(\frac{e}{m} \right)^2 \omega_k^{(3)} \sum_q' \left[\frac{1}{4} \frac{(q^2 - 2kq)}{|k-q|} \frac{(\omega_k^{(1)} - \omega_q^{(1)})}{q^2 - k^2} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\omega_p^2 v_T^5} \frac{(q-2k)}{(k-q)^2} \frac{(\omega_k^{(1)} - \omega_q^{(1)})^2}{q^2 - k^2} \right] \exp \left[-\frac{m}{2\pi T} \frac{(\omega_k^{(1)} - \omega_q^{(1)})^2}{|k-q|} \right] |E_q^{(1)}|^2 |E_k^{(1)}| \end{aligned} \quad (2.24)$$

次に (1.25) のオ二項 T_2' は

$$\begin{aligned} T_2' = & -\frac{\sqrt{\pi}}{8} \left(\frac{4\pi e^2}{m} \right)^2 \left(\frac{e}{m} \right)^2 \frac{1}{\omega_p^2 v_T} \frac{\omega_k^{(3)}}{k^2} \sum_q' \frac{|k-q|(\omega_k^{(1)} - \omega_q^{(1)})}{q^2 - k^2} \\ & L(k, q) \exp \left[-\frac{m}{2\pi T} \frac{(\omega_k^{(1)} - \omega_q^{(1)})^2}{|k-q|} \right] E_k^{(1)} \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} L(k, q) \equiv & \int d^3 v \left\{ 1 - \frac{k \cdot v}{\omega_p} + \left(\frac{k \cdot v}{\omega_p} \right)^2 \right\} E_q^{*(1)} \cdot \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{(k-q) \cdot v} \\ & \times \left\{ 1 + \frac{(\omega_k^{(1)} - \omega_q^{(1)})}{(k-q) \cdot v} \frac{(\omega_k^{(1)} - \omega_q^{(1)})^2}{((k-q) \cdot v)^2} \right\} k \cdot \frac{\partial}{\partial v} \left\{ 1 - \frac{q \cdot v}{\omega_p} + \left(\frac{q \cdot v}{\omega_p} \right)^2 \right\} E_{-q}^{(1)} \cdot \frac{\partial F_0(v)}{\partial v} \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$= \left\{ \frac{16}{v_T^4 \omega_p} \frac{(\omega_k^{(1)} - \omega_q^{(1)})}{(k-q)^2} + \frac{2}{v_T^2 \omega_p^2} \frac{q}{|k-q|} \right\} k^2 n |E_q^{(1)}|^2 \quad (2.27)$$

この計算で $(k \cdot v / \omega_p)^4$ の order は無視した。 (2.27) を (2.25) に代入して

$$T_2' = \sqrt{\pi} \left(\frac{e}{m} \right)^2 \omega_k^{(3)} \sum_q' \left\{ -\frac{1}{4} \frac{1}{\omega_p^2 v_T^3} \frac{q(\omega_k^{(1)} - \omega_q^{(1)})}{q^2 - k^2} - 2 \frac{1}{\omega_p v_T^5} \frac{(\omega_k^{(1)} - \omega_q^{(1)})}{q^2 - k^2} \frac{1}{|k-q|} \right\}$$

プラズマ振動の非線型効果 II

$$\times \exp \left[-\frac{m}{2\kappa T} \left(\frac{\omega_k^{(1)} - \omega_q^{(1)}}{|k-q|} \right)^2 \right] |E_q^{(1)}|^2 E_k^{(1)} \quad (2.28)$$

以上〔1〕と〔2〕の場合の計算結果をまとめると，(2.9) (2.17) (2.24) (2.28) より (1.25) は

$$\frac{\partial E^{(3)}}{\partial t} = T_1 + T_2 + T_1' + T_2' = \Gamma(k) E_k^{(1)} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \Gamma(k) = & \pi \sqrt{\pi} \left(\frac{e}{m} \right)^2 \omega_k^{(3)} \sum_q' \left[\frac{2}{\omega_p v_T^3} \frac{(2k-q+|k-q|)}{q^2 - k^2} \right. \\ & \left. + \frac{2}{\omega_p^3 v_T} \left\{ \frac{(2kq - q^2)}{|k-q|} + q \right\} + \frac{4}{\omega_p^2 v_T^3} (\omega_k^{(1)} - \omega_q^{(1)}) \left\{ \frac{3(2k-q)}{(k-q)^2} + \frac{5}{|k-q|} \right\} \right] \\ & \times \exp \left[-\frac{m}{2\kappa T} \left(\frac{\omega_k^{(1)} - \omega_q^{(1)}}{|k-q|} \right)^2 \right] \varepsilon_q \quad (2.30) \end{aligned}$$

