航空三角測量における誤差の回帰曲面について

田 浦 秀 春*

Regression surface of errors in Aerial triangulation.

By H. Taura

This report concerns regression surface of errors by means of various methods used in aerial triangulation. This triangulation used 10-15 models which are an average,

In addition, improvement of an existing equation of errors has been tried, and the relative relationship of coefficient on equation of errors of three direction x. y. z. was made clear. Also it was noted that the form of regression surface of errors was more suitable as it tended to coincide with a second order surface, namely, $a_0 + a_1X + a_2Y + a_3Z + a_4XY + a_5XZ + a_6YZ + a_7X^2 + a_8Y^2 + a_9Z^2$, therefore, it was recognized that if a number of terms would be limited, the accuracy, to some extent, would have a tendency to become inferior.

In the process of improving the equation of errors, it was distinguished that the accuracy was considerably superior.

However, our limited study is not enough to make a final decision. Further study is needed to make more conclusive report.

要 旨 本論は航空三角測量における誤差曲面の実態を究明すると共に、実用の範囲において最も適合度の高い回帰曲面を求めようとするものである。之が為対象となるコースの長さを 10~15 モデルに制限すると共に次の諸点に改良を試みた。

1. 各種の方法を併用して誤差の回帰曲面を追求し、それ以上の修正はランダム誤差の影響により無意味になると思われる限界曲面を誘導した。
2. 誤差生起の状態を示す母函数として分布函数を導入し XYZ 三方向における誤差相互の関係を明らかにした。随って 10 項に近い誤差方程式に拘らず、僅か 5~4 個の三角点と 5~4 個の水準点により輕易に解くことができるようになった。
3. 現在良く用いられている等角写像変換式に改良を試みた。

誤差曲面の誘導

I 解析的方法

誤差の分布函数として $[\infty, -\infty]$ において正則な函数 $F(X, Y, Z)$ を定義する。任意の点 $P(X, Y, Z)$

における誤差の成分は各々 $\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}$ で表わされ之等は共に無限級数に展開可能である。しかし従来の経験によれば三次以上の項は急速に収束して零に近づくものと思われる。すなわち

$$\begin{aligned} F(X, Y, Z) = & A_1X + A_2Y + A_3Z + A_4XY + A_5YZ \\ & + A_6XZ + A_7X^2 + A_8Y^2 + A_9Z^2 \\ & + A_{10}XYZ + A_{11}X^2Y + A_{12}XY^2 \\ & + A_{13}X^2Z + A_{14}XZ^2 + A_{15}Y^2Z + A_{16}YZ^2 \\ & + A_{17}X^3 + A_{18}Y^3 + A_{19}Z^3 + 0 \cdots \cdots (1.1) \end{aligned}$$

であるから X, Y, Z, 三方向に偏微分して

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial X} = & A_1 + A_4Y + A_6Z + 2A_7X + A_{10}YZ + 2A_{11}XY \\ & + A_{12}Y^2 + 2A_{13}XZ + A_{14}Z^2 + 3A_{17}X^2 + 0' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial Y} = & A_2 + A_4X + A_5Z + 2A_8Y + A_{10}XZ + A_{11}X^2 \\ & + 2A_{12}XY + 2A_{15}YZ + A_{16}Z^2 + 3A_{18}Y^2 + 0'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial Z} = & A_3 + A_5Y + A_6X + 2A_7Z + A_{10}XY + A_{13}X^2 \\ & + 2A_{14}XZ + A_{15}Y^2 + 2A_{16}YZ + 3A_{19}Z^2 + 0''' \end{aligned}$$

更に書きかえて

$$\begin{aligned} \Delta X = & (A_1\Delta x') + (A_4\Delta x')Y + (A_6\Delta x')Z \\ & + 2(A_7\Delta x')X + (A_{10}\Delta x')YZ + 2(A_{11}\Delta x')XY \\ & + (A_{12}\Delta x')Y^2 + 2(A_{13}\Delta x')XZ + (A_{14}\Delta x')Z^2 \\ & + 3(A_{17}\Delta x')X^2 + 0' \end{aligned}$$

* 国際航業株式会社 研究室

$$\begin{aligned} \Delta Y = & (A_2 \Delta y') + A_4 \Delta y' X + (A_5 \Delta y') + 2(A_8 \Delta y') Y \\ & + (A_{10} \Delta y') XZ + (A_{11} \Delta y') X^2 + 2(A_{12} \Delta y') XY \\ & + 2(A_{15} \Delta y') YZ + (A_{16} \Delta y') Z^2 + 3(A_{18} \Delta y') Y^2 \\ & + 0'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta Z = & (A_3 \Delta z') + (A_5 \Delta z') Y + (A_6 \Delta z') X \\ & + 2(A_9 \Delta z') Z + (A_{10} \Delta z') XY + (A_{13} \Delta z') X^2 \\ & + 2(A_{14} \Delta z') XZ + (A_{15} \Delta z') Y^2 + 2(A_{16} \Delta z') YZ \\ & + 3(A_{19} \Delta z') Z^2 + 0''' \dots \dots \dots (I \cdot 2) \end{aligned}$$

