解析航空三角測量における誤差曲面を適合する 計算の簡易化について

田 浦 秀 春*

The fitting of error surface in Analytical aerial triangulation.

By Hideharu Taura

In Aerial Triangulation, the method of least squares is applied to adjust the curve of error. However this method requires much computations for complicated curves. Involving dependent and independent variables with random errors, it is believed that this theory is not logical for practical use.

This article is a study for a reasonable arithmetic process which can be used in theory and practice.

The results of our experiment shows that this new process required less computation as the use of statistics was introduced.

まえがき 航空三角測量における誤差曲面の適合には一般に最小自乗法が用いられている。しかし最小自乗法は複雑な曲面回帰の場合には計算量が非常に増加するので取扱いが不便になる。また従属変数独立変数共にランダム誤差を含んでいるから理論的にも成立しない。一般にこのような場合には適当な数の群に別けて計算するのであるが航空三角測量では標本の数(既知点の数)が非常に少ないからこの方法もまた適用出来ない。そこで理論実用両面においてさらに合理的な演算方式が開発されなければならない。小論においては比較的誤差が小さくて幾分規則性がある様に思われる解析法の場合を主体とした。然し機械法の場合にも現在最小自乗法の適用されている範囲では成立する筈である。なお小論の方法を上記二方法に比べると次の様な特色が認められる。

1. 群別の方法に比べて計算の時間は大して変らないが推定値の信頼区間が小さい。平均 90 % 程度で標本の数が少ない程有利である。
2. 最小自乗法に比べて計算量ははるかに少ない。既知点に対する適合後の残差の平方和は最小自乗法が小さいが絶対値の和は小論の方が小さい。
3. 電子計算機のように演算の桁数が制限されている場合には高次の最小自乗法は精度がおちるが小論の方法ではその心配はない。

演算方式の理論

I. 直線回帰の問題

便宜上先ず骨子となる 2 次元の直線回帰の問題について説明する。

(1) 前提条件

二つの確率度数の組 $x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n$ において x_i を $N(X_i, \sigma_x^2)$ y_i を $N(Y_i, \sigma_y^2)$ (但し $i=1, \dots, n$) の正規分布に従うものとする。 $x_i - X_i = \varepsilon_i, y_i - Y_i = \eta_i$ を以て兩組の i 番目の誤差と名づける。更に次の仮定を設ける。

1. $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ は各々独立である。即ち
$$E(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \quad (i \neq j)$$
2. $\eta_1, \dots, \eta_n$ は各々独立である。即ち
$$E(\eta_i, \eta_j) = 0 \quad (i \neq j)$$
3. ε_i と η_i は独立である。即ち
$$E(\varepsilon_i, \eta_j) = 0 \quad (i, j=1, \dots, n)$$
4. X, Y 間に於て次の関係が成立している。

$$Y_i = \alpha + \beta X_i$$

5. $\sum_{i=1}^n (x_i - x_j)$ の値は極端に 0 に近くなならない。 $\sum$ の記号は $i > j; i, j=1, \dots, n$ なる組合わせの総和を示す。

そうすると問題は $x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n$ の観測値 $x'_1, \dots, x'_n; y'_1, \dots, y'_n$ から $\alpha, \beta, \sigma_x, \sigma_y$ を推定することになる。

(2) $\alpha, \beta, \sigma_x, \sigma_y$ の推定値

* 国際航業株式会社研究室

観測値 $x_1', \dots, x_n'; y_1', \dots, y_n'$ を改めて $x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n$ で表わすことにする。任意の二組の観測値を $(x_i, y_i), (x_j, y_j), (i > j)$ とすれば (1) の前提条件により次の関係が成立する。

$$(y_i - Y_i) - \beta(x_i - X_i) = \eta_i - \beta\epsilon_i \dots\dots\dots 1$$

$$(y_j - Y_j) - \beta(x_j - X_j) = \eta_j - \beta\epsilon_j \dots\dots\dots 2$$

$$(y_i - y_j) - \beta(x_i - x_j) - \{(Y_i - Y_j) - \beta(X_i - X_j)\} \\ = (\eta_i - \eta_j) - \beta(\epsilon_i - \epsilon_j) \dots\dots\dots 3$$

然るに $(Y_i - Y_j) - \beta(X_i - X_j) = 0$ で且つ

$(\eta_i - \eta_j) - \beta(\epsilon_i - \epsilon_j)$ は $N\{0, 2(\sigma_x^2 + \beta^2\sigma_y^2)\}$ に従うから N 個の組合わせの平均をとれば $N \rightarrow \infty$ に於て

$$\frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \{(y_i - y_j) - \beta(x_i - x_j)\} \\ \rightarrow \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \{(Y_i - Y_j) - \beta(X_i - X_j)\} = 0 \quad 4$$

