バンドル法による空中三角測量の精度に関する研究

A Study on Accuracy of Aerial Triangulation by Bundle Adjustment

村井 俊治*, 鈴木 真**
Shunji Murai and Makoto Suzuki

Abstract: Bundle adjustment has been evaluated as the best methodology in aerial triangulation from the theoretical point of view. Research works on bundle adjustment have been done mainly in Europe and America, though research and development on bundle adjustment has not been done but strongly requested in Japan.

Fortunately Murai Laboratory, Institute of Industrial Science, University of Tokyo has succeeded in developing a computer program on bundle adjustment in cooperation with Teikoku Survey Co., Ltd. In this paper the results obtained from the experiments will be presented.

The experiments involve the comparisons of accuracy between conventional polynomials method and bundle adjustment for 23 photographs of three courses.

Comparative study was done between the three cases with respect to number of control points and between without self calibration and with self calibration.

From the results of the study, it was made clear that bundle adjustment always gave the better accuracy even in the case of less number of control points as compared with conventional polynomials.

和文梗概：バンドル法は、空中三角測量の調整法として理論上もっともすぐれた方法として欧米においていくつかの試験研究が進められている。わが国においてはバンドル法は未開発であり、早急に研究に着手することが要請されていた。幸いに東京大学生産技術研究所村井研究室は帝国測量株式会社と共にバンドル法のプログラム開発を行い、実モデルで実験を行ったのでここに発表する次第である。

実験には3コース合計23枚の写真を用いて行われ、多項式法とバンドル法の精度の相違を比較検討した。バンドル法については、基準点を多く使用した場合とそうでない場合について、さらにセルフキャリブレーションをした場合とそうでない場合についてそれぞれ比較検討を行った。実験の結果によると、多項式にくらべてバンドル法はいずれの場合についても精度が向上することがわかった。また基準点の点数を減少させても十分精度を保てることもわかった。

1. バンドル法の原理と特長

バンドル法は、写真の像と投影中心と対象物を結ぶ光束（バンドルとよぶ）を単位とする空中三角測量法の調整方法の一つである。従来用いられてきた多項式法および独立モデル法に比べ、理論上はもっとも秀れ

た方法と考えられてきた^{1),2),3)}。

バンドル法においては次の式で与えられる共線条件式が観測方程式を与える⁴⁾。

$$\left. \begin{aligned} x &= -f \frac{a_{11}(X-X_0) + a_{12}(Y-Y_0)}{a_{31}(X-X_0) + a_{32}(Y-Y_0)} + \frac{a_{13}(Z-Z_0)}{a_{33}(Z-Z_0)} + \Delta x \\ y &= -f \frac{a_{21}(X-X_0) + a_{22}(Y-Y_0)}{a_{31}(X-X_0) + a_{32}(Y-Y_0)} + \frac{a_{23}(Z-Z_0)}{a_{33}(Z-Z_0)} + \Delta y \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

* 東京大学生産技術研究所

** 帝国測量株式会社

「写真測量とリモートセンシング」vol. 21, No. 2,
1982

ここで、

(x, y) : 写真座標

(X, Y, Z) : 対象物の地上座標

f : 画面距離

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & -\sin \omega \\ 0 & \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \kappa & -\sin \kappa & 0 \\ \sin \kappa & \cos \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$(\omega, \varphi, \kappa)$: X 軸, Y 軸, Z 軸のまわりの回転角

$(\Delta x, \Delta y)$: 次の式で与えられる補正量

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= x_0 - \bar{x} (k_1 r^2 + k_2 r^4) - (p_1 \bar{x} \\ &\quad + p_2 \bar{y} + p_3 \bar{x} \bar{y} + p_4 \bar{y}^2) \\ \Delta y &= y_0 - \bar{y} (k_1 r^2 + k_2 r^4) - (p_5 \bar{x} \bar{y} \\ &\quad + p_6 \bar{x}^2) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(x_0, y_0) : 主点位置のずれ

$(\bar{x}, \bar{y})$: 主点を原点とする写真座標

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= x - x_0, \bar{y} = y - y_0 \\ r^2 &= \bar{x}^2 + \bar{y}^2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

k_1, k_2 : レンズ歪を表わす関数の係数

$p_1 \sim p_6$: フィルムわん曲を表わす関係の係数

本研究では(3)式において示した内部標定要素をセルフキャリブレーションする事にしたが、研究者によっては、さらに複雑で多数の要素を導入している。しかし、本研究では、最低限必要な要素のみを取り上げた。