となり誤差曲面の方程式が誘導される。之等三式の間においては次のような係数が成立している。

(1) ΔX と ΔY の間

式	項	X	Y	Z	X ²	Y ²	Z ²	XY	XZ	YZ
ΔX 式の係数		A_4			A_{11}			$2A_{11}$		A_{10}
等 値 関 係		/								/
ΔY 式の係数		$A_4 \cdot C$			$A_{11} \cdot C$			$2A_{11} \cdot C$		$A_{10} \cdot C$

(C =定数)

(2) ΔY と ΔZ の間

式	項	X	Y	Z	X ²	Y ²	Z ²	XY	XZ	YZ
ΔY 式の係数			A_5			A_{16}			A_{10}	$2A_{15}$
等 値 関 係			/							/
ΔZ 式の係数			$A_5 \cdot D$			$A_{16} \cdot D$			$A_{10} \cdot D$	$2A_{16} \cdot D$

(D =定数)

(3) ΔX と ΔY の間

式	項	X	Y	Z	X ²	Y ²	Z ²	XY	XZ	YZ
ΔX 式の係数		A_6			A_{14}			$2A_{13}$		A_{10}
等 値 関 係		/								/
ΔZ 式の係数		$A_6 \cdot E$			$A_{14} \cdot E$			$2A_{14} \cdot E$		$A_{10} \cdot E$

(E =定数)

随って方程式の項数を加減しようとする場合には (I・1), (I・2) 両式において検討し関連性ある項は同時に修正しなければならない。過去の実作業におけるデータの分析の結果をみても上述の関係はよく実証されている。

[Y 地区の例]

過去の作業中 Y 地区の例について分析した結果つぎのような誤差曲面が誘導された。

$$\begin{aligned} \Delta X = & -217.3637 + 0.0057106X + 0.0509544Y \\ & + 0.5363404Z - 0.0000016YX - 0.0000054XZ \\ & - 0.0000680YZ + 0.0000000X^2 - 0.0000003Y^2 \\ & - 0.0003221Z^2 \\ \Delta Y = & 162.6283 - 0.0035008X - 0.0411693Y \\ & - 0.3600440Z + 0.0000010XY + 0.0000033XZ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + 0.0000472YZ + 0.0000000X^2 + 0.0000008Y^2 \\ & + 0.0001948Z^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta Z = & 0.0017243X + 0.011146Y + 0.0527190Z \\ & - 0.0000001XY - 0.0000003XZ - 0.0000155YZ \\ & + 0.0000000X^2 - 0.0000005Y^2 + 0.0000948Z^2 \\ & - 0.0000001Z^3 \end{aligned}$$

之等の式について $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ の係数関係を吟味するとつぎようになる。

(1) ΔX と ΔY の間

式	項	X	Y	X ²	Y ²	XY	XZ	YZ
ΔX 式の係数		0.0509544		-0.0000003	-0.0000008			-0.0000080
等 値 関 係		/						/
ΔY 式の係数		-0.0035008		0.0000000	0.0000005	0.0000034		0.0000034

$C \div 14$ として (ΔX の $Y^2 \rightarrow \Delta Y$ の XY) の外合っている

(2) ΔY と ΔZ の間

式	項	Y	Z	Y ²	Z ²	XY	XZ	YZ
ΔY 式の係数		-0.3900440		0.0001984		0.0000034	0.0000236	
等 値 関 係		/						/
ΔZ 式の係数		0.0111416		-0.0000005	-0.0000001		-0.0000075	

$D \div 35$ としてよく合っている

(3) ΔX と ΔZ の間

式	項	X	Z	X ²	Z ²	XY	XZ	YZ
ΔX 式の係数		0.5363404		-0.0003221		0.0000027	0.0000580	
等 値 関 係		/						/
ΔZ 式の係数		0.0017243		0.0000001	0.0000000		-1.0000002	

$E \div 400$ として (ΔX の $Z^2 \rightarrow \Delta Z$ の XZ) の外合っている

II 統計的方法

1. 撮影帯の彎曲に基くもの

連続標定の際に生ずるランダム誤差に基き、航空三角測量における誤差の大部分を占めるものである。ランダム誤差である以上生起の方向、大きさ共に一定ではないが、過去の実作業の結果からみると撮影帯の長さが 15 モデル位までの間は概ね方向が一定しており、たとえ変化するとしても緩かに変換しておるに思われる