が成立する。故に

$$b = \frac{\frac{1}{2N} \sum (y_i - y_j)}{\frac{1}{2N} \sum (x_i - x_j)} = \frac{\sum (y_i - y_j)}{\sum (x_i - x_j)} \dots\dots\dots 5$$

は β の一致推定量になる。 α の値は次式から直ちに推定される。

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

$$\left(\text{但し } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i, \bar{y} = \frac{1}{n} \sum y_i, i=1, \dots, n \right)$$

若し $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum X_i, \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum Y_i (i=1, \dots, n)$ で表わせば $\bar{x}, \bar{y}$ は夫々 $\bar{X}, \bar{Y}$ に確率収束するから a は $\bar{Y} - \beta\bar{X} = \alpha$ に確率収束する。即ち a は α の一致推定量となる。

σ_x^2, σ_y^2 を求めるにあたっては先づ次の様な記号を定める。

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}} \quad S_X = \sqrt{\frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n}}$$

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n}} \quad S_Y = \sqrt{\frac{\sum (Y_i - \bar{Y})^2}{n}}$$

$$S_{xy} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n}$$

$$S_{XY} = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{n}$$

S_x^2, S_y^2, S_{xy} の期待値を夫々 $E(S_x^2), E(S_y^2), E(S_{xy})$ で表わせば

$$E(S_x^2) = S_x^2 + \sigma_x^2 \frac{n-1}{n} \dots\dots\dots 6$$

$$E(S_y^2) = S_y^2 + \sigma_y^2 \frac{n-1}{n} \dots\dots\dots 7$$

$$E(S_{xy}) = S_{XY} \dots\dots\dots 8$$

となりまた $Y_i = \alpha + \beta X_i$ なる関係式が成立しているから

$$S_Y = \beta S_X \dots\dots\dots 9 \quad S_{XY} = \beta S_x^2 \dots\dots\dots 10$$

となる。8, 9, 10 から更に

$$S_x^2 = \frac{E(S_{xy})}{\beta} \dots\dots\dots 11 \quad S_Y^2 = \beta E(S_{xy}) \dots\dots\dots 12$$

が導かれるから之を 6, 7 に代入すれば

$$\sigma_x^2 = \left[E(S_x^2) - \frac{E(S_{xy})}{\beta} \right] \frac{n}{n-1} \dots\dots\dots 13$$

$$\sigma_y^2 = [E(S_y^2) - \beta E(S_{xy})] \frac{n}{n-1} \dots\dots\dots 14$$

となる。一方 S_x^2, S_y^2, S_{xy} は期待値 $E(S_x^2), E(S_y^2), E(S_{xy})$ に確率収束した b も β に確率収束するから

$$\left[S_x^2 - \frac{S_{xy}}{b} \right] \frac{n}{n-1} \dots\dots\dots 15$$

$$[S_y^2 - b S_{xy}] \frac{n}{n-1} \dots\dots\dots 16$$

は σ_x^2, σ_y^2 の一致推定量となる。

(3) β の信頼区間

$\sigma_y^2 + \beta^2 \sigma_x^2$ の推定値を S^2 とすれば 15, 16 式から

$$S^2 = [S_x^2 + b^2 S_y^2 - 2b S_{xy}] \frac{n}{n-1} \dots\dots\dots 17$$

となる。また

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_y^2 + \beta^2 \sigma_x^2} \dots\dots\dots 18$$

を考えると自由度 $(n-1)$ の χ^2 分布に随う。何となれば

$$S_y^2 = \frac{1}{n} \{ \sum (y_i - \bar{y})^2 \} = \frac{1}{n} \{ \sum (\eta_i - \bar{\eta})^2 \\ + \sum (Y_i - \bar{Y})^2 + 2 \sum (\eta_i - \bar{\eta})(Y_i - \bar{Y}) \}$$

$$S_x^2 = \frac{1}{n} \{ \sum (x_i - \bar{x})^2 \} = \frac{1}{n} \{ \sum (\epsilon_i - \bar{\epsilon})^2 \\ + \sum (X_i - \bar{X})^2 + 2 \sum (\epsilon_i - \bar{\epsilon})(X_i - \bar{X}) \}$$

$$S_{xy} = \frac{1}{n} \{ \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \} \\ = \frac{1}{n} \{ \sum (\epsilon_i - \bar{\epsilon})(\eta_i - \bar{\eta}) \\ + \sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) + \sum (\epsilon_i - \bar{\epsilon})(Y_i - \bar{Y}) \\ + \sum (\eta_i - \bar{\eta})(X_i - \bar{X}) \}$$

