弱電離プラズマ中のイオン振動*

佐藤徳芳(東北大工)**・八田吉典(東北大工)

(1962年10月18日 受理)

Abstract : 弱電離プラズマ中におけるイオン振動の分散関係を線形化された Boltzmann-Vlasore 方程式とポアッソンの方程式を使用して求め, イオン振動が荷電粒子(主にイオン)一中性粒子間衝突によってどのような影響を受けるかについて調べる. Boltzmann-Vlasore方程式の衝突項は, 荷電粒子一中性粒子間衝突について,

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} = -\frac{n_{\alpha} F_{\alpha 0} - f_{\alpha}}{\tau_{\alpha}} \quad (\alpha = e, i, f_{\alpha} : \text{速度分布函数}, F_{\alpha 0} : \text{規格化された定常}$$

状態速度分布函数, n_{α} : 粒子数密度, τ_{α} : mean free time) で近似し, 荷電粒子間の Debye length より近い短距離相互作用は考えに入れない。尚, 簡単のため

$$\frac{1}{5.6} \frac{\lambda}{\lambda_e} \ll 1 \quad (\lambda : \text{波長}, \lambda_e : \text{電子の平均自由行程}) \text{ を満たす振動のみを対称とする。}$$

特に温度の比が $\frac{T_e}{T_i} = 1$ と $\frac{T_e}{T_i} \ll 1$ の場合について, イオン振動が不安定となるの

に必要な relative drift velocity がイオン一中性粒子間衝突により, どのように

変るかを考える。 $\frac{T_e}{T_i} \gg 1$ の場合, この衝突が無視出来るならば, relative drift

$$\text{velocity が } v_0 = \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \left(\frac{\kappa T_e}{m_e}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{k^2}{k_D^2}\right)^{-1/2} \left(k = \frac{2\pi}{\lambda}, k_D^2 = \frac{4\pi e^2 n_{e0}}{\kappa T_e}\right)$$

* Ion Oscillations in a Weakly Ionized Plasma

** N. Sato (Faculty of Engineering, Tohoku University)

Y. Hatta (Faculty of Engineering, Tohoku University)

より大の時、不安定となるが、衝突周波数が考えている振動の周波数と同じ程度の時は、電子の熱運動速度程度の *relative drift velocity* がなければ、イオン振動の不安定が起らないことがわかる。

§1 Introduction

プラズマ中のイオン振動に関する理論的研究は、1929年 Tonks and Langmuir¹⁾ により、流体近似(二流体モデル)を彩用してなされたの最初で、彼等は電子、イオンの運動が等温的に変化すると仮定して分散関係を求めた。これに対して、Spitzer は断熱変化として、よりくわしい研究を行った。更に最近、粒子の速度分布を考慮して、Boltzmann-Vlasov 方程式にもとづいた取扱いが Buneman³⁾, Bernstein et al⁴⁾, Jackson,⁵⁾ Fried and Gould⁶⁾ 等によって行われ、イオン振動の温度による影響、減衰定数、更に電子とイオンの *relative drift velocity* による不安定の条件等がわかってきた。

しかしいずれの場合も中性粒子の存在を無視しているので、結果を弱電離プラズマ中の実験と比較するときは慎重でなければならないし、中性粒子の存在が無視出来ない弱電離プラズマでは中性粒子によりイオン振動がどのような影響を受けるかをよく調べておく必要がある。荷電粒子-中性粒子間衝突を重視したイオン振動及びその不安定に関する吟味は二流体モデルにより Liperoreshy⁷⁾, 板谷⁸⁾ 及び筆者⁹⁾ 等により行われた。

ここでは、荷電粒子の速度分布を考え、Boltzmann-Vlasov 方程式を使用し、その衝突項に荷電粒子間衝突に関する近似を採用して、イオン振動、特にその不安定に必要な *relative drift velocity* が中性粒子によりどのように影響されるかを考える。

§2で、二流体モデルによる計算を簡単に述べたのは、速度分布を考慮した結果と比較するためと、Boltzmann-Vlasov 方程式の衝突項に関する近似の妥当性をみるためである。