(1)において f が与えられるものとし、 Δx および Δy が既知と見なして行うバンドル法は、セルフキャリブレーションなしの方法であり、この場合の未知数は写真毎の投影中心 (X_0, Y_0, Z_0) と三軸の傾き $(\omega, \varphi, \kappa)$ および基準点以上のパスポイントおよびタイポイントの地上座標 (X, Y, Z) である。

f および(1)式の $\Delta x, \Delta y$ の主点位置のずれ x_0, y_0 , レンズ歪係数 k_1, k_2 , フィルムわん曲係数 $p_1 \sim p_6$ を未知変量として扱うバンドル法はセルフキャリブレーション付きの方法とよばれる。

バンドル法は次に示す特長を有している。

(1) 高い調整能力を有する。

隣接モデルを結ぶパスポイントおよび隣接コースを結ぶタイポイントにおいて良い結合性を示す。反面欠点として、観測値に誤差があっても全体として吸収して調整してしまう。

(2) 基準点の数を減少させることができる。

特に位置に関する基準点の数は全部で4隅に1点ずつあれば良い。高さに関する基準点は減少させると基準点の残差が少なくなるが、他の参照点における誤差が大きくなるので極端に減少させる方がよい。

(3) 解くのに大きい記憶容量が必要である。

未知数が、外部標定要素に対して $6 \times$ 写真枚数、地上座標に対して $3 \times 3 \times$ 写真枚数(1枚についてパスポイント3点とした場合)と大きくなる。解く過程で消去しても最終的には $6 \times$ 写真枚数の連立方程式を解かなければならない。

d 写真縮尺 $1/11,000$

e 基準点 (図1参照) 対空標識あり

三角点 : 10点 (三角点とは平面および高さに関する基準点をいう)

水準点 : 7点 (水準点とは高さに関する基準点をいう)

f パスポイント

パスポイント : 写真1枚につき地上測点で3点, 写真上で9点

タイポイント : 13点 (従来の多項式法と比較するため設置した)

参照点 : 12点 (較差を検査するためのパスポイント)

g 座標測定 : ツァイスイエナ社ステコメータ (最小読取 $1 \mu\text{m}$)

h 測定点

写真上の観測点数 (光線数) : 294本

地上の測点 (バンドルが交会する点)

: 106点

3. バンドル法による空中三角測量の実験

2.1 実験の目的

実作業で用いられたモデルにバンドル法を適用することにより、従来用いられてきた多項式法と精度の上でどの程度改善されるかをしらべる。また基準点の数を減少させた場合の精度の変化もしらべる。さらにセルフキャリブレーション付きのバンドル法の精度についても比較検討を行う。

2.2 実験に用いられたモデル

実験に用いられたモデルは次のとおりである。

図1 ケース1およびケース2の基準点配置
(三角点10点, 水準点9点, タイポイント13点)

図3 ケース4の基準点配置
三角点4点, 水準点15点, タイポイント13点

図2 ケース3の基準点配置
三角点4点, 水準点6点, タイポイント13点

図4 基準点および参照点の配置

d カメラ：RC-10, UAG I-6067, $f=151.66$
ミリ

b コース数および写真枚数 (図1 参照)

コース1：写真枚数8枚

コース2：写真枚数8枚 合計23枚

コース3：写真枚数7枚

c 撮影高度：H=1,650 m

2.3 比較検討のケース

次に示す7つのケースが比較検討された。(図2, 3, 4参照)

ケース1：多項式法 (基準点全点使用；三角点10点, 水準点7点)

ケース2-1；バンドル法 (基準点全点使用)

ケース2-2；セルフキャリブレーション付バンドル法 (基準点全点使用)

ル法 (基準点全点使用)

ケース3-1；バンドル法 (三角点4点, 水準点6点)

ケース3-2；セルフキャリブレーション付バンドル法 (三角点4点, 水準点6点)

ケース4-1；バンドル法 (三角点4点, 水準点15点)

ケース4-2；セルフキャリブレーション付バンドル法 (三角点4点, 水準点15点)

ここで単にバンドル法とかいてあるのはセルフキャリブレーションなしのバンドル法をいう。

2.4 比較検討する精度

次に示す精度に関する事項が比較検討された。

(1) 基準点における位置および高さの平均二乗誤差

表1 基準点の精度

ケース	三角点	水準点	δ_S (m)	max ΔS	δ_H (m)	max ΔH	CPU時間(秒)
1 多項式法	10	9	0.13	0.31	0.19	0.46	不明
2-1 バンドル無	10	9	0.04	0.10	0.14	-0.23	39.6
2-2 バンドル付	10	9	0.04	0.09	0.10	-0.20	65.5
3-1 バンドル無	4	6	0.03	0.06	0.07	-0.15	40.1
3-2 バンドル付	4	6	0.02	0.05	0.05	-0.10	64.4
4-1 バンドル無	4	15	0.03	0.06	0.11	-0.25	40.1
4-2 バンドル付	4	15	0.03	0.05	0.09	-0.19	64.9