(II・1 図) 連接されるモデルの状況

航空三角測量においては1モデルを標定するに必要な基準点の数は3点で充分であるから、各点における観測誤差を一定の ΔE とおけば標定誤差は

$$\sqrt{(\Delta E)^2 + (\Delta E)^2 + (\Delta E)^2} = \sqrt{3} \Delta E \cdots \cdots (II \cdot 1)$$

で示される。若し1モデルに m 点を使用する場合には $\frac{m}{3}$ 回復行したと考えてよいから (II・1) 式は更につぎのように変形される。

$$\sqrt{3} \cdot \Delta E \sqrt{\frac{m}{3}} = \sqrt{\frac{3}{m}} \cdot \Delta E \cdots \cdots (II \cdot 2)$$

随ってモデルにおける累積誤差は

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{m}} \cdot \Delta E\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{m}} \cdot \Delta E\right)^2 + \cdots + \left(\sqrt{\frac{3}{m}} \cdot \Delta E\right)^2} \\ & \quad \quad \quad n \text{ 箇} \cdots \cdots \\ & = \left(\sqrt{\frac{3}{m}} \cdot \Delta E\right) \sqrt{n} \cdots \cdots (II \cdot 3) \end{aligned}$$

となる。この式をグラフに描けば (II・2 図) のような離散変量となり取扱いに不便であるからこれに外接する滑らかな点線を考える。

(II・2 図) 累積された誤差の曲線

$\sqrt{\frac{3}{m}} \cdot \Delta E = A$, $n = X$, $B = \text{常数}$ とおけばこの曲線は $A\sqrt{B+X}$ で表わされる。更に A の X, Y, Z 方向の各成分を $A_{(x)}, A_{(y)}, A_{(z)}$ とすれば

$$\begin{aligned} \Delta X &= A_{(x)} \sqrt{B+X}, \quad \Delta Y = A_{(y)} \sqrt{B'+X}, \\ \Delta Z &= A_{(z)} \sqrt{B''+X} \cdots \cdots (II \cdot 4) \end{aligned}$$

となり無限級数に展開される。

$$\begin{aligned} \Delta X &= A_{(x)} \sqrt{B} + \frac{1}{2} A_{(x)} \frac{1}{\sqrt{B}} X - \frac{1}{4} A_{(x)} \frac{1}{\sqrt{B}} X^2 \\ & \quad + \frac{8}{3} A_{(x)} \frac{1}{B^2 \sqrt{B}} X^3 + 0' \\ \Delta Y &= A_{(y)} \sqrt{B'} + \frac{1}{2} A_{(y)} \frac{1}{\sqrt{B'}} X - \frac{1}{4} A_{(y)} B' \frac{1}{\sqrt{B'}} X^2 \\ & \quad + \frac{3}{8} A_{(y)} \frac{1}{B'^2 \sqrt{B'}} X^3 + 0'' \\ \Delta Z &= A_{(z)} \sqrt{B''} + \frac{1}{2} A_{(z)} \frac{1}{\sqrt{B''}} X \\ & \quad - \frac{1}{4} A_{(z)} B'' \frac{1}{\sqrt{B''}} X^2 + \frac{3}{8} A_{(z)} B''^2 \frac{1}{\sqrt{B''}} X^3 + 0''' \end{aligned}$$

改めて係数を書き換えて、つぎの第一次修正式が得られる。

$$\begin{aligned} \text{〔第一次修正〕} \quad \Delta X &= a + bX + dX^2 + eX^3 \\ \Delta Y &= a' + b'X + d'X^2 + e'X^3 \\ \Delta Z &= a'' + b''X + d''X^2 + e''X^3 \\ & \quad \cdots \cdots (II \cdot 5) \end{aligned}$$

(II・3 図) Y 方向の彎曲に基づく誤差

(II・4 図) Z 方向の彎曲に基づく誤差

〔第二次修正〕 (II・5) 式を微分する。

$$\begin{aligned} \frac{d(\Delta X)}{dX} &= b + 2dX + 3eX^2 \\ \frac{d(\Delta Y)}{dX} &= b' + 2d'X + 3e'X^2 \\ \frac{d(\Delta Z)}{dX} &= b'' + 2d''X + 3e''X^2 \\ & \quad \cdots \cdots (II \cdot 6) \end{aligned}$$

