解析空中三角測量の閉合差の統計的検討

秋山 実*
尾崎 幸男*
中島 一雄*

A Statistical Study on the Closing Error of the Analytical Aerial Triangulation

by Minoru Akiyama*, Yukio Ozaki*
and Kazuo Nakajima*

Abstract: Various kinds of analytical aerial triangulation procedures have been developed and used in practical routine works, which are different each other in their details such as the configuration and numbers of pass points in a model.

As a step to the trial of standardization of them, a statistical study on the difference of the error distribution for the residual y -parallax P 's, and the closing error V which are computed from P 's with the equation (2-3), was tried.

7 projects by 4 different agencies, including GSI, are selected for comparison, and the distribution pattern of P 's shows rather normal pattern similar to the normal distribution, but V -distribution shows a considerable anomaly from the normal distribution.

To ascertain these results, kai-square test for P 's and V , and computation of the correlation coefficients among the residual P 's for each 6 pass points, have been carried out.

The results of kai-square test for P 's have shown no significant deviations from the normal distribution, and also shown rather weak correlation between them except several cases, where the relative orientation is computed using only 6 pass points.

On the other hand, the results for V showed a big values of kai-square for almost all cases, and it seems to be reasonable to conclude the non-normal distribution pattern for V .

It looks like as partly having a distribution pattern of $\sin ax/x$, which might cause from the interference effect of granularity of sensitive emulsion on the film, functioning as a low pass filter for the two dimensional spacial frequency of the photo image. Further study shall be made clear the cause of these irregular distributions.

1. はじめに

現在、解析法による空中三角測量は、写真測量の一つの重要な部門として、広く行なわれているが、その観測法、計算法は、必ずしも全て同じではなく、各社ごとに独自の方法で行なわれている。そこで、標準的な観測法や、計算法の、統一された基準様式を見出すことは、早急な課題の一つであると考えられるが、この度まずその手初めとして、現在行なわれている解析空中三角測量の精度について、明らかにしたいと思い、以下のような統計的な試みを行なった。

今回の作業では、精度をチェックする目安として、閉合差 V を考えることにした。この量は、6個のパスポイントでの残存従視差 P_i の一次式によって定義されるので、その分布は P_i の分布とも関係づけられるはずである。又 V の分布の分散を検討することによって、観測精度の限界等も明きらかにできるかも知れないと考えた。

そこで過去、数個の作業機関でなされた空中三角測量の実作業の成果を用いて、 V の統計をとってみた。

すると、この統計処理の過程で、 V の分布が、ある特徴をもつことが見出された。 V は一般に縦視差 $P_1 \sim P_6$ の一次式で定義されるので、データの数が多くなれば、確率論の中央極限定理により、正規分布に近づく

* 国土地理院 Geographical Survey Institute
「写真測量とリモートセンシング」Vol. 14 No. 1, 1975

であろうと期待されるが、実際に分布を調べてみると、個々の P_i が、かなりよい正規分布を示すにもかかわらず、 V は正規分布とはみなせない特徴を示した。

この報告では、この分布の特徴と、その原因についての若干の考察を行なう。

なお、この報告の一部は筆者等のうちの一人により、昭和49年5月17日、日本写真測量学会の特別講演で、報告されたものである。

2. 閉合差

ここで閉合差 V について一言しておこう。今2枚の写真が完全に相互標定できていたとして、ここから一方のカメラの5個の各標定要素 ($k, \varphi, \omega, by, bz$) を微量動かした時の、点 (X, Y) での縦視差の量は、よく知られているように次の式で示される。

$$P_v(X_2, Y_2) = X_2 K + \frac{X_2 \cdot Y_2}{f} \varphi + f \left(1 + \frac{Y_2^2}{f^2} \right) \omega + \frac{Y_2(X_1 - Y_2)}{f} bz + (X_1 - X_2) by \quad (2-1)$$

