モデル変形の実験

上 合 良 吉*

Experiment on Model Deformation

By Ryokichi Kamiya

Synopsis: Stereo-photogrammetry is a means by which we make measurements on a model constructed by stereo-viewing. The model may often be exposed to deformation. This model deformation is caused by some displacements of image points on photographs. The displacements are only on two-dimensional plane, however, the deformations are of three dimensional.

The relationship between them is not yet clear. In spite of some theoretical investigations so far published, experiments thereby are scarcely in our sight.

In the case of conventional mechanical method, the experiment is not so easy. But by analytical method we can give a image point any displacement intentionally and test the deformation comparing with the standard model.

Some results of the preliminary experiment for model deformation by analytical method will be shown below.

要約 写真測量における測定は、一対の写真を肉眼立体視することによって眺められる立体模像上で行われることは周知の通りである。この模像を通常モデルと称するが、このモデルは往々にして歪をおこす。歪は、一口にいて、各写真像に、何等かの原因によって変位が生じている為に起るものである。変位の方は単に写真平面上のものに過ぎないが、モデルの歪は立体的なものである。

この関係は、現在まだよく判っていない。理論的なものでは、二^{(1),(2)}発表された研究はあるが、機械法では実験の仕様がないので殆んど放置されている。

所が解析法では、この実験が極めて容易である。それは任意のモデルの任意の点の写真座標を変位させて、標準のものと比較することが出来るからである。機械法では、標準のものを任意のケースについて造ること自体が既に難しい。

この報告は、モデルの変形について行った極めて初歩的な実験の紹介であって、1960年10月測地学会で講演したものを骨子とした。その後学会発足まで有志によって構成された解析写真測量研究グループのメンバーである村岡一男氏の、この問題に関する詳細な研究があるので、何れ本紙に紹介されるものと信ずる。詳細については同氏の発表にまちたい。

1. 標準モデルと資料

* アジア航空測量株式会社

まず標準モデルを造らなければならない。水平な地上に1 kmの meshを仮定し、これが次の条件で撮影されたものとする。即ち、

1. 写真機	広角, $f=150$ mm
2. 基線長	1 km
3. 撮影高度	1,875 m
4. 写真縮尺	1/12,500
5. 左写真の傾き	水平
6. 右写真の傾き	$\kappa=-2$ gr, $\varphi=-2$ gr,
$\omega=-2$ gr

(但し $\kappa \rightarrow \varphi \rightarrow \omega$ の順序)

そうすると、左写真では正確に80 mmの間隔を持つ meshが写される。第1図太い実線がそれである。右写真では回転と傾斜があるので、同図右側の細い実線の様になる。解析法に於いて測定するものは、単写真の写真座標だけであるが、その場合測定器の精度として乾板上で最大10 μ 位のものを想定して、測定座標値をつくったものが同図の点線である。

第1表に、測定値を算出した順序を示す。第1図のNo. 1~No. 6迄の測定点の各点に対して右写真が傾けられた時の写真座標を μ 単位迄正確に算出したものを(a)、同じく誤差を持つものを(b)とすると、 x 及び y それぞれについて、 Δx 及び Δy の誤差を持っていたことになる。第1図右写真の細線と破線の相違はそれを表わしている。

この様な一対の写真を相互標定すると、出来上った

第 1 表

点 名	(a) μ 迄正しく算出したもの		(b) 誤差を想定してつくった値		(b) の (a) に対する誤差	
	x	y	x	y	Δx	Δy
	mm	mm	mm	mm		
1	-90.255	-84.966	-90.250	-84.975	+ 5 μ	- 9 μ
2	-86.144	- 2.156	-86.125	- 2.150	-11	+ 6
3	-82.115	+77.749	-82.125	+77.800	-10	+ 6
4	- 7.358	-86.202	- 7.350	-86.200	+ 8	+ 2
5	- 4.716	- 4.714	- 4.725	- 4.725	- 9	-11
6	- 2.165	+74.004	- 2.175	+74.000	-10	- 4

Fig. 1 Displacements of photographic co-ordinates by inclination and rotation
($k = -2 \text{ cg}$, $\varphi = -2 \text{ cg}$, $\omega = -2 \text{ cg}$)

すもので点線がそれであるが、相当に大きい歪が現われている事が判る。同図の左の点線は平面位置の変形を示す。左右の図形を組合せると変形の様子がよく判るが、撮影高度は、大きい所で 100 μ 位高くなり、それだけ図形が大きくなって現われる。この写真は 1/12,500 であるから、100 μ と云えば大体 1.25 m に相当し、飛行高度の 1/1,500、基線長の 1/800 に当る。