つぎに Y 方向の彎曲に基づく第二次修正量を求める。

(II・3 図) および (II・6) 式より

$$\begin{aligned} (\Delta X)' &= Y \sin \alpha \div \tan \alpha = Y(b' + 2d'X + 3e'X^2) \\ &= b'Y + 2d'XY + 3e'X^2Y \\ (\Delta Y)' - Y \cos \alpha &= Y\{1 - \sqrt{1 - (b' + 2d'X + 3e'X^2)^2}\} \\ &= Y - (f + gX + hX^2)Y \\ &= (1-f)Y - gXY + hX^2Y \\ & \quad \cdots \cdots (II \cdot 7) \end{aligned}$$

Z 方向の彎曲に基づく第二次修正量は (II・4 図) および (II・6) 式より

$$\begin{aligned} (\Delta X)'' &= Z \cdot \sin \beta \div Z(b'' + 2d''X + 3e''X^2) \\ &= b''Z + 2d''XZ + 3e''X^2Z \\ (\Delta Z)'' - Z \cos \beta &= Z - (f' + g'X + h'X^2)Z \\ &= (1-f')Z - g'XZ - h'X^2Z \\ & \quad \cdots \cdots (II \cdot 8) \end{aligned}$$

〔第三次修正〕 更に第三次の修正量は

$$\begin{aligned} (\Delta X)''' &= Z \tan \beta \cdot \sec \alpha = Z(b'' + 2d''X \\ & \quad + 3e''X^2)(f + gX + hX^2) \\ &= f b''Z + (2d''f + b''g)XZ \\ & \quad + (3e''f + 2d''g + b''h)X^2Z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\Delta Y)''' &= Z \tan \beta \tan \alpha \\
 &= Z(b'' + 2d''X + 3e''X^2)(b' + 2d'X + 3e'X^2) \\
 &\div b'b''Z + 2(b'd'' + b''d')XZ \\
 &\quad + (3b'e'' + 4d'd'' + 3b''e'')X^2Z \\
 &\dots\dots\dots(\text{II} \cdot 9)
 \end{aligned}$$

随って彎曲に基く綜合誤差は (II・5), (II・7), (II・8) 式を加えてつぎのように表わされる。

$$\begin{aligned}
 \Delta X &= (\Delta X) + (\Delta X)' + (\Delta X)'' \\
 &= a + bX + b'Y + b''(1+f)Z + dX^2 \\
 &\quad + 2d'XY + (2d''f + b''g + 2d'')XZ \\
 &\quad + e'X^3 - hX^2Y + (3b'e'' + 4d'd'' + 3b''e'')X^2Z \\
 \Delta Z &= (\Delta Z) + (\Delta Z)'' = a'' + b''X \\
 &\quad + (1-f'')Z + d''X^2 - g'XZ + l'X^4 - h'X^2Y \\
 &\dots\dots\dots(\text{II} \cdot 10)
 \end{aligned}$$

2. 撮影帯の捩れに基くもの

写真の標定に当り飛行方向の両側において Z 方向の誤差が相反する方向に生じた場合、これが累積するとコースの捩れとなって表わされてくる。

(II・5 図) コースの捩れ

(II・5 図) においてコース端末 X' における捩れの角を θ' とすれば、その中間は大体距離 X に比例すると考えてよいから単位距離当りの捩れの角は $\frac{\theta'}{X'}$ となる。故に平坦地における修正量は

$$(\Delta Z)' = \sin\left(\frac{\theta'}{X}, X\right) Y \div \theta XY \quad (\text{但し } \frac{\theta'}{X} = \theta)$$

$$(\Delta Y)' = Y - \cos(\theta X) Y \div \frac{1}{2} \theta^2 X^2 Y \dots\dots (\text{II} \cdot 11)$$

(II・6 図) 比高のある場合コースの捩れに基く誤差

若し比高を有する場合においては (II・6 図) より

$$(\Delta Z)'' = Z - \cos(\theta X) Z \div \frac{1}{2} \theta^2 X^2 Z$$

$$(\Delta Y)'' = \tan(\theta' X) Z \div \theta X Z \dots\dots\dots (\text{II} \cdot 12)$$

更にコースに彎曲のある場合には

$$\begin{aligned}
 (\Delta X)''' &= \theta X Z \sin \alpha \div \theta X Z \tan \alpha \\
 &= b' \theta X Z + 2d' X^2 Z + 3e' X^3 Z
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\Delta Y)''' &= \theta X Z \cos \alpha \\
 &= f \theta X Z + g \theta X^2 Z + h X^3 Z \dots\dots (\text{II} \cdot 13)
 \end{aligned}$$