このため、よく知られているように、同一の水平面上にある6点 $\{(0, 0), (a, 0), (0, b), (a, b), (0, -b), (a, -b)\}$ での視差 $\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$ は相互に独立ではなく、その間には

$$2P_1 - 2P_2 - P_3 + P_4 - P_5 + P_6 = 0 \quad (2-2)$$

という閉合条件が成り立つ。

ここで、閉合差として

$$V = 2P_1 - 2P_2 - P_3 + P_4 - P_5 + P_6 \quad (2-3)$$

を考えると、(2-2) 式のように、この V は理論的には0になるべき量であるが、観測誤差等のため、必ず

Fig 2

Table 2-1 Coefficients of closing condition Equation

Coef. Model	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
Standard Model	2.00	-2.00	-1.00	1.00	-1.00	1.00
(a)	1.97	-1.97	-0.65	0.65	-1.31	1.31
(b)	1.41	-1.41	-1.41	1.41	-1.41	1.41
(c)	1.00	-1.00	-1.00	2.00	-2.00	1.00

しも0とはならない。しかもこの V は、相互標定の各標定要素を変化させても、変わらない量なので、相互標定の多少の誤差には影響を受けず、観測精度を検討するには、有効である。

この場合、この6点は、もちろん空中三角測量におけるパスポイントを想定している訳であるが、上記のような理想的な配置以外では、(2-3) 式とは係数の値が異ってくる。すなわち一般には、パスポイントの配列位置により、

$$V = \sum_{i=1}^6 a_i P_i \quad (2-4)$$

となる。その例として Fig. 2-a~Fig. 2-c のようなパスポイントの配置に対する係数の値を、Table 2-1 に示す。ただし (2-3) 式との比較がしやすいように

$$\sum_{i=1}^6 a_i^2 = 12 \quad (2-5)$$

となるように係数の値を正規化してある。

このように (2-4) 式の係数は、パスポイントの配置によって変化するが、配置があまり大きく相異しない場合には、それ程大きな変化はない。以下で取扱う各作業機関の実例では、閉合差 V を求めるのに、パスポイントの配置如何にかかわらず、(2-3) 式を用いているものと、厳密な (2-4) 式を適用しているものとがあったが、一応その差は無視することとして、それぞれ、もとのままの値を採用した。

3. 使用したデータとその処理

ここで、 V のチェックに使用したデータは、Table 3-1 に示すような GSI および、民間会社8社による合計9機関で行った解析空中三角測量の計7地区の実作業 (主として国土基本図作業の成果) 838 モデルである。

このうち、No. 8 の七尾地区を例にとり、各モデルについての各点の残存縦視差 P_i 、および閉合差 V の分布を示したのが Fig. 3-1 および Fig. 3-2 で、他の作業機関や他の地区のものも、ほとんどこれと同様な傾向をしめした。

Fig. 3-3 および Fig. 3-4 は、これらの地区の結果を集計したものである。ただし、 P_i は個数も多いので一部分のみをとった。

Table 3-1 Project Data Description

Agency		Distnict	No. of Models
1	GSI	Fukushima	58
2	GSI	Kawaji	168
3	GSI	Tsuruga	114
4	A	Sawara	57
5	B	Karita	23
6	C	Inuyama	50
7	D	Tsu	25
8	B	Nanao	90
9	D	Hiratsuka	53
10	E	Oga	32
11	F	Kamikita	33
12	F	Sarobetsu	31
13	G	Maesawa	28
14	H	Matsuyama	23
15	B	Shonai	44
16	GSI	Nagano	9
Total		9	838

これらの図からも明らかなように、 P_i の分布は比較的正規分布に近いが、 V の分布は異様な変動をしめす。

元来 V は、(2-4)式によって6個の P_i から合成されたものであり、確率論における中央極限定理によれば、たとえ、 P_i が正規分布に従わなくても、 V の方がむしろ正規分布に近づくことが期待されるにもかかわらず、現実には、逆に V の方が正規分布から外れているように見える。