(但し $\bar{\epsilon} = \frac{1}{n}(\epsilon_1 + \dots + \epsilon_n), \bar{\eta} = \frac{1}{n}(\eta_1 + \dots + \eta_n), i=1, \dots, n$ とする)

で且つ ϵ_i と η_i は独立であるから

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_y^2 + \beta^2 \sigma_x^2} = \frac{\sum \{ (\eta_i - \bar{\eta}) - b(\epsilon_i - \bar{\epsilon}) \}^2}{\sigma_y^2 + \beta^2 \sigma_x^2} \\ = \frac{\sum \{ (\eta_i - b\epsilon_i) - (\bar{\eta} - b\bar{\epsilon}) \}^2}{\sigma_y^2 + \beta^2 \sigma_x^2}$$

となるからである。次に

$$\frac{\sqrt{3n(n-1)} \left\{ \frac{1}{2N} \sum (x_i - x_j) \right\} (b - \beta)}{\sqrt{n+1} \sqrt{\sigma_y^2 + \beta^2 \sigma_x^2}} \quad \dots 19$$

については

$$\left[b - \sqrt{\frac{n+1}{3(n-1)^2} (S_y^2 + b^2 S_x^2 - 2b S_{xy})} \frac{t_0}{\frac{1}{2N} \sum (x_i - x_j)}, \right. \\ \left. b + \sqrt{\frac{n+1}{3(n-1)^2} (S_y^2 + b^2 S_x^2 - 2b S_{xy})} \frac{t_0}{\frac{1}{2N} \sum (x_i - x_j)} \right] \quad \dots 21$$

之に対し群別の方法の信頼区間は

$$\left[b - \sqrt{\frac{1}{n-1} (S_y^2 + b^2 S_x^2 - 2b S_{xy})} \frac{t_0}{a_1}, \right. \\ \left. b - \sqrt{\frac{1}{n-1} (S_y^2 + b^2 S_x^2 - 2b S_{xy})} \frac{t_0}{a_1} \right] \quad \dots 22$$

(但し $a_1 = \frac{1}{n} \{ (x_n + \dots + x_{m+1}) - (x_m + \dots + x_1) \}$, $m = \frac{n}{2}$)

であるから 21, 22 両式を比べると

$$\frac{3n}{2(n+1)} \cdot \frac{1}{2N} \sum (x_i - x_j) \div a_1 \quad (\text{証明は付録 2})$$

$$\sqrt{\frac{n+1}{3(n-1)^2}} \cdot \frac{3n}{2(n+1)} = \sqrt{\frac{3n^2}{4(n+1)(n-1)^2}}$$

$$< \sqrt{\frac{1}{n-1}}$$

随って群別の方法に比べて小論の信頼区間はその約90%にあたる。尚標本の数 n についてこの両者の比を作れば第一表のようになる。

第 1 表

n	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	40	50
比	0.89	0.88	0.88	0.88	0.87	0.87	0.87	0.87	0.87	0.87	0.87	0.87

(付録 1)

$\frac{1}{2N} \{ \sum (\eta_i - \eta_j) - \beta \sum (\epsilon_i - \epsilon_j) \}$ の分散が $\frac{n+1}{3n(n-1)} (\sigma_y^2 + \beta^2 \sigma_x^2)$ になる証明

$\frac{N}{2} (\epsilon_i - \epsilon_j) = \epsilon_n(n-1) + \epsilon_{n-1}(n-3) + \dots + \epsilon_{\frac{n+1}{2}} - \epsilon_{\frac{n}{2}} - \dots - \epsilon_2(n-3) - \epsilon_1(n-1)$ について考えると分散は

$2\{(n-1)^2 + (n-3)^2 + \dots + 1^2\} \sigma_x^2$ である。然るに

$$(n-1)^2 + (n-3)^2 + \dots + 1^2 = \{(n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + 1^2\} - 4 \left\{ \left(\frac{n-2}{2} \right)^2 + \dots + 3^2 + 2^2 + 1^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{6} n(n-1)(n+1)$$