故に (II・11), (II・12), (II・13) よりつぎの式が誘導される。

$$\Delta X = (\Delta X)''' = b' \theta X Z + 2d' X^2 Z + 3e' X^3 Z$$

$$\Delta Y = (\Delta Y)' + (\Delta Y)'' + (\Delta Y)'''$$

$$= f(1+\theta)XZ + \frac{1}{2} \theta^2 X^2 Y + g \theta X^2 Z + h X^3 Z$$

$$\Delta Z = (\Delta Z)' + (\Delta Y)'' = \theta XY + \frac{1}{2} \theta^2 X^2 Z \dots\dots (\text{II} \cdot 14)$$

3. 地球の彎曲に基くもの

地球の表面は厳密に言えば廻転楕円面であるが略近的に半径 R の球面と考えて一向差支えない。

(II・7 図) において半径 r なる点における修正量 Δr は

$$\begin{aligned}
 \Delta r &= \frac{\sqrt{r^2 + R^2} - R}{\sqrt{r^2 + R^2}} \times r \\
 &\div \frac{1}{R} r^2 = Cr^2 \\
 (\text{但し } \frac{1}{R} = C)
 \end{aligned}$$

(II・7 図) 地球の曲率に基く誤差

故にこれを X, Y, Z 方向に分解すれば

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2} \text{ であるから}$$

$$\Delta X = C(\sqrt{X^2 + Y^2})^2 X \frac{X'}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$$

$$= C \times \sqrt{X^2 + Y^2} \div CX^2 + CXY$$

$$\Delta Y \div CY^2 + CXY$$

$$\Delta Z = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2 + R^2} - R}{\sqrt{X^2 + Y^2 + R^2}} \times R$$

$$\div \frac{1}{2R} (X^2 + Y^2) = C'(X^2 + Y^2) \dots\dots (\text{II} \cdot 15)$$

4. その他の修正量

光線の屈折に基くもの、レンズのデイスターションに基くもの、霧の影響なども考えられるが、概略二次曲面に近くなりしかもその値が小さいので省略して差支えない。

以上を総合するとつぎのような誤差曲面が誘導される。三次以上の項を省略しているのは、Ⅲの実例に示すように ΔZ 式の Z^3 項以外は $\Delta X, \Delta Y$, 方向共に三次の項が検出できなかったからである。

また Brucklacher も 15 モデル位までは三次の項は必要がないといっている。

$$\begin{aligned}\Delta X &= a + bX + b'Y + b''(1+f)Z + (d+e)X^2 \\ &\quad + (2d' + C)XY + (2d''f + b''g + 2d'' + b''\theta)XZ \\ \Delta Y &= a' + b'X + (1-f)Y + b'b''Z + d'X^2 \\ &\quad + (C-g)XY + (2b'd'' + 2b''d' + f + f\theta)XZ + Cy^2 \\ \Delta Z &= a'' + b''X + (1-f'')Z \\ &\quad + (d'' + C'')X^2 - g'XZ + \theta XY + C'y^2 \cdots \cdots (\text{II } 16)\end{aligned}$$

III 実験値の分析による方法

今までは理論的に誤差曲面を誘導してきたが、今度は逆に過去のデータを分析して方程式の各項を検出する。本論において 10 元の連立方程式を使用したのは、15 モデル以内のコースにおいて 10 点以上の基準点を持ったものは過去の作業中適切なものが見付けられなかったためである。勿論既知 10 点に対して 10 元の連立方程式を作れば解が一意的に定まるので、ランダム誤差の影響を受けて信頼度が減ずるのではないかとの疑問も生ずるが、各項が式の値に影響をおよぼす度合いを判定するに当っては大きく問題にならないと思う。本論においては代表的と思われる Y, G, T 地区の例を取り上げた。

地区名	Y 地区	G 地区	T 地区
区分			
カメラ	R.M.K.15/23 (プレオゴン)	R.M.K.15/23 (プレオゴン)	R.M.K.15/23 (プレオゴン)
写真縮尺	1/26,000	1/10,000	1/22,000
モデル数	10	13	15
図化機	ステレオブラニ グラフ (C8)	ステレオブラニ グラフ (C8)	マン・コンパレー ター解析法
作業法	三角点に対空標識	トラバース点に 帰心	三角点に対空標識

これらについては 10 元の連立方程式を作って解き、各項毎に使用したデータの最大値を代入すればつぎのようになる。

1. ΔX について

Y 地区	項	Z Y XY YZ Z ² X XZ Y ² X ²
	値	365 332 322 220 149 137 61 11 0
G 地区	項	XZ Z ² X ² Z XY X Y ² Y YZ X ³
	値	177 121 53 26 13 9 8 6 2 0
T 地区	項	X X ² YZ Y ² Z ² XZ Y XY Z
	値	1080 529 234 159 96 71 66 39 30