このまとめにおいて我々は関係式

$$\begin{aligned} \omega_k^{(1)} - \omega_q^{(1)} & \approx \frac{v_T^2}{\omega_p} (k^2 - q^2) \\ \varepsilon_q & = \frac{1}{8\pi} |E_q^{(1)}|^2 \end{aligned}$$

を用いた。さて (2.30) において〔 〕内第2, 3項は，第1項に比較して $(k \cdot v / \omega_p)^2$ の order で低くなっていることが容易に確かめられる。

それ故 (2.30) の main term は

$$\begin{aligned} \Gamma(k) = & -\pi \sqrt{\pi} \left(\frac{e}{m} \right)^2 \omega_p \sum_q' \frac{2}{\omega_p v_T^3} \frac{(2k-q+|k+q|)}{q^2 - k^2} \\ & \times \exp \left[-\frac{m}{2\kappa T} \left(\frac{\omega_k^{(1)} - \omega_q^{(1)}}{|k-q|} \right)^2 \right] \varepsilon_q \quad (2.31) \end{aligned}$$

となる。 $\omega_k^{(3)}$ は (1.22) より

$$\omega_k^{(3)} \approx -(\omega_p + \frac{v_T^2}{\omega_p} (q^2 - k^2))$$

とおき, その才2項は無視した。(2.30)で次の order を問題とするときには, この項を落すことは出来ない。(2.31)は $k - q > 0$ と $k - q < 0$ の場合の二つに分けて, 書き改めると。

$$\Gamma(k) = \begin{cases} -2\pi\sqrt{\pi}\left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{1}{v_T^3 \omega_p} \omega_p \sum' \frac{k}{|q^2 - k^2|} \exp\left[-\frac{m}{2\kappa T} \left(\frac{\omega_k^{(1)} - \omega_q^{(1)}}{|k - q|}\right)^2\right] \varepsilon_q & (k < q) \\ \left\{ 6\pi\sqrt{\pi}\left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{1}{v_T^3 \omega_p} \omega_p \sum' \frac{k}{|k^2 - q^2|} \right. \\ \left. - 4\pi\sqrt{\pi}\left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{1}{v_T^3 \omega_p} \omega_p \sum' \frac{q}{|k^2 - q^2|} \right\} \exp\left[-\frac{m}{2\kappa T} \left(\frac{\omega_k^{(1)} - \omega_q^{(1)}}{|k - q|}\right)^2\right] & (k > q) \end{cases} \quad (2.32)$$

となる

§ 3. む す び

この節では前節での結果 (2.32) の意味する内容を考察すると共に Hamiltonian 型式で求められている結果との比較を示す。

(2.32) は, 容易にわかるように, 今注目している k -mode の波が自分自身より短い波長の波と couple することにより減衰してゆき, 一方長い波長の波と couple することにより成長することを示している。つまり注目している波のエネルギーは mode-coupling によりいつも波長の短い波へ移されてゆくわけである。例へばビームなどでその速度に対応する特定の波長のプラズマ波が励起されると, その波のエネルギーは mode-coupling を通じて次第に波長の短い波に伝わってゆく。これらの事情は Hamiltonian 型式でも

のと異っている。Hamiltonian 型式では $k > q$ なる q の領域においても damping を示していた。

Hamiltonian 型式で与えられた damping $\Gamma_H(k)$ の main term は $\theta_{kq} \rightarrow 0$ の極限で

$$\Gamma_H(k) = -\frac{\pi\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{e^2}{m}\right) \frac{1}{v_T \omega_p} \omega_k \sum_q \frac{1}{|k-q|} \exp \left[-\frac{m}{2\kappa T} \left(\frac{\omega_k^{(1)} - \omega_q^{(1)}}{|k-q|} \right)^2 \right] \quad (3.1)$$

である。一方, (2.32) において $k < q$ なる場合を $\varepsilon_q = n_q \hbar \omega_q^{(1)} \approx \kappa T$ (n_q は q -mode の plasmon の個数) において (3.1) と比較出来るような形に整頓すると

$$\Gamma(k) = -\pi\sqrt{\pi} \left(\frac{e^2}{m}\right) \frac{1}{v_T \omega_p} \omega_p \sum'_q \frac{k}{(k+q)} \frac{1}{|k-q|} \exp \left[-\frac{m}{2\kappa T} \left(\frac{\omega_k^{(1)} - \omega_q^{(1)}}{|k-q|} \right)^2 \right] \quad (3.2)$$

となる。この両者は $k \sim q$ で $1/|k-q|$ で発散していることの事柄は全く良い一致を示しているが, $k \rightarrow 0$ の極限では, 前者は 0 でない有限の値をもつものに対して, 後者は 0 となる。つまり後者においては $k \rightarrow 0$ の波の減衰はないことを示している。しかし, (3.2) を Landau damping と比較すると, k が小さくなるにつれて (3.2) で与えられる $\Gamma(k)$ は k の order で小さくなってゆくに対して Landau damping は指数函数的に減少する。それ故 k が小さいところでは mode-coupling damping は Landau damping より大きくなる。このことは Hamiltonian 型式でのものと同じである。