であるから $\frac{1}{3} n(n-1)(n+1) \sigma_n^2$ となる。

また $2N=n(n-1)$ であるから $\frac{1}{2N}\{\sum(\eta_i-\eta_j)-\beta\sum(\epsilon_i-\epsilon_j)\}$ の分散は

$$\left(\frac{1}{2N}\right)^2 \cdot \frac{1}{3}n(n-1)(n+1) \cdot \{\sigma_y^2 + \beta^2\sigma_x^2\} = \frac{n+1}{3n(n-1)}\{\sigma_y^2 + \beta^2\sigma_x^2\} \text{ となる。}$$

(付録 2)

$$\frac{3n}{2(n+1)} \cdot \frac{1}{2N} \sum(x_i - x_j) \doteq a_1 \text{ の証明}$$

$$\frac{1}{2N} \sum(x_i - x_j) = \frac{1}{n(n-1)} \{x_n(n-1) + x_{n-1}(n-3) + \cdots + x_{\frac{n}{2}+1} - x_{\frac{n}{2}} - \cdots - x_2(n-3) - x_1(n-1)\}$$

若し x_i を等間隔と仮定すれば

$$\begin{aligned} &= \left[\left\{ n(n-1) + (n-1)(n-3) + \cdots + \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \right\} - \left\{ \frac{n}{2} + \cdots + 2(n-3) + (n-1) \right\} \right] \frac{1}{n(n-1)} \\ &= \{(n-1)^2 + (n-3)^2 + (n-5)^2 + \cdots + 1^2\} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{6}(n+1) \cdots \cdots (A) \end{aligned}$$

$$a_1 = \frac{1}{n} \{(x_n + x_{n-1} + \cdots + x_{\frac{n}{2}+1}) - (x_{\frac{n}{2}} + \cdots + x_2 + x_1)\}$$

x_i を等間隔と仮定すれば

$$= \frac{1}{n} \left\{ n + (n-1) + \cdots + \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \right\} - \left\{ \frac{n}{2} + \cdots + 2 + 1 \right\} = \frac{n}{4} \cdots \cdots (B)$$

故に $\frac{(B)}{(A)} = \frac{3n}{2(n+1)}$ となる。

(4) β が既知の場合における α の信頼区間

此の場合に於て α の推定値は次の式で与えられる。

$$a = \bar{y} - \beta \bar{x} \cdots \cdots \cdots 23$$

処が $a - \alpha = (\bar{y} - \bar{Y}) - \beta(\bar{x} - \bar{X}) = \bar{\eta} - \beta \bar{\epsilon}$ であるから

$$\frac{\sqrt{n}(a - \alpha)}{\sqrt{\sigma_y^2 + \beta^2\sigma_x^2}} \cdots \cdots \cdots 24$$

は $N(0, 1)$ に随う。且つ 18 と 24 は独立であるから $t = \frac{\sqrt{n}(a - \alpha)}{\sqrt{n-1}S} = \frac{\sqrt{n-1}(a - \alpha)}{\sqrt{S_y^2 + \beta^2 S_x^2 - 2\beta S_{xy}}}$ は自由度 $(n-1)$ の t 分布に随う。或有意水準に相当する t の値を t_0 とすれば α の信頼区間は

$$\left[a - \frac{1}{\sqrt{n-1}} \sqrt{S_y^2 + \beta^2 S_x^2 - 2\beta S_{xy}} t_0, \quad a + \frac{1}{\sqrt{n-1}} \sqrt{S_y^2 + \beta^2 S_x^2 - 2\beta S_{xy}} t_0 \right] \text{ で表わされる。}$$

(5) 演算

n 組の観測値を $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$ とする。 $\sum(y_i - y_j)$ を求むるには次の様に展開すれば計算が簡単になる。

$$\begin{aligned} \sum(y_i - y_j) &= \{(n-1)y_1 + (n-2)y_{n-1} + (n-3)y_{n-2} + \cdots + 3y_4 + 2y_3 + y_2\} \\ &\quad - \{(n-1)y_1 + (n-2)y_2 + (n-3)y_3 + \cdots + 3y_{n-3} + 2y_{n-2} + y_{n-1}\} \cdots \cdots 27 \end{aligned}$$

同様に $\sum(x_i - x_j)$ を求める。

5 式から $b = \frac{\sum(y_i - y_j)}{\sum(x_i - x_j)}$ として β の推定値が決定される。

(6) 計算例

第二表の様な観測値に対し直線を適合する。各種の方法を比較すると次の様になる。

第 2 表

数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
区分										
X	2.15	2.54	2.74	2.98	3.07	4.18	5.06	5.08	6.55	6.84
Y	3.68	4.08	3.98	4.53	4.82	6.14	7.49	8.22	9.68	9.94