2. ΔY について

Y 地区	項	Y Z YZ XY Z ² X XZ Y ² X ²
	値	252 245 153 139 92 84 39 30 0
G 地区	項	XZ X ² Z ² XY X YZ Z Y ² Y Y ³
	値	181 115 74 29 12 11 9 7 4 0
T 地区	項	X X ² Y XY XZ Z YZ Y ² Z ²
	値	784 477 343 270 170 167 92 70 53

3. ΔZ について

Y 地区	項	Y YZ X Z ³ Z Z ³ Y ² XY XZ X ²
	値	68 50 41 44 36 32 19 14 3 0
G 地区	項	XZ X ² Z ³ Z ² Z YZ XY X Y ² Y
	値	425 256 208 169 160 126 124 33 26 23
T 地区	項	Y X ² YZ Y ² Z ² Y XY Y XZ
	値	1706 946 600 293 230 162 137 103 14

上記の表において全体に対する比率の小さい項は影響度が少ないので、削減しても支障ないと思はれる。これらからつぎのことが推定される。

1. $\Delta X, \Delta Y$ 式においては Y^2 並びに三次の項が、 ΔZ 式においては Y^2, XZ 並びに三次の項 (Z^3 を除く) が比較的影響度が少ない。
2. Z を含む項の影響は予想外に大きい。
3. (Ⅱ・16) 式に比較すると $\Delta X, \Delta Y$ 式において $Z^2, \Delta Z$ 式において Z^2, Z^3 の項が新しく表わされている。これは一搬に X, Y 方向に比べて Z 方向の測定精度が悪いから、そのために表わされた Z に対する誤差式 $(\Delta Z)' = B_1Z + B_2Z^2 + B_3Z^3 + \cdots$ の、 Z^2 までの項が $\Delta X, \Delta Y$ 方向に、 Z^3 までの項が ΔZ 方向に累加されて表われたとみるべきであろう。

IV 誤差曲面の誘導

1. 式の誘導

今までの結果を総合すると (Ⅰ・2), (Ⅱ・16) および Ⅲ の $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ の式から次の誤差曲面が誘導される。

(第一案)

$$\begin{aligned}\Delta X &= A_1 + A_2X + (B_1A')Y + (C_2A'')Z + A_3X^2 \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}C_3A'\right)Z^2 + (2B_3A')XY + (2C_3A'')XZ \\ &\quad + (C_7A'')XZ + \left(\frac{1}{2}B_7A'\right)Y^2 \\ \Delta Y &= B^2 + B_2X + B_3Y + (C_3B')Z + B_5X^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{1}{2} C_9 B'\right) Z^2 + B_7 XY + (C_7 B') XZ \\
& + (2C_{11} B') YZ \\
\Delta Z = & C_1 + C_2 X + C_3 Y + C_5 X^2 + C_6 Z^2 + C_7 XY \\
& + C_8 XZ + C_9 YZ + G_{10} Z^3 \cdots \cdots \cdots (N 1)
\end{aligned}$$

これが現状においては理想的の式である。しかし何分項数が多いので更に削減すると

(第二案)

$$\begin{aligned}
\Delta Z = & A_1 + A_2 X + A_3 X^2 + A'(B_2 Y + 2BXY) \\
& + A''(C_2 Z + \frac{1}{2} C_3 Z^2 + 2C_5 XZ + C_7 YZ) \\
\Delta Y = & B_1 + B_2 X + B_3 Y + B_4 X^2 \\
& + B'(C_3 Z + \frac{1}{2} C_5 Z^2 + C_7 XZ) \\
\Delta Z = & C_1 + C_2 X + C_3 Y + C_4 Z + C_5 X^2 + C_6 Z^2 \\
& + C_7 XY + C_8 XZ + C_9 YZ + C_{10} Z^3 \cdots \cdots \cdots (N 3)
\end{aligned}$$

以上の式は ΔZ において 10 元, ΔX において 5 元, ΔY において 5~6 元という形になっているが ΔZ の式には水準点の成果が有利に使用できるので, これらを解くに必要なる三角点の数は結局 ΔY 式の 5~6 元の式によって決定される。随ってこれがための現地基準点作業も現行等角写像変換式と大差なく実施できる。

2. 式の吟味

(第一案), (第二案) の式は共に完全に近い二次形式になっているが, その中の高次の項, 積の項, 一次の項, 常数項はそれぞれ曲面の形状, 廻転, 平行移動量を示し影響度も高いので, これ以上項数を削減するためには相当程度精度を犠牲にしなければならない。また反対に項数を幾ら増加させても格段の精度の向上は期待し得られないのでこれが求むる限界曲面である。これ以上の誤差は当然ランダム誤差として容認されるべきものであろう。