即ちフィルムで 10 μ の誤差があると、結構これ位の歪が起ることを示している。

但し、このモデルに基準点が三点以上あって、対地標定が可能のときには、傾斜及び縮尺の修正により、20 μ 程度の変形におさまる事は想像される。同図左の細い実線は縮尺を修正したときの平面図形である。しかしこれは対地標定を便宜的に変形の修正に使っているに過ぎない。

第 2 図左側に於いて、各測定点の残存縦視差を附記してある。例えば、点 ① では (3 μ)、点 ② では (-4 μ)……等である。これを見ると、

残存縦視差はモデルの変形量に比して遙かに小さい。従来、機械法で縦視差が除去されれば、モデルは出来上ると考えられていたが、これは大きな間違いであって、対地標定で修正しても、残存縦視差の三倍位の変形は免れない筈である。外国の例を見ても、従来、機械法の航空三角測量で 50~100 μ の誤差は常に現われているが、これは機械法で 20 μ の縦視差は常時残存していることと符号するようである。

次に、同図左には、各標定要素の誤差を記入した。これは正しい標定要素が始めから判っているのも、それと算出値を比較したものである。

同表下段には両写真の相対する標定要素の差をとっているが、この量がモデルの変形を直接左右するもの

Fig. 2 A model deformation by measurement errors given as table 1

モデルは相当の変形をうける。その模様を示したものが第 2 図である。第 2 図右は、その Z 方向の変形を示

Fig. 5 A model deformation by the error 25μ at point (4)

Fig. 6 A model deformation by the error 25μ at point (4)

Table 2. Error of Orientation element

	(10^{-2} rad)	(10^{-1} rad)	(10^0 rad)	(10^1 rad)	(10^2 rad)	(10^3 rad)	(10^4 rad)
ΔK_1	+111	+451	-59.8	+29.4	+343	-69.8	+327
$\Delta \varphi_1$	+7.8	+2.6	+8.7	+8.6	+38.4	+6.4	-20.0

ΔK_2	+3.5	+28.1	-77.7	+18.9	+35.0	-65.8	+35.5
$\Delta \varphi_2$	-16.1	+11.8	-12.7	-45.8	-16.7	-12.8	-16.5
$\Delta \omega_2$	+2.7	+18.3	-31.7	+15.6	+18.2	-30.8	+18.0

$\Delta K_1 - \Delta K_2$	+7.6	+17.0	+17.9	+20.5	-0.7	-4.0	-2.8
$\Delta \varphi_1 - \Delta \varphi_2$	+23.9	-3.2	+21.4	+55.4	+55.1	+19.2	-3.5
$\Delta \omega_2$	+2.7	+18.3	-31.7	+15.6	+18.2	-30.8	+18.0

測定誤差: 25μ

存縦視差が大きいことである。その他 ΔK_1 の符号が変わったので平面位置の回転方向が前と反対になった。 $(\Delta K_1 - \Delta K_2)$ は殆んど変わらず、モデルは同じく前さがり、 $\Delta \omega_2$ の符号が反対になってねぢれ方が反対に、 $\Delta \varphi_1 - \Delta \varphi_2$ が標準モデルと大体等しくなると、再び全体が下方にさがった。

第5図以下同様であるので説明を省略するが、標定要素の変わり方を見るために第2表にこれらをまとめた。第2表の第1行各モデルの番号はそれぞれ(1)から(6)までの点に誤差を与えたものを示す。標準型は0番であらわし、これを最初にかかげた。本表で $\Delta K_1, \Delta \varphi_1$ は左写真の標定要素、 $\Delta K_2, \Delta \varphi_2, \Delta \omega_2$ は右写真の標定要素のそれぞれの誤差である。

これらの標定要素の誤差について、大まかに云えることは、 κ については、

1. 両写真とも同方向の影響をうける。
2. (2)と(6)の点に誤差があったとき特に大きく、その他の場合とは符号が反対になる。
3. (1),(2),(3)の点に誤差があったとき $(\Delta K_1 - \Delta K_2)$ が大きく、(4),(5),(6) のときは小さい。

φ について

1. (2)と(6)に誤差があったときは両写真とも影響が少ない。
2. (1)と(3)のときは左写真の標定要素は変わらないが、右写真が影響され、(1)と(3)とでは符号が反対である。
3. (4)と(6)では上の丁度反対になる。

4. 従って $(\Delta \varphi_1 - \Delta \varphi_2)$ は(2)と(5)のときは変化がないが、(1)と(3)及び(4)と(6)で影響が大きく、それぞれ符号が反対で、傾向が逆になる。