§2 Two Fluid Model

まず二流体モデルに従ってイオン振動を考える。この場合、プラズマ中の縦振動は電子、イオン各々についての巨視的諸量に関する粒子数連続の式、運動方程式、エネルギー保存式及びボアッソンの方程式を用いて論じられる。ここでは近似として電子、イオンの運動は等温的に行

われるものと仮定し、エネルギーの式は使用しない。

従って基本式は

粒子数連続の式(電離、再結合無視)

$$\frac{\partial}{\partial t} n_e + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (n_e \vec{v}_e) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} n_i + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (n_i \vec{v}_i) = 0, \quad (1), (2)$$

運動方程式

$$m_e n_e \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_e \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \vec{v}_e = -en_e \vec{E} - \kappa T_e \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} n_e - n_e \nu_e m_e \vec{v}_e, \quad (3)$$

$$m_i n_i \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \vec{v}_i = e n_i \vec{E} - \kappa T_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} n_i - n_i \nu_i m_i \vec{v}_i, \quad (4)$$

及びポアソンの方程式

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \vec{E} = 4\pi e (n_i - n_e) \quad (5)$$

である。但し運動方程式で右辺第3項は荷電粒子間(ν_e , ν_i はその衝突周波数を示す)の、しかも中性粒子が全体として静止しているときの衝突効果を表わし、電子-イオン衝突は無視されている。

定常状態で、一様な静止無限プラズマを考え、基本式を線形化し、微小量が

$\exp[j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]$ に比例するとして、縦振動の分散式は

$$(\omega^2 - \omega_{pe}^2 - C_e^2 K^2 + j\omega\nu_e) \cdot (\omega^2 - \omega_{pi}^2 - C_i^2 K^2 + j\omega\nu_i) = \omega_{pe}^2 \omega_{pi}^2 \quad (6)$$

$$\text{但し, } C_e^2 = \frac{\kappa T_e}{m_e}, \quad C_i^2 = \frac{\kappa T_i}{m_i}, \quad \omega_{pe}^2 = \frac{4\pi e n_{e0}}{m_e}, \quad \omega_{pi}^2 = \frac{4\pi e n_{i0}}{m_i}.$$

イオン振動の分散式は $\omega_{pe}^2 + C_e^2 K^2 \gg \omega^2$, $\omega\nu_e$ として

$$\omega^2 + j\nu_i \omega = C_i^2 k^2 + \frac{\omega_{pi}^2}{1 + \frac{k_D^2}{k^2}} \quad (7)$$

となる。これから $\omega = \omega_0 - j\gamma$ (ω_0 , γ , k は実数)と置いて,

弱電離プラズマ中のイオン振動

$$\omega_o^2 = C_i^2 k^2 + \frac{\omega_{pi}^2}{1 + \frac{k_D^2}{k^2}} - \frac{\nu_i^2}{4}, \quad \gamma = \frac{\nu_i}{2}. \quad (8), (9)$$

故に $C_i^2 k^2 + \frac{\omega_{pi}^2}{1 + \frac{k_D^2}{k^2}} < \frac{\nu_i^2}{4}$ の領域のイオン振動は短時間でもそれ自身持続すること

は不可能であり, $C_i^2 k^2 + \frac{\omega_{pi}^2}{1 + \frac{k_D^2}{k^2}} > \frac{\nu_i^2}{4}$ 領域でも減衰定数 $\frac{\nu_i}{2}$ で必ず減衰する。

以上の取扱いを定常状態で電子とイオンの relative drift velocity があるプラズマについて行くと, drift velocity によりイオン振動は不安定となり得ることを示すことが出来る。⁹⁾しかしこの場合でも純粋なイオンプラズマ振動 ($\frac{k^2}{k_D^2} \rightarrow \infty$) は必ず減衰す