(注) バンドル無：セルキャリブレーションなしバンドル法
バンドル付：セルキャリブレーション付きバンドル法

表2 タイポインットの較差

ケース	三角点	水準点	δ_S	max ΔS	δ_H	max ΔH
1 多項式法	10	9	0.083	0.220	0.26	0.58
2-1 バンドル無	10	9	0.041	0.100	—	—
2-2 バンドル付	10	9	0.039	0.085	—	—
3-1 バンドル無	4	6	0.037	0.083	—	—
3-2 バンドル付	4	6	0.033	0.073	—	—
4-1 バンドル無	4	15	0.037	0.083	—	—
4-2 バンドル付	4	15	0.033	0.073	—	—

表3 参照点における較差

	三角点	水準点	δ_S	max ΔS	δ_H	max ΔH
1 多項式法	10	9	0.17	0.50	0.18	0.30
2-1 バンドル無	10	9	0.14	0.29	0.09	0.16
2-2 バンドル付	10	9	—	—	—	—
3-1 バンドル無	4	6	0.10	0.26	0.19	-0.43
3-2 バンドル付	4	6	0.13	0.28	0.11	-0.26
4-1 バンドル無	4	15	0.11	0.28	0.13	0.21
4-2 バンドル付	4	15	0.14	0.32	0.09	0.13

※2-2 バンドル付の成果との較差

表4 使用しなかった基準点の誤差

ケース	未使用三角点	未使用水準点	δ_S (m)	δ_H (m)
3-1 バンドル無	6	9	0.16	0.18
3-2 バンドル付	6	9	0.16	0.24
4-1 バンドル無	6	0	0.14	—
4-2 バンドル付	6	0	0.14	—

表5 測点のまわりのバンドルの交会残差

ケース	三角点	水準点	δ_X (m)	δ_Y (m)
2-1 バンドル無	10	9	0.013	0.025
2-2 バンドル付	10	9	0.012	0.024
3-1 バンドル無	4	6	0.011	0.023
3-2 バンドル付	4	6	0.010	0.023
4-1 バンドル無	4	15	0.012	0.024
4-2 バンドル付	4	15	0.010	0.023

- (2) タイポイントの較差（13点の平均二乗誤差）
- (3) 参照点の較差
- (4) バンドルの交会残差

2.5 実験の結果

- (1) 基準点における位置および高さの平均二乗誤差
最大値および計算時間は、表1に示すとおりである。多項式法に比較してバンドル法の方が精度が向上していることがわかる。基準点を減少させた場合であっても、多項式法の精度より良い。セルフキャリブレーション付のバンドル法はわずかながら精度が良くなる。

セルフキャリブレーションなしのバンドル法とセルフキャリブレーション付きのバンドル法の計算時間の比較は表1に示すとおりである。残念ながら多項式法の結果は異なる計算機によって求めたので比較しなかった。表1の時間は、FACOM M160-AD（記憶容量2メガバイト）を使用したものである。セルフキャリブレーション付の方が約1.5倍の時間を要する。

- (2) タイポイントにおける較差は表2に示すとおりである。多項式法におけるタイポイントの較差はここでバンドル法と同じ尺度にするためコース間の較差の $\frac{1}{2}$ を示してあるが、バンドル法によるタイポイントの較差とは、隣接コースおよび隣接モデルから集まる4本または6本のバンドルの交差点からの平均二乗距離をいうことにする。多項式法に比べて、バンドル法の方が較差が小さいことがわかる。セルフキャリブレーションの方がわずかに良くなる。
- (3) 参照点の較差は表3および表4のとおりである。表3は、誤差が比較的大きく出やすい周辺部に選ばれた12点の参照点の較差の平均を示したものである。セルフキャリブレーションの方法は、位置の精度はわずかに悪くなり、高さの精度は非常に良くなる。表4は、基準点を減少させたケース3-1、3-2、4-1、4-2において、使用しなかった基準点における計算値と観測値との較差を示したものである。使用しなかった基準点較差点における残差より位置で約4倍、高さで約2倍の大きさとなる。ケース4-1および4-2で水準点の数を増すと、高さの較差は、水準点の数を減少させたケース3-1および3-2に比べて高

さの較差が約40%減少し、水準点の数を増加した効果が認められる。

- (4) 表5はバンドル法において決定された点と複数本のバンドルの交会残差の平均二乗誤差を示す。セルフキャリブレーション付きのバンドル法の方が交会残差が小さくなる。この表は写真相互の結合状況を示しており、拘束条件が少ない程、すなわち基準点数が少ない程、バンドルの交会残差が少し良くなる。なおXは飛行方向であり、Yは直角方向である。 δ_X が δ_Y の約半分なのは、交会角度がX方向の場合大きいので、交会精度が良くなるためである。

