A Calibration Method in Non-topographic Photogrammetry

服部 進*

Susumu Hattori

Abstract: In non-topographic photogrammetry using analytical plotters, it is not always the best choice to calibrate cameras in a usual way, in which the projective relation from photographic coordinates to object space coordinates is determined by a collinearity equation with unknown interior and exterior orientation parameters. For in analytical plotters any projective relations are reproduced by computation without a geometrical meaning. Especially in the case of non-metric cameras with unknown and unstable interior orientation like amateur ones, the relation can be determined more favorably by the direct linear transformation (the projective transformation). This method was developed by Abdel-Aziz and Karara and now called the DLT method, which is featured by needlessness of fiducial marks. Further the non-topographic calibration problem of cameras with stable or known interior orientation was solved by H. Bopp and H. Krauss. This article explains these methods plainly, starting from the basic way of thinking for readers who are going to develop computer programs for calibration and plotting in non-topographic photogrammetry.

概 要: 解析図化機が普及した現在では、非地形写真測量に非測定用カメラが容易に利用できるようになっている。しかし解析図化機によるキャリブレーションでは、従来のように内部、外部の標定要素を経由して写真座標系と対象空間座標系を対応づけるのは必ずしも得策でない。とくにアマチュアカメラのように内部標定要素が未知でまた不安定な場合には、一般線型変換式（射影変換式）で直接対応関係を決定するのが適している。この方法はDLT法（Direct Linear Transformation）法と呼ばれAbdel-AzizとKararaにより開発された。また内部標定要素が未知であるが安定したカメラのキャリブレーションについては、H. BoppとH. Kraussによって解法が示された。この解説は解析図化機による非地形写真測量のプログラミングを行ってみようとする人のために上記の手法を基礎の考え方から示したものである。

1. はじめに

解析図化機が急速に普及してきたため、測定用カメラ（metric camera）以外のカメラでもキャリブレーションさえすれば図化に使用できるようになった。とくに近接写真測量を中心とする非地形写真測量では、焦点を固定していない非測定用カメラ（non-metric camera）を使用せざるを得ないことが多い。いずれの場合でも、解析図化機を使うときには、従来の手法で標定し内部外部の標定要素を決定するのは必ずしも上策ではない。解析図化機はすべての投影関係を計算機の演算で再現するから、カメラの回転角や画面距離のような物理量は意味を持たないからである。

非測定用カメラのキャリブレーション法として、す

でAbdel-AzizとKarara^{1),2)}によりDLT（Direct Linear Transformation）法が開発され実用化されているが国内ではあまり知られていない。DLT法は対象空間座標系と写真座標系を射影変換式（一般線型変換式と呼んでいる）で直接結びつけるものであり、指標、画面距離を不要とする利点を持っている。

一方測定用カメラについても同様の方法は使用できるが、内部標定要素が既知であるから変換係数の間に拘束を付けないと厳密解は得られない。これについてはH. BoppとH. Krauss³⁾による簡潔な論文がある。

なお上記の2つは単写真ごとにキャリブレーションを実行するが、複数の写真群を一度にキャリブレーションする三角測量（triangulation）も当然考えられる。この場合変換係数に回転や平行移動などの個別の意味がないから、キャリブレーション法としては相互標定を経由しないバンドル調整によることになる⁴⁾。

この解説記事は一般線型変換式によるキャリブレーション法を基礎から説明し、従来のように一旦内部外

* 東京大学生産技術研究所

「写真測量とリモートセンシング」vol. 25, No. 4, 1986

部の標定要素を経由して変換式を求めるのではなく、直接に変換係数を決定する方法を示すものである。ここに解説する手続きは恐らく多くがすでに市販の解析図化機に供与されているプログラムに含まれていることが予想される。しかしそれらの大多数はブラックボックスになっていて利用者には公開されていない。この解説は自らプログラムを開発しようとする人の参考になることを期待している。ページ数の制約からここでは単写真ごとにキャリブレーションする方法のみ示した。(とくに非測定用カメラの)バンドル調整については次の機会に紹介する。

なお解説の内容は日本測量協会主催昭和六十一年度専門技術講習会(写真測量A課程)で著者が行った講義をもとにしていて、参考文献^{1),2),3)}を易しく書き直したものである。

2. キャリブレーションの基本式

2.1 一般線型変換

写真座標と対象空間座標との関係が射影変換(一般線型変換)で近似されることは周知のことである。一般線型変換を考えるとときには、考えている空間より1つ次元の高い空間での対応関係を考えるのが便利である。通常は3次元の対象空間座標系XYZから2次元の写真座標系xyへの変換であるから、その基本式は

$$\begin{aligned} x &= \frac{L_1 X + L_2 Y + L_3 Z + L_4}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1} \\ y &= \frac{L_5 X + L_6 Y + L_7 Z + L_8}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1} \end{aligned} \quad (1)$$