る。そして acoustic waves ($\frac{k^2}{k_D^2} \rightarrow 0$) 領域に近づくに従って不安定となり易くなり

acoustic waves では drift velocity のエネルギーが熱エネルギーより大なる時 ($\frac{1}{2} m_e v_{eo}^2 + \frac{1}{2} m_i v_{io}^2 > \frac{1}{2} m_e C_e^2 + \frac{1}{2} m_i C_i^2$, v_{eo}, v_{io} : drift velocity) 不安定となることが近似的に云える。

§3 Kinetic Theory Approach

次に速度分布を考慮して, Boltzmann-Vlasov 方程式

$$\left(\frac{\partial f_e}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \vec{r}} - \frac{e}{m_e} \vec{E} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial f_e}{\partial t} \right)_c, \quad (10)$$

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \vec{r}} + \frac{e}{m_i} \vec{E} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial f_i}{\partial t} \right)_c \quad (11)$$

とポアソン方程式

$$\vec{E} = - \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{E} = 4 \pi e \int (f_i - f_e) d\vec{v} \quad (12)$$

を基本式として計算する。ここで, 荷電粒子相互間の Debye length より長距離の, いわ

ゆる，長距離相互作用は，(12)式をとおして，(10)，(11)式の電界 $\vec{E}$ にくりをまれ，Debye length より短い距離にある荷電粒子間の短距離相互作用及び荷電粒子—中性粒子相互作用は(10)，(11)式右辺の衝突項によって表わされる。しかしこの衝突項は厳密には複雑で数学的解析が困難となるので，Bhatnagar et al.¹⁰⁾に従ってこれを次式で近似する。即ち

$$\left. \frac{\partial f_e}{\partial t} \right)_c = \frac{n_e F_{eo} - f_e}{\tau_e}, \quad \left. \frac{\partial f_i}{\partial t} \right)_c = \frac{n_i F_{io} - f_i}{\tau_i}. \quad (13), (14)$$

但し， τ_e, τ_i は各々電子，イオンの mean free time であり， F_{eo}, F_{io} は定常状態の規格化された速度分布函数を示す。この近似は荷電粒子と中性粒子との衝突については許されるが，荷電粒子間衝突については近似としても問題がある。従って以下の取扱いは荷電粒子間衝突が荷電粒子—中性粒子間衝突にくらべて無視出来る場合により正しい結果を与える。かくて，(10)，(11)式は

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \vec{r}} - \frac{e}{m_e} \vec{E} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \vec{v}} = \frac{n_e F_{eo} - f_e}{\tau_e}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \vec{r}} + \frac{e}{m_i} \vec{E} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \vec{v}} = \frac{n_i F_{io} - f_i}{\tau_i} \quad (16)$$

定常状態の速度分布を

$$f_{eo} \equiv n_{eo} F_{eo} = n_{eo} \left(\frac{m_e}{2\pi\kappa T_e} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left[-\frac{m_e}{2\kappa T_e} (\vec{v} - \vec{v}_{eo})^2 \right], \quad (17)$$

$$f_{io} \equiv n_{io} F_{io} = n_{io} \left(\frac{m_i}{2\pi\kappa T_i} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left[-\frac{m_i}{2\kappa T_i} (\vec{v} - \vec{v}_{io})^2 \right] \quad (18)$$

なる drift velocity を中心とした Maxwell 分布として，(15)，(16)，(12)式を線形化すると，

$$\frac{\partial \tilde{f}_e}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial \tilde{f}_e}{\partial \vec{r}} - \frac{e}{m_e} \tilde{E} \cdot \frac{\partial f_{eo}}{\partial \vec{v}} = \frac{\tilde{n}_e F_{eo} - \tilde{f}_e}{\tau_e}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial \vec{r}} + \frac{e}{m_i} \tilde{E} \cdot \frac{\partial f_{io}}{\partial \vec{v}} = \frac{\tilde{n}_i F_{io} - \tilde{f}_i}{\tau_i} \quad (20)$$

$$\tilde{E} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \tilde{\phi}, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \tilde{E} = 4\pi e \int (\tilde{f}_i - \tilde{f}_e) d\vec{v} \quad (21)$$