3. 実験結果に対する考察

表1～表5に示した実験結果から次の事が指摘できる。

- (1) バンドル法は多項法に比べて基準点の数が同じ場合も減少させた場合も精度が良かった。このことから、多項式法と同等の精度を得る条件を許容すれば、基準点の数をかなり減少させることができる。
- (2) セルフキャリブレーション付きのバンドル法は、本実験に使用された小規模の写真枚数では精度向上は認められるが計算時間が増加した程度ではなかった。また今回使用した航測カメラが最新型のものであり、レンズ歪等の影響が少なかったためと考えられる。今後、セルフキャリブレーション付のバンドル法を採用する判断に関する研究を進めるべきである。
- (3) 基準点の残差のみを用いた精度の検討により、方法論の良否を言及すべきではない。これは、参照点の較差および使用しなかった基準点の較差の挙動を見れば指摘できる。たとえば、基準点の数を最も減少させたときの基準点の精度が一番良く出ているが、参照点および使用しなかった基準点の較差、特に高さの較差が他のケースより大きかった。
- (4) 高さの基準を与える水準点の数は極端に減少させるべきではないと考えられる。今後さらに水準点の数と高さの精度に関する研究を続ける必要がある。
- (5) バンドルのみでなく、一般に空中三角測量に用

いられる基準点の地上測量精度は従来ややもすると比較的低い基準でよいと考えられてきた。しかし、今後調整方法の発達によって基準点の数が減少してゆくことを考えると、地上測量の精度は十分高くしておくことが不可欠である。今回の実験では、十分信頼のおける地上測量が行われた地域を選んだので、精度に関する比較ができたが、地上測量の精度が低いと精度に関する評価あるいは検査が困難であると考えられる。

本研究で行った実験地区における基準点の精度

は平面位置で約± 5 cm、高さで約± 5 cmであった。

参 考 文 献

- 1) 解析写真測量学講座⑨ 第8章ブロック調整, 写真測量とリモートセンシング 特集号Ⅱ, '81
- 2) D. C. Brown: The Bundle Adjustment-Progress and Prospect Invited Paper to ISP, Com. III, 1976
- 3) 矢口彰: 解析写真測量の最近の動向, 解析写真測量講習会コース81/1テキスト, 昭和56年10月
- 4) 村井俊治, 奥田勉, 中村秀至: 非測定カメラを用いた解析の写真測量に関する研究, 東京大学生産技術研究所報告, Vol. 29, No. 6 (No. 191), 1981

日本写真測量学会発行図書案内

当学会では実費にて下記の図書をおわけいたしております。御希望の方は学会事務局までお申込下さい。(送料は別にいただきます。)

昭和50年度年次学術講演会発表論文集

B 5 版 72頁 論文26篇 500円

昭和50年度秋季学術講演会発表論文集

B 5 版 47頁 論文12篇 400円

昭和51年度年次学術講演会発表論文集

B 5 版 105頁 論文30篇 500円

昭和51年度夏季講習会テキスト

B 5 版 66頁 演題 5 篇 500円

昭和51年度秋季講習会テキスト

B 5 版 43頁 演題 4 篇 500円

昭和51年度秋季学術講演会発表論文集

B 5 版 64頁 論文14篇 500円

昭和52年度年次学術講演会発表論文集

B 5 版 142頁 論文34篇 1,000円

昭和52年度夏季講習会テキスト

B 5 版 48頁 演題 5 篇 500円

昭和52年度秋季学術講演会発表論文集

B 5 版 48頁 論文13篇 1,000円

昭和53年度年次学術講演会発表論文集

B 5 版 166頁 論文39篇 1,000円

昭和53年度秋季学術講演会発表論文集

B 5 版 132頁 論文30篇 1,000円

昭和54年度年次学術講演会発表論文集

B 5 版 118頁 論文31篇 1,000円

昭和54年度夏季講習会テキスト

B 5 版 30頁 演題 7 篇 500円

昭和54年度秋季学術講演会発表論文集

B 5 版 112頁 論文31篇 2,000円

昭和55年度年次学術講演会論文集

B 5 版 162頁 論文32篇 2,000円

昭和55年度秋季学術講演会論文集

B 5 版 152頁 論文39篇 2,000円

昭和56年度年次学術講演会論文集

B 5 版 156頁 論文38篇 2,500円

昭和56年度秋季学術講演会論文集

B 5 版 144頁 論文35篇 2,500円