で与えられる。なお2次元平面と写真との対応関係の問題についてはこの解説では省略する。同次座標系

$$x = \frac{u}{t}, \quad y = \frac{v}{t}; \quad X = \frac{U}{T}, \quad Y = \frac{V}{T}, \quad Z = \frac{W}{T}$$

を導入すれば式(1)は

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 & L_4 \\ L_5 & L_6 & L_7 & L_8 \\ L_9 & L_{10} & L_{11} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ T \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ T \end{bmatrix} \quad (2)$$

と同値である。式(1), (2)は適当に同意義で用いることにする。上式でLの(3, 4)要素は0になることはなく、また比のみが重要であるので1においている。式(1), (2)は11ケの変換係数を含んでいる。これらが全て独立であるとすれば、3次元的に配置された6点以上

上の基準点に対して最小2乗法で未知パラメータを決定できる。DLT法はその考え方に立っている。一方、測定用カメラや、キャリブレーションされてはいないがレンズ歪、フィルム歪のない理想的なカメラ(これを「完全カメラ」と呼ぶことにしよう)では未知の変換係数は全部が独立でなく従属関係を持つ。したがって正しい解を導くには、変換係数間にどのような関係があるかを明らかにして、それらの関係を満足するように変換係数の値を決定する必要がある。

まず完全カメラの場合およびそうでない場合の変換係数間の従属性を調べてみよう。

2.2 変換係数の従属性と独立性

レンズ歪、フィルム歪のない完全カメラはピンホールカメラのモデルである。この場合完全カメラの式(1)の11個の変換係数のうち独立なものは9個である。それは通常の共線条件式

$$\begin{aligned} \frac{x - x_p}{c} &= \frac{m_{11}(X - X_0) + m_{12}(Y - Y_0) + m_{13}(Z - Z_0)}{m_{31}(X - X_0) + m_{32}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)} \\ \frac{y - y_p}{c} &= \frac{m_{21}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{23}(Z - Z_0)}{m_{31}(X - X_0) + m_{32}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)} \end{aligned} \quad (3)$$

を書くとき容易に理解できよう。ここで

x_p, y_p ; 主点の写真座標

c ; 画面距離

X_0, Y_0, Z_0 ; 投影中心の対象空間座標

$M = (m_{ij})$; 回転行列

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & -\sin \omega \\ 0 & \sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos k & -\sin k & 0 \\ \sin k & \cos k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ω, φ, k はカメラ軸の回転角

式(3)を式(2)の形に書けば次のようになる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_p \\ 0 & 1 & -y_p \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -X_0 \\ 0 & 1 & 0 & -Y_0 \\ 0 & 0 & 1 & -Z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ T \end{bmatrix} \quad (4)$$

式(4)のパラメータと式(2)の変換係数とは次の関係が成

る。

$$\begin{aligned}
 L &= \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 & L_4 \\ L_5 & L_6 & L_7 & L_8 \\ L_9 & L_{10} & L_{11} & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} c & 0 & -x_p \\ 0 & c & -y_p \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -X_o \\ 0 & 1 & 0 & -Y_o \\ 0 & 0 & 1 & -Z_o \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} cm_{11} - x_p m_{31} & cm_{12} - x_p m_{32} & cm_{13} - x_p m_{33} \\ cm_{21} - y_p m_{31} & cm_{22} - y_p m_{32} & cm_{23} - y_p m_{33} \\ -m_{31} & -m_{32} & -m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (5)
 \end{aligned}$$

$$\alpha = (x_p m_{31} - cm_{11})X_o + (x_p m_{32} - cm_{12})Y_o$$

$$+ (x_p m_{33} - cm_{13})Z_o$$

$$\beta = (y_p m_{31} - cm_{21})X_o + (y_p m_{32} - cm_{22})Y_o$$

$$+ (y_p m_{33} - cm_{23})Z_o$$

$$\lambda = m_{31}X_o + m_{32}Y_o + m_{33}Z_o$$

11ケの L_j は 9 個の未知パラメータと相互関係がある。 L_j からこれらを消去すれば次の 2 つの制約式を得る (付録参照)。

$$\begin{aligned}
 g_1 &= (L_1^2 + L_2^2 + L_3^2) - (L_5^2 + L_6^2 + L_7^2) \\
 &\quad + [(L_5 L_9 + L_6 L_{10} + L_7 L_{11})^2 \\
 &\quad - (L_1 L_9 + L_2 L_{10} + L_3 L_{11})^2] \\
 &\quad \cdot (L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2)^{-1} = 0 \\
 g_2 &= (L_1 L_5 + L_2 L_6 + L_3 L_7) - (L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2)^{-1} \\
 &\quad \cdot (L_1 L_9 + L_2 L_{10} + L_3 L_{11}) \\
 &\quad \cdot (L_5 L_9 + L_6 L_{10} + L_7 L_{11}) = 0 \quad (6)
 \end{aligned}$$