となる。但し, " $\sim$ " は微小変動量を表わす。これらの式を

$$\tilde{f}_e(\vec{r}, \vec{v}, t) = \int f_{ek}(\vec{v}, t) e^{j\vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{k}, \text{ etc.}$$

と置いて Fourier 分解し,

$$f_{ek}^\omega(\vec{v}) = \int_0^\infty f_{ek}(\vec{v}, 0) e^{j\omega t} dt, \text{ etc.} \quad (\text{但し } \text{Im } \omega > 0)$$

と置いて Laplace 変換すると,

$$j(\vec{k} \cdot \vec{v} - \omega) f_{ek}^\omega - f_{ek}(\vec{v}, 0) + j \frac{e}{m_e} \phi_k^\omega \vec{k} \cdot \frac{\partial f_{e0}}{\partial \vec{v}} = \frac{n_{ek}^\omega F_{e0} - f_{ek}^\omega}{\tau_e}, \quad (22)$$

$$j(\vec{k} \cdot \vec{v} - \omega) f_{ik}^\omega - f_{ik}(\vec{v}, 0) - j \frac{e}{m_i} \phi_k^\omega \vec{k} \cdot \frac{\partial f_{i0}}{\partial \vec{v}} = \frac{n_{ik}^\omega F_{i0} - f_{ik}^\omega}{\tau_i}, \quad (23)$$

$$k^2 \phi_k^\omega = 4\pi e \int (f_{ik}^\omega - f_{ek}^\omega) d\vec{v} \quad (24)$$

以上3式より, $n_{ek}^\omega = \int f_{ek}^\omega d\vec{v}$, $n_{ik}^\omega = \int f_{ik}^\omega d\vec{v}$ を使って,

$$\begin{aligned} & \phi_k^\omega \left\{ k^2 \left\{ 1 - j\nu_e \int \frac{F_{e0} d\vec{v}}{(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}) + j\nu_e} \right\} \left\{ 1 - j\nu_i \int \frac{F_{i0} d\vec{v}}{(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}) + j\nu_i} \right\} \right. \\ & + \omega_{pe}^2 \left\{ 1 - j\nu_i \int \frac{F_{i0} d\vec{v}}{(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}) + j\nu_i} \right\} \int \frac{\vec{k} \cdot \frac{\partial F_{e0}}{\partial \vec{v}} d\vec{v}}{(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}) + j\nu_e} \\ & + \omega_{pi}^2 \left\{ 1 - j\nu_e \int \frac{F_{e0} d\vec{v}}{(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}) + j\nu_e} \right\} \int \frac{\vec{k} \cdot \frac{\partial F_{i0}}{\partial \vec{v}} d\vec{v}}{(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}) + j\nu_i} \left. \right\} \\ & = 4\pi e j \left\{ \left\{ 1 - j\nu_e \int \frac{F_{e0} d\vec{v}}{(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}) + j\nu_e} \right\} \int \frac{f_{ik}(\vec{v}, 0)}{(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}) + j\nu_i} d\vec{v} \right. \end{aligned}$$

$$- \left\{ 1 - j\nu_i \int \frac{v_{i0} d\vec{v}}{(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}) + j\nu_i} \right\} \int \frac{f_{ek}(\vec{v}, 0)}{(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}) + j\nu_e} d\vec{v} \quad (25)$$

但し, $\nu_e = \frac{1}{\tau_e}$, $\nu_i = \frac{1}{\tau_i}$ 。Landau の方法¹¹⁾に従って関数が $\text{Im } \omega \leq 0$ の領域でも成立するように解析接続し

$$\vec{k} = (k, 0, 0), \vec{v} = (v_x, v_y, v_z), \vec{v}_{e0} = (v_{e0}, 0, 0), \vec{v}_{i0} = (v_{i0}, 0, 0)$$