ω について、

1. (2)と(6)で影響が大きく、(1),(3),(4),(6)では全て(2)と(5)の場合の半分で符号が反対であ

る。

3. 標定誤差とモデル変形の関係

前節迄の観察で標定要素の誤差とモデルの変形との間には一定の関係があることが想像されるので、この点について、いくつかの数式を用いた検討を行って見る。

モデルの座標 (x, y, z) は、左写真のレンズの中心を原点とし、基線方向を x 軸に、 x 軸に直交し左写真面に平行な直線を y 軸に、 xy 平面に直交し下方に向う軸を z 軸とする

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{x_1}{x_1 - x_2} \times b \\ y &= \frac{y_1}{x_1 - x_2} \times b \\ z &= \frac{f}{x_1 - x_2} \times b \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

但し、基線長を b 、標定完了時における左写真の写真座標を (x_1, y_1) 、右写真の写真座標を (x_2, y_2) とする。尚、標定完了時は $y_1 = y_2$ である⁽⁴⁾。

x, y, z の微小変化量を $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ とすると (1) 式を微分して

$$\Delta x = \frac{\Delta x_1}{x_1 - x_2} \cdot b - x \cdot \frac{\Delta x_1 - \Delta x_2}{x_1 - x_2} = A \cdot b - x \cdot B \dots (2-1)$$

$$\Delta y = \frac{\Delta y_1}{x_1 - x_2} \cdot b - y \cdot \frac{\Delta x_1 - \Delta x_2}{x_1 - x_2} = C \cdot b - y \cdot B \dots (2-2)$$

$$\Delta z = -z \frac{\Delta x_1 - \Delta x_2}{x_1 - x_2} = -z \cdot B \dots (2-3)$$

一方、写真座標は標定要素の函数であるのでこれを Maclaurin 展開し、微小量の一次項のみをとると⁽⁴⁾

$$\Delta x_1 = y_1 \Delta \kappa_1 - \left(f + \frac{x_1^2}{f} \right) \Delta \varphi_1 \dots (3-1)$$

$$\Delta x_2 = y_2 \Delta \kappa_2 - \left(f + \frac{x_2^2}{f} \right) \Delta \varphi_2 - \frac{x_2 y_2}{f} \Delta \omega_2 \dots (3-2)$$

$$\Delta y_1 = -x_1 \Delta \kappa_1 - \frac{x_1 y_1}{f} \Delta \varphi_1 \dots (3-3)$$

$$\Delta y_2 = -x_2 \Delta \kappa_2 - \frac{x_2 y_2}{f} \Delta \varphi_2 - \left(f + \frac{y_2^2}{f} \right) \Delta \omega_2 \dots (3-4)$$

Fig. 7 A model deformation by the error 25μ at point (5)

Fig. 8 A model deformation by the error 25μ at point (6)

そうすると (3) を (2) に代入し $y_1 = y_2$ において標定要素の微小変化がモデルにおよぼす影響を数式で観察することができる。

まづ (2-1), (2-2), (2-3) に共通な項

$$\begin{aligned} B &= \frac{y}{b} (\Delta \kappa_1 - \Delta \kappa_2) - \frac{z}{b} (\Delta \varphi_1 - \Delta \varphi_2) \\ &\quad - \frac{x^2}{bz} (\Delta \varphi_1 - \Delta \varphi_2) + \frac{1}{bz} (2xb - b^2) \Delta \varphi_2 \\ &\quad + \frac{(x-b)y}{bz} \Delta \omega_2 \dots (4) \end{aligned}$$

について考える。 κ の誤差の影響は両写真の誤差の差、即 $(\Delta \kappa_1 - \Delta \kappa_2)$ に支配されるがその係数を見ると

$$\left. \begin{aligned} \Delta x \text{ に対しては } & \frac{x \cdot y}{b} \\ \Delta y \text{ に対しては } & \frac{y^2}{b} \\ \Delta z \text{ に対しては } & \frac{y \cdot z}{b} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

であるから、第9図の様に撮影地点と原点を結んだ線上即ち位置ベクトルの方向に変位し、変位率は x, y, z 共に y/b 、即ち基線長を単位にしてあらわした y の値に比例することを示している。 κ の影響は極めて簡単であるが ω については少々複雑である。(4) 式の最後の項の係数を見ると

$$\left. \begin{aligned} \Delta x \text{ に対しては } & x \frac{(x-b)}{bz} y = \left(\frac{x}{b} - 1 \right) \frac{y}{z} x \\ \Delta y \text{ に対しては } & \frac{(x-b)y^2}{bz} = \left(\frac{x}{b} - 1 \right) \frac{y}{z} y \\ \Delta z \text{ に対しては } & \frac{(x-b) \cdot y}{b} = \left(\frac{x}{b} - 1 \right) \frac{y}{z} z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