そこで、これを確かめるために χ^2 による P_i および V の正規分布への適合度の検定を行った。

P_i については、Fig. 3-1 の348個のデータについて検定を行った。

その結果は、

階級の幅	自由度	χ^2
2μ	18	25.686
4μ	4	7.501

これらは、いずれも有意水準0.10で適合が良となる。

また V は、特定の周期性をしめすようにも見られるので V の階級の幅を種々に

Fig. 3-1 P 's distribution for area No. 8

Fig. 3-2 V -distribution for area No. 8

Fig. 3-3 P 's distribution area all date

Fig. 3-4 V -distribution with all date

Fig. 3-5 Limiting value of x^2

変えて検定を行った。

Fig. 3-5 は Fig. 3-4 の 877 モデルについて検定を行った結果で、実線が観測値、破線の上が有意水準 0.01 に対応する x^2 の値、下が有意水準 0.05 に対応する x^2 の値である。

さらにこれを確かめるため、全体をふつうのグループに分けた場合と、全部をまとめた場合について、階級の幅を種々に変えて検定した結果を Table 3-2 に示す (No. 7 の 26 モデルは全体には 2 度数えているので、3 グループの合計数より 26 多い)。

これを見ると、ほとんどの場合 x^2 の値は大きく、適合は不良とみなされるが階級幅 $20\mu \sim 30\mu$ の付近では比較的小さくなっていることに気がつく。

モデル数 338 個では、ほとんどの場合適合が良となっているが、最小の階級幅において適合不良となっている。しかし全体としては

やはり適合は不良ということになる。

これはもし 20μ 前後の周期的な分布が含まれているとすると、この幅で階級を区切れば分布の周期的な性質が平均化され、あらわれてこないためであろうとも考えられる。

このような見かけ上の周期性をしめす原因の 1 つとして V を構成する P_i が独立ではなく相関をもっているか、あるいは相互に干渉している可能性が考えられる。

そこで、このような P_i の相関性の有無をチェックするため Table 3-1 の最初の 7 地区の結果についてその 6 個のパスポイントの間の相関係数を求めてみた。

それらの結果は Table 3-3 に、各点での残存縦視差の平均値および標準偏差とともにしめしてある。

なお、Table 3-3 の最後の地区は、1 モデルにパスポイントを 10 点以上取っていたので、その内側の 6 点を選んだ場合と、外側の 6 点を選んだ場合との双方について計算してある。

この結果をみると、GSI 以外のものについては相

Table 3-2 Results of Kai-square tests including big errors

Group	No. of Models	Class Interval	Freedom	Value of x^2		
				computed	level 0.01	level 0.05
A	338	5	30	45.557	43.773	50.892
		10	14	18.455	29.141	23.685
		15	8	13.114	20.090	15.507
		20	5	4.450	15.086	11.070
		30	3	1.759	11.341	7.815
		40	1	0.928	6.635	3.841
B	168	5	36	70.624	58.619	50.999
		10	17	49.845	33.409	27.587
		15	10	32.458	23.209	18.307
		20	7	22.898	18.475	14.067
		30	3	17.511	11.341	7.815
		40	2	15.083	9.210	5.991
C	345	5	36	75.559	58.619	50.999
		10	17	42.997	33.409	27.587
		15	10	32.091	23.203	18.307
		20	7	17.109	18.475	14.067
		25	6	16.724	16.812	12.592
		25	5	8.895	15.086	11.070
		30	4	13.247	13.277	9.488
		35	3	5.162	11.341	7.815
Total	877	40	2	9.756	9.210	5.991
		5	36	60.652	58.619	50.999
		10	16	34.564	32.000	26.296
		20	7	12.194	18.475	14.067
		30	3	6.513	11.341	7.815
		40	2	6.700	9.210	5.991