として

$$a^2 = \frac{2\kappa T_e}{m_e} \left(= \frac{1}{2} C_e^2 \right), A^2 = \frac{2\kappa T_i}{m_i} \left(= \frac{1}{2} C_i^2 \right), \frac{1}{a} \left(\frac{\omega}{\kappa} - v_{e0} \right) = \rho,$$

$$\frac{1}{A} \left(\frac{\omega}{\kappa} - v_{i0} \right) = \rho', \frac{\nu_e}{\kappa a} = \xi, \frac{\nu_i}{\kappa A} = \xi', \quad \theta = \frac{T_e}{T_i}$$

と置くと, 縦振動の分散式は

$$2 \frac{k^2}{k_D^2} = \frac{Z'(\rho' + j\xi')}{1 + j\xi' Z(\rho' + j\xi')} \theta + \frac{Z'(\rho + j\xi)}{1 + j\xi Z(\rho + j\xi)} \quad (26)$$

と求まる。但し, $Z(\beta) = j\sqrt{\pi} \exp(-\beta^2) [1 + \text{erf}(j\beta)]$ であり, $Z'(\beta)$ はその微分形である。

まず, $T_e \sim 0$, $T_i \sim 0$ の場合を考える。この時,

$$Z(\beta) = -\frac{1}{\beta}, \quad Z'(\beta) = \frac{1}{\beta^2} \quad (|\beta| \rightarrow \infty) \quad (27), (28)$$

が使えるので(26)式は

$$\begin{aligned} & \{ (\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}_{e0})^2 - \omega_{pe}^2 + j(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}_{e0}) \nu_e \} \\ & \times \{ (\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}_{i0})^2 - \omega_{pi}^2 + j(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}_{i0}) \nu_i \} = \omega_{pe}^2 \omega_{pi}^2 \end{aligned} \quad (29)$$

となる。これは, drift していない静止プラズマ ($v_{e0} = 0$, $v_{i0} = 0$) に関して, 二流体モデルで求めた(6)式と一致する。drift velocity がある時でも, (26)式は二流体モデルにより導くことが出来る。このことは(33), (34)式の衝突項近似が妥当であることを示す。

次に $\theta=1$ ($T_i=T_e$) の場合について、イオン振動が不安定となるのに必要な電子とイオンの relative drift velocity を求めてみる。簡単のため、イオンの drift velocity と同じ速度で動く座標系について考え、 $v_{i0}=0$ として解析を進める。又

$$\xi = \frac{\nu_e}{ka} \sim \frac{\left(\frac{8\pi T_e}{\pi m_e}\right)^{1/2} / \lambda_e}{\frac{2\pi(2\pi T_e/m_e)^{1/2}}{\lambda}} \sim \frac{1}{5.6} \frac{\lambda}{\lambda_e} \ll 1 \quad (30)$$

が成立する範囲を取扱う。従って関式は

$$-2 \frac{k^2}{k_D^2} - Z'(\rho) = G(\rho' + j\xi') \quad (31)$$

となる。但し、 $G(\rho' + j\xi') = \frac{Z'(\rho' + j\xi')}{1 + j\xi' Z(\rho' + j\xi')}$ と置いた。 ρ が実数 (従って ρ'

も実数) として、(31) 式を成立させる電子の drift velocity を求めると、これは、いわゆる critical drift velocity を与える。Fig. 1 に ρ, ρ' が実数のときの (31) 式左辺及び右辺の値を表¹²⁾により数値計算して図示する。 $G(\rho' + j\xi')$ のグラフと

$-Z'(\rho) + 2 \frac{k^2}{k_D^2}$ のグラフが交点から critical drift velocity が求まる。

$\rho < 0$ ($\frac{\omega_0}{K} < v_{e0}$) としたのは、この場合のみ、減衰しないイオン振動の解が得られるからである。このようにして求めた critical drift velocity を $\xi' (= \frac{\nu_i}{kA} \sim$

$\frac{1}{5.6} \frac{\lambda}{\lambda_i}$, λ_i : イオンの平均自由行程) をパラメーターとして図示したのが Fig. 2 であ

る。図からわかるように、イオン-中性粒子間衝突によって、イオン振動の不安定は起りにくなる。 $\xi' = 1.0$ の領域になると $\xi \ll 1$ と見なせなくなるので、グラフは必ずしも正しい結果を示していない。