即ち、変位率 $\frac{y}{z} \left(\frac{x}{b} - 1 \right)$ で κ の場合同様、位置ベクトルの方向に変位する。

但し、 $\left(\frac{x}{b} - 1 \right)$ は x の変化に応じて、 -1 から 0 に変わるので、第9図の様なモデルの傾きが x に比例して変化すること。即ち、ねぢれを生ずることを示すものである。

次に φ の影響であるが、これは極めて複雑である。即ち

$$\left. \begin{aligned} \Delta x \text{ に対しては } & -\frac{z}{b} (\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2) \cdot x \\ & -\frac{x^2}{bz} (\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2) \cdot x + \frac{1}{bz} (2xb - b^2) \Delta\varphi_2 \cdot x \\ \Delta y \text{ に対しては } & -\frac{z}{b} (\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2) y \\ & -\frac{x^2}{bz} (\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2) y + \frac{1}{bz} (2xb - b^2) \Delta\varphi_2 \cdot y \\ \Delta z \text{ に対しては } & -\frac{z}{b} (\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2) \cdot z \\ & -\frac{x^2}{bz} (\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2) z + \frac{1}{bz} (2xb - b^2) \Delta\varphi_2 \cdot z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

上式の第1項は x, y, z がそれぞれ一様に、 b/z 即ち、基線比に比例する縮尺変化をおこすことを示している。同様に第二項は $x^2/b(\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2)$ をこの場合の縮尺変化率と見ることができる。但し、この量は x^2 に比例するので、 x の変化に応じて彎曲がおこる筈である。このことは Δz の式を見れば明瞭である。第三項についても同様に考えることができるが、この場合は式を少し書きかえて

Fig. 9 Example of model deformation by $(\Delta\kappa_1 - \Delta\kappa_2)$. Upper is perspective view; middle is projection from x-direction; lower is the plan.

$$\frac{1}{bz} (2xb - b^2) = \frac{b}{z} \left(\frac{2x}{b} - 1 \right) \dots\dots\dots (8)$$

と書くと () の中は $x=b/2$ で 0 になり $x=0$ で -1 , $x=b$ で $+1$ であるから、第9図 κ の場合と同様の変形が x 方向について発生したことを示す項である。

次に (2) 式の A 及び C について考えよう。

(3) 式を代入すると

$$\left. \begin{aligned} A \cdot b &= y \cdot \Delta\kappa_1 - \left(z + \frac{x^2}{z} \right) \Delta\varphi_1 \\ C \cdot b &= -x \cdot \Delta\kappa_1 - \frac{xy}{z} \Delta\varphi_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

両式の第1項は明らかに回転を表わす項であって実験の結果とよく一致している。第2項についても $-z\Delta\varphi_1$ が $\Delta\varphi_1$ の廻転によって起る x 方向の変位であるとすることは明らかであるが、 $\frac{x^2}{z}\Delta\varphi_1$ と $\frac{xy}{z}\Delta\varphi_1$ は

単純な回転でなくて(8)式の場合と同様に位置ベクトルの方向に沿って変形を伴う傾斜である。従って(8)式と(9)式を適当に組合せて、単純な廻転と変形を伴うものを区別して式をまとめると、次の通りとなる。

$$\Delta x = y\Delta\kappa_1 - z\Delta\varphi_1 - x \cdot B' \cdots \cdots (10-1)$$

$$\Delta y = -x\Delta\kappa_1 + (z\Delta\omega_1) - yB' \cdots \cdots (10-2)$$

$$\Delta z = x\Delta\varphi - (y\Delta\omega_1) - zB' \cdots \cdots (10-3)$$

但し、

$$B' = \frac{y}{b}(\Delta\kappa_1 - \Delta\kappa_2) - \frac{z}{b}(\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2) \\ - \frac{x^2}{bz}(\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2) + \frac{x}{z}(\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2) \cdots \cdots (10) \\ + \frac{b}{z}\left(\frac{x}{b} - 1\right)\Delta\varphi_2 + \frac{y}{z}\left(\frac{x}{b} - 1\right)\Delta\omega_2$$

即ち B' がそれぞれ共通に掛かっている項は、位置ベクトルの方向に変形を伴う傾斜であって、その他の項は単純な回転である。(10-2)式における $(z\Delta\omega_1)$ 及び(10-3)式の $(-y\Delta\omega_1)$ は $\Delta\omega_1$ を考えたときに当然考慮すべき項であるから()に入れて附加しておいた。その場合は $\Delta\omega_2 = \Delta\omega_2' - \Delta\omega_1$ と考えなければならない。これら単純回転の項は全て対地標定によって修正され得る量である。