以上からわかるように, とにかく両者の比較はいささかの喰い違いがある。これらの喰い違いの原因としては, Hamiltonian 型式の計算において

(i) 前論文 I での (4.7) 式で与えられるような近似をしたこと

(ii) 補助条件を無視したこと

などが考えられる。

この報告での計算結果で $k \rightarrow 0$ のときの $\Gamma(k)$ の振舞いについては一言注意を要する。それは (2.30) のオ2項, オ3項を眺めると $k \rightarrow 0$ の極限で確かに 0 でないある大きさの値として残るようである。しかしながら, 今までの計算には, main term と比較して $(k\omega/\omega_p)^2$ の order の項は, そのすべてを含んでいない。それ故このことは今後調べてみなければ

ならないことである。

最後に (2.31) で与えられる $\Gamma(k)$ の order をあたると, それは

$$\Gamma(k) \approx \omega_p g \frac{\varepsilon_q}{\kappa T}$$

である。ここで $g = 1/nL_D^3$ (L_D : Debye 半径) である。これは前論文 I での (3.16) において与えられたものである。又 $\varepsilon_q = n_q k \omega_q$ と置いた (3.2) の order は (3.1) における Hamiltonian 型式で求められている結果と, 0 でないある大きさの k の値の所で一致していることは容易にわかる。

文 献

- 1) 松浦, 本間, 小川 : 核融合研究 8 319 (1962)
- 2) W.E. Drummond and D.Pines :
Salzburg Conference CN-10/134
- 3) A.A. Vedenov, E.P. Velikov and R.Z. Sagdeev :
Salzburg Conference CN-10/199

Appendix

(i) $1/\varepsilon(\Omega_k^{(3)}, k)$ の実数部分

今 $\Omega_k^{(3)} = \omega_k^{(3)} + i r_k^{(3)}$ として $\omega_k^{(3)} \gg r_k^{(3)}$ 及び $(k \cdot v / \omega_p)^2 \ll 1$ の近似を用いると $\varepsilon(\Omega_k^{(3)}, k)$ の実数部分は定義 (1.14) から

$$\varepsilon_R(\Omega_k^{(3)}, k) \approx 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega_k^{(3)}} \right)^2 \frac{k^2 v_T^2}{(\omega_k^{(3)})^2} \approx \frac{4(q^2 - k^2) v_T^2}{\omega_p^2}$$

プラズマ振動の非線型効果 II

$\omega_k^{(3)}$ として(1.22)を用いた。従って $\varepsilon_R(\Omega_k^{(3)}, k) \gg \varepsilon_I(\Omega_k^{(3)}, k)$ の近似で

$$\operatorname{Re} \left[\frac{1}{\varepsilon(\Omega_k^{(3)}, k)} \right] \approx \frac{1}{\varepsilon_R(\Omega_k^{(3)}, k)} = \frac{\omega_p^2}{4(q^2 - k^2) v_T^2} \quad (\text{A} \cdot 1)$$

$\omega_k^{(3)}$ が正確に $\omega_k^{(3)} = \omega_k^{(1)}$ である場合には $\varepsilon(\Omega_k^{(3)}, k) = \varepsilon(\Omega_k^{(1)}, k)$ の関係が成立し、従って

$$\varepsilon_R(\Omega_k^{(3)}, k) = \varepsilon_R(\Omega_k^{(1)}, k) = 0$$

となって

$$\operatorname{Re} \left[\frac{1}{\varepsilon(\Omega_k^{(3)}, k)} \right] = \frac{\varepsilon_R(\Omega_k^{(3)}, k)}{|\varepsilon_R(\Omega_k^{(3)}, k)|^2 + |\varepsilon_I(\Omega_k^{(3)}, k)|^2} = 0$$

となる。

(II) $1/\Omega_k^{(3)} - k \cdot v$ の実数部分

$$\operatorname{Re} \left[\frac{1}{\Omega_k^{(3)} - k \cdot v} \right] \approx \frac{1}{\omega_k^{(3)} - k \cdot v} = -\frac{1}{\omega_p} \left\{ 1 - \frac{k \cdot v}{\omega_p} + \left(\frac{k \cdot v}{\omega_p} \right)^2 + \dots \right\} \quad (\text{A} \cdot 2)$$