$\frac{T_e}{T_i} \gg 1$ の場合について考える。(31) 式で $|\rho + j\xi| \ll 1$ を仮定する。これは

$|\omega - kv_{e0} + j\nu_e| \ll k \left(\frac{2\pi T_e}{m_e}\right)^{1/2}$ であるから、対称とする振動がイオン振動であり、

Fig. 1

$G(\rho' + j\xi')$ と $-Z'(\rho) + 2 \frac{k^2}{k_D^2} (\frac{k^2}{k_D^2} = 0.2)$ の図示

(但し ρ, ρ' 実数)。

弱電離プラズマ中のイオン振動

Fig. 2 ξ' による不安定領域の変化 ($T_e = T_i$)

drift velocity v_{e0} が熱運動の速度より充分に小であり，更に(30)式が成立するならば，この仮定は許される。かくて

$$Z(\beta) = j\sqrt{\pi} - 2\beta, \quad Z'(\beta) \rightarrow -2(1 + j\sqrt{\pi}\beta) \quad (|\beta| \rightarrow 0) \quad (32), (33)$$

を使用出来，(29)式は

$$2 \frac{K^2}{K_D^2} = \frac{Z'(\rho' + j\xi')}{1 + j\xi' Z(\rho' + j\xi')} \theta - 2(1 + j\sqrt{\pi}\rho) \quad (34)$$

とかける。次に $|\rho' + j\xi| \gg 1$ ($|\omega + j\nu_i| \gg K(\frac{2\kappa T_i}{m_i})^{1/2}$) を仮定して，(31)，(32)

式により

$$\frac{K^2}{K_D^2} = \frac{\theta}{2\rho'(\rho' + j\xi')} - (1 + j\sqrt{\pi}\rho) \quad (35)$$

となり, かき変えると,

$$(\omega^2 + j\omega\nu_i)(1 + j\frac{\sqrt{\pi}}{ka} \frac{\omega - k v_{eo}}{1 + \frac{k_D^2}{k^2}}) = \frac{\omega_{pi}^2}{1 + \frac{k_D^2}{k^2}} \quad (36)$$

$\omega = \omega_o - j\gamma$ と置くと, $v_{eo} = 0$ のときは,

$$\omega_o^2 = \frac{\omega_{pi}^2}{1 + \frac{k_D^2}{k^2}} - \frac{\nu_i^2}{4} \quad (37)$$

$$\gamma = \frac{\nu_i}{2} + \sqrt{\frac{\pi}{8}} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{\kappa T_e}{m_i} \right)^{\frac{1}{2}} k}{\left(1 + \frac{k_D^2}{k^2} \right)^2} \quad (38)$$

となり, 二流体モデルで求めた(8), (9)式と比較すると, 減衰定数 γ が速度分布を考えに入れると electron Landau damping の項(38式右辺第2項)だけ大きくなっていることがわかる。次に(38)式で $\omega = \omega_o$ と置いて, critical drift velocityを求めると,

$$v_{eo} = \left(\frac{\kappa T_e}{m_e} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{k_D^2}{k^2} \right) \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\nu_i}{\omega_o} + \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{k_D^2}{k^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \right], \quad (39)$$

但し,

$$\omega_o^2 = \frac{\omega_{pi}^2}{1 + \frac{k_D^2}{k^2}} - \nu_i^2 \quad (40)$$

以上(37), (38), (39), (40)式は $|\omega + j\nu_i| \gg K \left(\frac{2\kappa T_i}{m_i} \right)^{\frac{1}{2}}$ なる仮定のもとに導いたが, この

仮定は得られた結果から, $\frac{T_e}{T_i} \gg 1$ のとき, 満足されることが容易にわかる。又

$|\omega - k v_{eo} + j\nu_e| \ll k \left(\frac{2\kappa T_e}{m_e} \right)^{\frac{1}{2}}$ を仮定したので, (39)式は $v_{eo} \ll \left(\frac{\kappa T_e}{m_e} \right)^{\frac{1}{2}}$ 即ち