実験的考察

I 誤差曲面適合度の検定

航空三角形における誤差曲面に対する問題は統計学的に言えば Curvilinear (Polynomial) regression の特殊な場合であるから, 適合度の検定においても同じ考えを拡張していって一向差支えないと思う。しかし何分計算が膨大になるとそれ程までの吟味も必要としないので慣習に随って単に残差の絶対値を比較するにとどめる。使用例も過去の実作業中より G 地区 (トラバース点使用の場合) をとりあげることにした。同地区には信頼度の高いトラバース点が 13 点あったので内 6 点を三角点の代用として X, Y, Z 座標を使用し,

残りの点から 4 点を水準点の代用に Z 座標のみを使用した。その結果これら 10 点と残りの 3 点に対して曲面回帰の残差を求めると第 1 表のようになりつぎの傾向が見出せる。

- (第 1 案) は現行等角写像変換式に比して 2~6 倍の高精度である。
- (第 1 案) は ΔX 式と ΔY 式の精度が均一である。
- 等角写像変換式は ΔX , ΔY 共に残差の変動が大きく桁違いの誤差がなお修正されずに残っている (ΔY 式の P_2 , P_3 並びに ΔX 式の P_3 点)。これらの点は現行作業法では信頼度が薄いとして捨てられる可能性が強いが (第 1 案) を使えば綺麗に修正され決して信頼度が落ちるとは考えられない。その関係は (第 2 表) を見れば更に明らかである。

II 各種誤差曲面の比較検討

現在わが国で使用されている誤差曲面は通称等角写像変換式の外につぎのような式も相当使用されている。

$$\begin{aligned}
\Delta X = & Px + Q'x' + Rxy \\
\Delta Y = & P'x + Q'x^2 + R'xy \\
\Delta Z = & P''x + Q''x^2 + R''xy
\end{aligned}$$

但し後者は ΔX , ΔY , ΔZ を全く同じ形式で修正するので不自然である。これら二つの式と本論の (第 1 案), (第 2 案) を加えて ΔY について計算すれば第 2 表のようになりつぎのことが結論される。

- 本論第 1 案, 第 2 案と現行使用 2 式との間には精度上格段の隔りがある。
- 項数が増加するに随って絶対値の大きい残差が逐次消滅してゆき第 1 案の式に至ってほとんどなくなってくる。随って単に現行式の適合具合のみからトラバース点の信頼度を判定するのは危険である。

等角写像変換式の修正

現在良く用いられている等角写像変換式というのは下記のような式である。

$$\begin{aligned}
X = & X_0 + Ax - By + C(x^2 - y^2) - 2Dxy \\
Y = & Y_0 + Bx + Ay + D(x^2 - y^2) + 2Cxy
\end{aligned}$$

これは誤差の修正と共に座標変換を同時に行なうものであるから, 純然たる誤差の計算式と同一視することはできない。しかし今まで研究した結果を以ていうならばつぎのような不自然な点を感じられる。

- y^2 は比較的に影響度の少ない項であるから思い切って削除して他のより有効な項を導入した方が

G 地区基準点配置図

▲ 三角点として使用したもの
 ● 水準点として使用したもの
 △ 曲面の点検に使用したもの

(1) ΔZ 式

(第 1 表)

単位 cm * は 100 cm 以上の残差

点 名 区 分	最小自乗法に使用した点										新 点			残平 差方 の和	同平 左方 の根
	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇	P ₈	P ₉	P ₁₀	P ₁ '	P ₂ '	P ₃ '		
本論第一式	一意的に決定										-2	1	3	14	2

(2) ΔY 式

点 名 区 分	最小自乗法に使用した点										新 点			残平 差方 の和	同平 左方 の根
	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇	P ₈	P ₉	P ₁₀	P ₁ '	P ₂ '	P ₃ '		
(第一案)	+1	+2	+1	+10	-36	-52	-21	-22	+24	+10	+6	-35	-3	540	23
等角写像変換式	+13	+387*	+358*	+18	-61	+40	+18	-16	+77	+36	+18	+22	-10	2296	141

(3) ΔX 式

点 名 区 分	最小自乗法に使用した点										新 点			残平 差方 の和	同平 左方 の根
	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇	P ₈	P ₉	P ₁₀	P ₁ '	P ₂ '	P ₃ '		
(第一案)	-16	-3	+25	+18	+44	-1	+12	-25	+53	-24	-10	+6	-5	574	24
等角写像変換式	-9	-24	-137*	+15	+33	+28	-24	+25	-70	+1	0	-4	-1	2218	47