(III) $1/\Omega_q^{(1)} \pm q \cdot v$ の実数部分

$$\operatorname{Re} \left[\frac{1}{\Omega_q^{(1)} \pm q \cdot v} \right] \approx \frac{1}{\omega_q^{(1)} \pm q \cdot v} = \frac{1}{\omega_p} \left\{ 1 \mp \frac{q \cdot v}{\omega_p} + \left(\frac{q \cdot v}{\omega_p} \right)^2 \mp \dots \right\} \quad (\text{A} \cdot 3)$$

(IV) $1/\varepsilon(\Omega_{k-q}^{(2)}, k-q)$ の実数及び虚数部分について

定義(1.12)より

$$\varepsilon(\Omega_{k-q}^{(2)}, k-q) = \varepsilon_R(\Omega_{k-q}^{(2)}, k-q) + \varepsilon_I(\Omega_{k-q}^{(2)}, k-q)$$

$$\varepsilon_R(\Omega_{k-q}^{(2)}, k-q) = 1 + \frac{4\pi e^2}{m} \frac{k}{k^2} \int d^3v \frac{1}{\omega_{k-q}^{(2)} - (k-q) \cdot v} \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\varepsilon_I(\Omega_{k-q}^{(2)}, k-q) = -\pi \frac{4\pi e^2}{m} \cdot \frac{1}{k^2} \int d^3 v \delta(\omega_{k-q}^{(1)} - \omega_q^{(1)} - (k-q) \cdot v) k \cdot \frac{\partial g}{\partial v}$$

この導出で $\Omega_{k-q}^{(2)} = \omega_{k-q}^{(2)} + i r_{k-q}^{(2)}$ として $\omega_{k-q}^{(2)} \gg r_{k-q}^{(2)}$ の近似を用い、更に $\omega_{k-q}^{(2)}$ としては (1.2.3) で与えられるものを用いる。 g として近似的に Maxwell 分布をとると $(k \cdot v / \omega_p)^2 \ll 1$ の近似で

$$\varepsilon_R(\Omega_{k-q}^{(2)}, k-q) \approx - \frac{2 \omega_p^2}{|k-q|^2 v_T^2}$$

一方 $\varepsilon_I(\Omega_{k-q}^{(2)}, k-q)$ は

$$\varepsilon_I(\Omega_{k-q}^{(2)}, k-q) = 2\sqrt{\pi} \frac{\omega_p^2 (\omega_k^{(1)} - \omega_q^{(1)})}{|k-q|^3 v_T^3} \exp \left[- \frac{m}{2\kappa T} \left(\frac{\omega_k^{(1)} - \omega_q^{(1)}}{|k-q|} \right)^2 \right]$$

故に $\varepsilon_R \gg \varepsilon_I$ の近似で (この近似は $k \rightarrow 0$ のときには十分に成り立つ)

$$\operatorname{Re} \left[\frac{1}{\varepsilon(\Omega_{k-q}^{(2)}, k-q)} \right] \approx -\frac{1}{2} \frac{(k-q)^2 v_T^2}{\omega_p^2} \quad (\text{A} \cdot 4)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left[\frac{1}{\varepsilon(\Omega_{k-q}^{(2)}, k-q)} \right] &\approx \frac{-\varepsilon_I}{|\varepsilon_R|^2} \\ &= -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{|k-q| v_T^2}{\omega_p^2 v_T} (\omega_k^{(1)} - \omega_q^{(1)}) \exp \left[- \frac{m}{2\kappa T} \left(\frac{\omega_k^{(1)} - \omega_q^{(1)}}{|k-q|} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{A} \cdot 5)$$

(V) $1/\Omega_{k-q}^{(2)} - (k-q) \cdot v$ の実数、及び虚数部分

$$\operatorname{Im} \left[\frac{1}{\Omega_{k-q}^{(2)} - (k-q) \cdot v} \right] = -\pi \delta(\omega_k^{(1)} - \omega_q^{(1)} - (k-q) \cdot v) \quad (\text{A} \cdot 6)$$

$$\operatorname{Re} \left[\frac{1}{\Omega_{k-q}^{(2)} - (k-q) \cdot v} \right] \approx - \frac{1}{(k-q) \cdot v} \left\{ 1 + \frac{(\omega_k^{(1)} - \omega_q^{(1)})}{(k-q) \cdot v} + \dots \right\} \quad (\text{A} \cdot 7)$$

プラズマ振動の非線型効果 II

この実数部分の展開の各項に関連した (1.25) の右辺の積分をするとき、その積分領域としては近似的に $0 \sim \infty$ をとるが、展開のある高次の項からは、この積分領域では 0 の所が発散する可能性がある。そのときには展開から容易にわかるように積分の下限として

$$v_0 = \frac{(\omega_k - \omega_q)}{k - q}$$

をとることに留意しなければならない。

(VI) § 2 の積分に於いて必要なベクトル k, q, v の座標の取り方は Fig. 2 の如くである。

Fig. 2