$\left(1 + \frac{k_D^2}{k^2} \right) \frac{\nu_i}{\omega_o} \ll 1$ のときのみ使用出来る。この範囲内で考えると, $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\nu_i}{\omega_o} <$

$(\frac{m_e}{m_i})^{\frac{1}{2}} (1 + \frac{k^2}{k_D^2})^{-\frac{3}{2}}$ のときには, イオン-中性粒子間衝突は重要な働きをしないが, 不

等号が逆の場合, critical drift velocity は $\frac{\nu_i}{\omega_0}$ の値によって大きく左右され

る。又衝突を無視出来るときは, イオンプラズマ振動 ($\frac{k^2}{k_D^2} \rightarrow \infty$) の方が acoustic

waves ($\frac{k^2}{k_D^2} \rightarrow 0$) より不安定となり易いのに対し, $\frac{\nu_i}{\omega_0}$ の項が優勢のときは,

acoustic wavesの方が不安定となり易い。99式の具体例を acoustic wavesについて Fig. 3 に示す。

更に, $\frac{\nu_i}{\omega_0}$ が1と同程度の領域について, イオン振動が不安定となる v_{eo} を求める。まず,

式で $|\rho' + j\xi'| \gg 1$, $\xi \ll 1$ を仮定する。 $\omega = \omega_0$ と置いて, critical

drift velocityを導くのであるが, これは, この場合 $\frac{\kappa T_e}{m_e}$ と同程度になると考えられ

るので, $\frac{\omega_0}{k} \ll v_{eo}$ として,

$$\frac{k^2}{k_D^2} = \frac{\frac{\kappa T_e}{m_i} k^2}{\omega_0(\omega_0 + j\nu_i)} + \frac{1}{2} Z'(-\frac{v_{eo}}{a}) \quad (41)$$

上式より, $\text{Re} Z'(-\frac{v_{eo}}{a}) = \text{Re} Z'(\frac{v_{eo}}{a})$, $\text{Im} Z'(-\frac{v_{eo}}{a}) = -\text{Im} Z'(\frac{v_{eo}}{a})$

なる関係を使って,

$$\omega_0^2 = \frac{\omega_{pi}^2}{1 - \frac{1}{2} \frac{k^2}{k_D^2} \text{Re} Z'(\frac{v_{eo}}{a})} - \nu_i^2, \quad (42)$$

$$\frac{\nu_i}{\omega_0} = \frac{-\frac{1}{2} \text{Im} Z'(\frac{v_{eo}}{a})}{\frac{k^2}{k_D^2} - \frac{1}{2} \text{Re} Z'(\frac{v_{eo}}{a})} \quad (43)$$

Fig. 3 acoustic wave における $\frac{v_c}{v_0}$ と critical drift velocity の関係の具体例 ($\frac{T_e}{T_i} \gg 1$)。

を得る。⁹⁾式から critical drift velocity を求め、 $\frac{\nu_i}{\omega_0}$ をパラメーターとして、Fig. 4 に図示する。図からわかるように、 $\frac{\nu_i}{\omega_0}$ が大きくなると、イオン振動の不安定に必要な v_{e0} は大きくなり、大略電子の熱運動速度程度となる。又不安定領域が $\frac{k^2}{k_D^2}$ が小さい振動、即ち acoustic wave に限られてくる。

Fig. 4 $\frac{\nu_i}{\omega_0}$ が比較的大きい場合の不安定領域 ($\frac{T_e}{T_i} \gg 1$)。

§4 Discussions and Conclusions

以上, Boltzmann-Vlasov の方程式の衝突項に荷電粒子-中性粒子間衝突についての近似を使用し, ボアッソンの方程式と連立させ, イオン-中性粒子間衝突を重視して, 弱電離プラズマ中におけるイオン振動の分散式, 不安定に必要な drift velocity を求めた。