その他の歪を伴う項について、もう少し考察を加えて見る。先ず第1に(10-4)式の値 B' は、基線長 b を長さの単位として座標値を表わしても何等変化がないことは明かである。

従って

$$B' = -y(\Delta\kappa_2 - \Delta\kappa_1) + z(\Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1) \\ + \frac{x^2}{z}(\Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1) + \frac{x}{z}(\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2) \\ + \frac{1}{z}(x-1)\Delta\varphi_2 + \frac{y}{z}(x-1)\Delta\omega_2 \cdots \cdots (10-4)$$

としておく

$y(\Delta\kappa_2 - \Delta\kappa_1)$ は x に無関係であるから、 x 方向については一様な歪である。 y 方向の傾斜を $\Delta\vartheta_x$ とし $\Delta\kappa$ によっておこる Z 方向の歪を Δz_x とすると

$$\Delta\vartheta_x = \frac{\Delta z_x}{y + \Delta y} = \frac{yz(\Delta\kappa_2 - \Delta\kappa_1)}{y} = z(\Delta\kappa_2 - \Delta\kappa_1) \cdots \cdots (11)$$

但し $(\Delta\kappa_2 - \Delta\kappa_1)$ は小とし、その2乗以上を省略する。即ち y 方向の傾斜は一定であって、 z に比例して変化する。次に $\Delta\omega_2$ の影響について考える。 $x = \text{cont.}$ の場合、同様に y 方向の傾きを $\Delta\vartheta_y$ とすると

$$\Delta\vartheta_y = \frac{\Delta z_y}{y + \Delta y} = \frac{1}{y} \cdot \frac{y}{z} \Delta\omega_2 \cdot (x-1) \\ = (x-1)\Delta\omega_2 \cdots \cdots (12)$$

即ち $\Delta\omega_2$ によって生ずる y 方向の傾斜は y にも無関係であって、単に $(x-1)$ にのみ比例する。

残りの項、即ち φ の影響は全て、 y 方向には無関係であるから、この方向では一様な歪である。

先ず、基線の中央に原点を移動し、新しい座標系を表わした x -座標を x_0 とすると

$$x - \frac{1}{2} = x_0$$

であるから $\Delta\varphi$ の為に生ずる方向の変位 Δz_φ は

$$\Delta z_\varphi = x_0^2(\Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1) + x_0(2\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2) \\ + \left(\frac{3}{4}\Delta\varphi_1 - \frac{1}{4}\Delta\varphi_2\right) + x^2(\Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1) \cdots (13)$$

第1項による傾斜を $\Delta\Phi_1$ とすると、前と同様に

$$\Delta\Phi_1 = x_0(\Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1)$$

即ち、この傾きは一定でなく $x_0=0$ を中心に左右で彎曲する。次に第2項による傾斜を $\Delta\Phi_2$ とすると

$$\Delta\Phi_2 = 2\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2$$

これは x 方向の一定の傾きであって、 $x_0=0$ においては変形は起らない。第3項及び第4項による影響は傾きを発生しない一様な歪である。但し、第3項は $1/z$ に比例し、第4項は z に比例する縮尺変化率を持つ歪である。

結語 第1に、モデルの変形がコースの変形とどの様な関係にあるかは、非常に重要な問題であるが、本文で判る様に変形を表わす式が相当に複雑であるからコース全体に共通な要因を見付け出すことは甚だ困難の様である。しかしながら解析航空三角測量の精度は、この関係を見出すことによって飛躍的に向上することは確実であろう。

現在は、コースの変形の原因が暗中模索である為に全部の誤差を偶然誤差として取扱う考え方と系統的誤差の曲線を仮定する考え方とが入り乱れている。これを統一するためにも、この問題に終止符号を打たねばならない。

第2にモデルの変形は現実に修正できるのか。又、出来るとすれば、どうすればよいかという問題がある。これも又、写真測量の精度をあげる重要な要因である。今後各方面で研究が行われることを期待したい。

参考文献

- 1) Gotthardt: "Gemeinsame Analytische Einpassung einer Bildstreifens für Photogrammetrische Präzisionsvermessung", Bildmessung und Luftbildwesen.
- 2) Van der Weele: "The Relative Orientation of Photographs of Mountainous Terrain", Photogrammetria XVI-1, 1960.
- 3) Brucklacher: Beiträge zur Numerischen Photogrammetrie"
- 4) Kamiya: A short Report of a Practical Method for Analytical Aerial Triangulation.