解析空中三角測量の閉合差の統計的検討

Table 3-3 Correlation Coefficient

Area	Agency	No. of Models	Pass Point	Corresponding Pass Point					Algebraic Mean	Stand. Dev.
				1	2	3	4	5		
Fukushima	GSI	58	1						-1.052	2.822
			2	-0.61					-0.569	2.609
			3	-0.51	0.67				-0.155	1.558
			4	0.71	-0.51	-0.39			-0.569	1.876
			5	-0.57	0.49	0.32	-0.57		1.224	1.969
			6	0.57	-0.53	-0.55	0.38	-0.10	0.638	1.609
Kawaji	GSI	30	1						-0.167	1.416
			2	-0.96					0.733	2.842
			3	0.95	-0.95				-0.433	1.635
			4	-0.80	0.83	-0.85			0.633	1.511
			5	0.97	-0.99	0.96	-0.86		-0.367	2.822
			6	-0.97	0.97	-0.98	0.84	-0.98	0.133	1.494
Tsuruga	GSI	30	1						-1.400	1.853
			2	-0.47					1.633	2.332
			3	0.16	-0.24				1.800	2.305
			4	-0.22	0.20	-0.29			0.067	2.297
			5	0.36	-0.65	0.38	-0.40		-0.533	2.336
			6	-0.23	0.37	-0.08	0.04	-0.33	-0.900	1.968
Sawara	A	30	1						-0.167	1.743
			2	-0.33					0.733	2.028
			3	0.14	-0.33				-3.500	2.240
			4	-0.14	0.34	0.06			1.067	2.503
			5	0.13	-0.37	0.37	-0.10		-1.267	2.809
			6	-0.13	0.32	0.07	0.23	0.10	1.800	2.324
Karita	B	23	1						0.609	1.884
			2	-0.07					-1.217	1.508
			3	-0.28	0.34				-0.565	1.549
			4	-0.36	0.07	-0.50			0.261	1.830
			5	-0.30	0.69	0.42	0.03		0.348	1.642
			6	-0.08	-0.54	-0.31	0.11	-0.54	0.043	1.595
Inuyama	C	50	1						-0.540	3.075
			2	-0.30					-1.460	2.908
			3	-0.28	0.34				-1.680	2.035
			4	0.11	0.06	-0.37			-0.700	1.966
			5	0.16	0.24	0.44	-0.26		-1.440	1.813
			6	0.23	0.01	-0.22	0.01	-0.22	-1.880	2.033
Tsu (Outside Points)	D	26	1						-4.692	2.660
			2	-0.24					0.577	3.046
			3	0.15	-0.06				3.077	2.748
			4	-0.22	-0.19	-0.18			4.003	2.597
			5	0.10	-0.33	0.07	-0.15		-2.692	3.076
			6	-0.01	0.32	-0.61	-0.01	0.10	-0.385	2.529
Tsu (Inside Points)	D	26	1						5.577	3.474
			2	-0.52					0.577	3.046
			3	-0.02	0.00				-6.731	4.015
			4	-0.12	0.31	0.16			-2.077	2.904
			5	0.06	-0.33	-0.28	-0.19		-2.654	3.050
			6	0.55	-0.11	-0.17	0.32	-0.15	4.692	3.563

Table 3-4 Results of Kai-square tests omitting big errors

Group	No. of Models	Class Interval	Freedom	Value of χ^2		
				computed	level 0.01	level 0.05
A	338	5	25	35.994	44.314	37.652
		10	11	14.449	24.725	19.675
		15	6	12.337	16.812	12.592
		20	4	3.422	13.277	9.488
		30	2	1.348	9.210	5.991
B	168	5	25	46.877	44.314	37.652
		10	11	28.188	24.725	19.675
		15	6	21.808	16.812	12.592
		20	4	14.348	13.277	9.488
		30	2	4.468	9.210	5.991
C	345	5	25	50.716	44.314	37.652
		10	11	21.624	24.725	19.675
		15	6	18.078	16.812	12.592
		20	4	7.260	13.277	9.488
		30	2	0.513	9.210	5.991
Total	877	5	25	44.098	44.314	37.652
		10	11	22.818	24.725	19.675
		15	6	14.436	16.812	12.592
		20	4	7.236	13.277	9.488
		30	2	1.149	9.210	5.991

関係数は小さく、相関があるとは認め難い。

なお、GSI の場合はパスポイントを6点しかとらないモデルが多かったが、6点の場合には、それらの P_i の間には (2-4) 式のような関係が成立しているので、これを最小自乗法によって各点に誤差配布をした場合、Table 3-3 のような相関をしめすのは、むしろ当然であると考えられる。