得られた結果は, $T_e \sim 0$, $T_i \sim 0$ のとき, 二流体モデルから導かれるものと一致する。このことから, 一応荷電粒子-中性粒子間衝突に関する近似は妥当であると思われる。この衝突に関する最も簡単な近似として,

$$\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_c = \frac{f_{\alpha 0} - f_\alpha}{\tau_\alpha} \quad \text{がよく採用されるが, これを用いて得られる式は, } T_e \sim 0, T_i \sim 0 \text{ のとき, } \{ (\omega + j\nu_e)^2 - \omega_{pe}^2 \} \{ (\omega + j\nu_i)^2 - \omega_{pi}^2 \} =$$

$\omega_{pe}^2 \omega_{pi}^2$ となり, 二流体モデルから求めたものと相違する結果を与え, このような意味で

$$\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_c = \frac{f_{\alpha 0} - f_\alpha}{\tau_\alpha} \quad \text{を近似として使用することは不適である。}$$

$T_e \neq 0$, $T_i \neq 0$ の場合, 即ち荷電粒子の速度分布があるときは, 一般に, relative drift velocity がなければ, electron Landau damping, ion Landau damping 及び collision damping によって, イオン振動は減衰する。しかし, ある値より大きい relative drift velocity があれば, イオン振動は不安定となる。 $T_e = T_i$ の場合について, その不安定領域を示したのが Fig. 2 であり, 不安定が起るためには, 電子の熱運動速度程度の relative drift velocity が必要である。そして, 衝突の影響が大きくなると, より大きな drift velocity が必要となり, 不安定領域が

少くなる。然るに, $\frac{T_e}{T_i} \gg 1$ の場合は ion Landau damping が無視出来,

$$\left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{k^2}{k_D^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \gg \frac{\nu_i}{\omega_0} \quad \text{なら, } \nu_{eo} = \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\kappa T_e}{m_e} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{k^2}{k_D^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

(但し イオンの drift velocity と同じ速度で動く座標系について), つまり電子の熱運動速度よりずっと小さい ν_{eo} で不安定となる。しかし衝突周波数が大きくなってくると,

$$v_{eo} = \left(\frac{\kappa T_e}{m_e} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{k^2}{k_D^2} \right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\nu_i}{\omega_o} \quad \text{が critical drift velocity と}$$

となり, $\frac{\nu_i}{\omega_o} \sim 1$ の付近では, やはり電子の熱運動速度程度の v_{eo} が必要となる。そして

ν_i がより大きくなると, 2式の右辺が負となり, イオン振動は存在し得なくなる。この

$\frac{\nu_i}{\omega_o} \sim 1$ 付近での不安定条件は二流体モデルから得られる結果と定性均に一致する。

References

- 1) L.Tonks and I. Langmuir, Phys. Rev. 33, 195 (1929)
- 2) L.Spitzer, Physics of Fully Ionized Gases
(Interscience, Publishers, Inc., New York: 1956) 61.
- 3) O.Buneman, Phys. Rev. 115, 503 (1959)
- 4) I.Bernstein and R. Kulsrud, Phys. Fluids 3, 937 (1960).
I.Bernstein, E.A. Frieman, R.M. Kulsrud and
M.N. Rosenbluth, Phys. Fluids 4, 1037 (1961).
- 5) E.A. Jackson, Phys. Fluids 3, 786 (1960).
- 6) B.D. Fried and R.W. Gould, Phys. Fluids 4, 139 (1961).
- 7) V.A. Liperovsky, JETP U.S.S.R. 39, 1363 (1961)
- 8) 板谷, 日本物理学会第15回年会予稿集。 昭和34年プラズマ測定研究会。
- 9) 八田・佐藤, 日本物理学会昭和35年度秋季分科会予稿集。

Proc. of 5th International Conference on Ionization
Phenomena in Gases (Münich, 1961) 478.

核融合研究, Vol.7, No.2 (1961)。

- 10) P.L. Bhatnagar, E.P. Gross and M. Krook,
Phys. Rev. 94, 511 (1954).
- 11) L.D. Landau, J. Phys. U.S.S.R. 10, 25 (1946).
- 12) B.D. Fried and S.D. Conte, The Plasma Dispersion
Function (Academic Press., New York and London,
1961).