本例は“化学および化学工業における統計解析”
(C. A. Bennett, N. L. Franklin 共著) の 6.3 表の
一部をとったものである。

イ. 群別の方法

回 帰 直 線 $y=0.614+1.338x$

残差の平方和 0.56 残差の絶対値の和 1,90

ロ. 最小自乗法

回 帰 直 線 $y=0.588+1.344x$

残差の平方和 0.56 残差の絶対値の和 1,89

ハ. 小論の方法

回 帰 直 線 $y=0.542+1.355x$

残差の平方和 0.56 残差の絶対値の和 1,86

II. 平面回帰の問題

2次元の直線回帰の理論をその儘拡張すればよい。
即ち $Z_i = \alpha + \beta X_i + \gamma Y_i$ の関係が成立しているもの
として α, β, γ の推定値を夫々 a, b, c とすれば次の
様な演算が成立する。(証明は省略する)

1. n 組の観測値を $(x_1, y_1, z_1), \dots, (x_n, y_n, z_n)$ とする。
2. 之等の標本を x_i について大きい順序に並べかえる。
3. 2の順序に基いて $\sum(x_i - x_j), \sum(y_i - y_j), \sum(z_i - z_j)$ を二変数の場合の 27 式の要領で計算する。
4. 次に之等の標本を y_i について大きい順序に並べかえる。
5. 4の順序に基いて $\sum(x_i' - x_j'), \sum(y_i' - y_j'), \sum(z_i' - z_j')$ を計算する。
6. 次の連立方程式を解いて β, γ の推定値の b, c を求める。

$$b \cdot \sum(x_i - x_j) + c \cdot \sum(y_i - y_j) = \sum(z_i - z_j)$$

$$b \cdot \sum(x_i' - x_j') + c \cdot \sum(y_i' - y_j') = \sum(z_i' - z_j')$$

7. α の推定値 a は次の式から計算する。

$$a = \bar{z} - b\bar{x} - c\bar{y}$$

III. 解析航空三角測量における誤差曲面の回帰問題

平面回帰の問題は更に n 次元線型回帰の問題に拡張出来る。然し航空三角測量の誤差曲面は 2 次の項を含んでいるから無条件には拡張出来ない。幸い解析航空三角測量に於ては 2 次の項の影響度は極めて小さいから 1 次の項同様正規分布に随うものと見なして差支えなさそうである。そうすると n 次元線型回帰の問題として取扱うことが出来る(この仮定については最小自乗法の場合も群別の場合も全く同じである)。演算方式は 3 次元の場合をその儘拡張すればよいから省略する。

M 地区の作業に於て第三表の様なデータを得たので之に次の様な誤差曲面を適合した。但し X, Y は機極座標 ΔX は測地座標とする。

$$\Delta X = A + BX + CY + DX^2 + EXY$$

イ. 小論の方法

$$A = -12.232 \quad B = 4.307675996$$

$$C = 0.443979117 \quad D = -0.029006526$$

$$E = 0.028877798$$

ロ. 最小自乗法

$$A = -11.533 \quad B = 4.111038490$$

$$C = 0.218516138 \quad D = -0.018706906$$

$$E = 0.050460071.$$

結果的にみて線型回帰の場合と同様適合後の残差の平方和は最小自乗法が小さいが絶対値の和は小論の方が小さい。然し何れにせよ大した差異は認められない。

計算量に於ては問題にならぬ程小論の方が小さい。

あとがき 小論中の二三の計算例にも分る様に曲面適合後の残差は平方和に於て最小自乗法が優れているが絶対値の和に於ては小論の方が優っている。随って

[P. 47 へつづく]

第 3 表

点 区 分	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ΔX	0	3.74	0.27	6.23	18.52	29.24	36.07	40.53	50.55	49.04
X	2.768	3.777	2.830	4.290	7.868	10.176	12.379	13.206	16.130	16.155
Y	1.254	0.036	-0.126	1.380	-1.055	0.860	-0.757	0.997	0.882	-0.981

第 4 表

点 区 分	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	絶対値 の 和	絶対値の 平方和
小 論	0.13	-0.10	-0.61	0.27	0.64	-0.01	-0.03	-0.11	-0.04	-0.14	2.08	0.91
最小自乗法	0.10	0	-0.36	0.13	0.48	-0.25	-0.22	-0.25	0.27	-0.03	2.12	0.63