(第 2 表)

単位 cm

点 名 区 分	最小自乗法に使用した点										新 点			残平 差方 の和	同平 左方 の根	項 数
	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇	P ₈	P ₉	P ₁₀	P ₁ '	P ₂ '	P ₃ '			
$\Delta Y = B_1 + B_2x + B_3y$ $+ B_4x^2 + B_5xy$ $+ B'(C_3Z + \frac{1}{2}C_9Z^2$ $+ C_7XZ)$	+6	+2	+1	+10	-36	-52°	-21	-22	+24	+10	+6	+35	+3	539	23	8
$\Delta Y = B_1 + B_2x + B_3y$ $+ B_4x^2 + B'(C_3Z$ $+ \frac{1}{2}C_9Z^2 + C_7XZ)$	+13	-14	-24	-86°	-13	+41	-10	-33	+29	+31	-11	-23	-9	1117	33	7
$Y = Y_0 + Bx + Ay$ $+ D(x^2 - y^2) + 2Cxy$	+13	-387*	-358*	+18	-16	+40	+18	-16	+77	+36	+18	+22	-10	22497	141	6
$\Delta Y = P'x + Q'x^2$ $+ R'xy$	+25	+143*	+467*	+251*	+100*	+82	+130*	-7	-36	-5	+41	-48	-23	26282	162	3

* 100 cm 以上の残差 ° 50 cm ~ 100 cm の残差

効果的である。

2. 等角写像変換式を使用する場合には前提条件として Z に基く X, Y 方向の誤差を修正しなければならないが、現在使われている修正式ではこれが

十分に修正できないのではなかろうか。

すなわち Z のおよぼす影響は相当に大きいのに拘らず、修正式は X, Y 二元の項のみから成立っているから、Z に影響された部分が修正されずに

残っている筈である。随って等角写像変換式においても Z を含む項を入れた方がより適合度が高いと思われる。

以上の観点に基いてつぎのような式を誘導した。

$$X = X_0 + Ax - By + Cx^2 - 2Dxy - EyZ$$

$$Y = Y_0 + Bx + Ay + Dx^2 + 2Cxy + ExZ$$

これを T 地区の例に基いて現行の等角写像変換式

と比較するならば第 3 表のようになる。T 地区には配置図に示すように三角点が 14 点設標されてあるからその内 4 点を使用して変換式の係数を決定し他の 10 点について残差を求めた。結果的に本論の式は現行の変換式に比較して相当適合度が高くなったのが認められる。

しかし未だ適用例が少ないので本例を以って断定する

(1) X 方向

(第 3 表)

区 分	点 名	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇	P ₈	P ₉	P ₁₀	残差の平方和	同 左 平方根
本 論 の 式		-0.44	0.08	-0.88	0.21	0.29	0.10	-0.22	0.36	0.11	-0.64	2.4746	0.50
現 行 式		-0.39	-0.36	-1.37	0.30	1.18	1.55	-0.59	0.65	1.04	-1.37	9.7726	0.99

(2) Y 方向

区 分	点 名	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇	P ₈	P ₉	P ₁₀	残差の平方和	同 左 平方根
本 論 の 式		-0.62	0.21	0.47	-0.25	1.31	0.47	0.98	-0.79	-0.63	-0.81	4.3260	0.66
現 行 式		-0.22	-1.01	-0.23	-0.32	0.71	-1.41	0.88	-1.45	-1.00	1.35	9.4154	0.94

のは冒険である。今後の研究によって更に完全なものに発展させてゆきたいと思っている。

結 語 航空三角測量においては色々方法が考えられるが、各写真を連接してコースとしての累積誤差を修正する限りにおいては、最終的精度が誤差曲面の適合度に大きく左右される。この点機械法においても解析法においても同じである。随って本論においてはその緊要な部分を抽出して研究して来たのであるが、この儘の形で更に長いコースや広地域の三角測量に拡張できるかどうかは疑はしい。またこのようにコースとして写真を連接する方法においてはどうしても既知点の数や精度の上に相当の制約があるからこれ以上の発

展のためには解析法によるブロック式計算法に進んで方が得策ではないかと思う。

なおこの研究は国際航業株式会社測量部長笠松清氏の御指導御鞭撻によって完成されたものであることを附記し謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) W. Brucklacher: "Beitrage Zur numerischen Photogrammetrie", Deutsh. Ged. komm. Reihe A Heft Nr. 34I, 1959.
- 2) R. Kamiya: "A short report of practical method for analytical aerial triangulation", 1960 London Congress of I. S. P.