したがって、一般的には Table 3-3 の結果により P_i の間の相関が弱いことが確かめられたといえよう。

次に、この V の値の極値は P_i の値から予想すれば P_i の極値の $\sqrt{12}$ 倍程度のはずであるが、それよりはあるに大きい値をしめす場合が多い。

そこで、Table 3-2 と同じグループに対し $|V| \leq 70\mu$ の値のみを採用して χ^2 検定した結果を Table 3-4 にしめす。

これを、Table 3-2 と比較すると、 X^2 の値がいくぶん小さくなり、適合が多少良くなっていることに気付く。

たとえば 877 モデルのデータを集めたモデルの場合 Table 3-2 では有意水準 0.01 とすれば階級幅 5μ 、 10μ で不良であったものが、Table 3-4 では有意水準 0.01 で、これらが適合良に変じている。

しかし、これらのデータからだけでは、適合不良の原因を $|V| > 70\mu$ の度数が大きいことだけに求めることはできず、1つの要素であるとみなせるにすぎない。

い。

4. 二、三の考察

以上のデータだけからでは、まだ何等かの、結論めいたものを出すことは、性急に過ぎるであろう。しかし、正規分布からの、かなり特異なずれも見られるので、今後の問題となるような点と、それについての考察を、以下にまとめてみる。

- i) P_i の分布は、ほぼ正規分布に従っている。
- ii) P_i の相互間の相関は、きわめて小さいと見なすことができる。
- iii) それにもかかわらず、 P_i から合成された V は、正規分布を示すとはいいがたく、一種の見かけの周期性のような、ずれが見られる。
- iv) もしこの周期性が、実在するとすれば、その周期は、およそ 20μ 程度であろう。
- v) V の極値は、 P_i の極値から確率論的に予想される極値よりも大きい。

i), ii) の事実から、このような偏りの原因があったとしても、それは、個々の縦視差の分布に影響を与えないものであることがわかる。

すなわち、その原因は V だけに影響をおよぼす事柄に、求められねばならない。

iii), iv) のような、見かけの周期性の原因としては、測標の直径が有限なための干渉作用、感光剤の粒

状性、各パスポイントでの観測値の相関等が考えられるが、はっきりしない。またこれから、空中三角測量の精度としては、単にVの分布の標準偏差の大小を考えるだけでは十分でないことが想像できる。

Fig. 3-2 あるいは **Fig. 3-4** のような分布は正規分布に $\sin ax/x$ という分布を重ね合わせたものに多少似ている。このような分布を $f(x)$ とし、そのフーリエ変換 $g(y)$ を求めて見ると

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} \frac{\sin ax}{x} dx$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\pi/2} & |y| < a \\ 0 & |y| > a \end{cases} \quad (4-1)$$

となる。そして階級幅を 20μ とすると

$$a \doteq 1/3(\mu^{-1}) \quad (4-2)$$

となる。つまり乳剤の粒状性のため、周波数 $1/3(\mu^{-1})$ 以上の高周波がカットされ、それ以下の周波数だけが眼の網膜から視神経に変換されて伝達されているようにも見える。

またV)の原因としては、カメラの distortion、フィルム の 圧着不良、ポジの部分伸縮等、写真そのもの

に原因がある場合、またパスポイントの選点が不適当で、観測精度の特に低下した場合や、パスポイントの位置関係から、Vを計算する一次式の係数として、(2-3)式を用いるのが不適当な場合等が、考えられるが、これもはっきりしない。

いずれにしても、原因の探究は今後の課題として残し、今回は解析結果の報告だけにとめておく。

なお、このような現象が、C8やA7を使った、機械法による空中三角測量の場合に、報告された例はないようであるが、これには次の3つの場合が、考えられる。

- i) 同じような現象は生じているが、上記のような、読み解析がされていないか、少数のサンプルについてしか解析されていないだったので、気付かれなかった。
- ii) 同じような現象はあったが、観測精度が低いため、分離されなかった。
- iii) これは解析法だけに特有の現象で、機械法の場合は、生じていない。

このうちでも、ii)よりは、むしろi)、あるいはiii)の方が、可能性が大きいとも思われるが、これについての議論も、他日にゆずりたい。