L_j の厳密解を求めるときには式(6)の条件を同時に満たすよう L_j を決定しなければならない。もしカメラが完全カメラでない場合はどうなるだろうか。次の 3 つの場合を調べてみよう。

(1) 測定用カメラ —— 測定用カメラは完全カメラの内部標定要素がわかっているものである。レンズ歪があってもそれらは既知の式で補正される。この場合式(5)の 3 つのパラメータ x_p, y_p, c に関する条件式が生じ式(6)に付加される。それらは、付録を参照して、

$$x_p = (L_1 L_9 + L_2 L_{10} + L_3 L_{11})(L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2)^{-1}$$

$$y_p = (L_5 L_9 + L_6 L_{10} + L_7 L_{11})(L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2)^{-1}$$

$$c^2 = (L_1^2 + L_2^2 + L_3^2)(L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2)^{-1} - x_p^2 \quad (6')$$

ここで、 x_p, y_p, c は既知である。制約条件のついた最小 2 乗問題については第 4 節で解説する。

(2) 線型のフィルム歪, レンズ歪が入る場合 —— フィルムを拡大複写して観測すると新たな射影歪が加わる。また極端な収束撮影や偏角撮影をしたときには像

図—1 収束撮影写真の再投影

を立体視することができないが、これを図—1のように撮影基線に平行な平面に再投影してやれば立体視ができる。しかしキャリブレーションしていないカメラでは投影中心の座標がわからないから、適当な近似で再投影せざるを得ない。このとき再度未知の射影変換を受ける。写真座標系が直交していなかったり伸縮があれば、像にアフィン歪が加わってくる。これらの場合、式(4)は次の様に uvt 座標系から $u'v't'$ 座標系へ変換される。

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ t \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u \\ v \\ t \end{bmatrix}$$

とくにアフィン歪のみが含まれている場合には $a_{31} = a_{32} = 0$ である。これは

$$x' = \frac{u'}{t'}, \quad y' = \frac{v'}{t'}; \quad x = \frac{u}{t}, \quad y = \frac{v}{t}$$

とおいてやれば上式は

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix}$$

となることからわかる。 uvt 座標系から $u'v't'$ 座標への変換により式(5)は次の様になる。

$$L = \frac{1}{\lambda'} A^{-1} \begin{bmatrix} c & 0 & -x_p \\ 0 & c & -y_p \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -X_o \\ 0 & 1 & 0 & -Y_o \\ 0 & 0 & 1 & -Z_o \end{bmatrix}$$

ここで $A^{-1} = (\tilde{a}_{ij})$ は A の逆行列、

$$\lambda' = \tilde{a}_{31}\alpha + \tilde{a}_{32}\beta + \tilde{a}_{33}\lambda$$

である。 L_j は 17 ケの未知パラメータを含みすべて独立になる。

(3) 非線型のフィルム歪, レンズ歪が入る場合 —— 一般にアマチュアカメラでは線型歪だけでなく非線型の

歪を考えねばならず、補正項を式(1)の右辺に付与してその係数を含めて解くことが行われる。

(2), (3)は第3節で述べる DLT 法を適用すれば良い。

3. 直接線型変換 (DLT) 法

3.1 基本式

Abdel-Aziz, Karara による DLT 法では非測定用カメラのキャリブレーションに次式を用いる。

$$\begin{aligned} & x + (x - x_p)(K_1 r^2 + K_2 r^4 + K_3 r^6 + \dots) \\ & + (r^2 + 2[x - x_p]^2)P_1 + 2(y - y_p)(x - x_p)P_2 \\ & = \frac{L_1 X + L_2 Y + L_3 Z + L_4}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1} \\ & y + (y - y_p)(K_1 r^2 + K_2 r^4 + K_3 r^6 + \dots) \\ & + 2(x - x_p)(y - y_p)P_1 + (r^2 + 2[y - y_p]^2)P_2 \\ & = \frac{L_5 X + L_6 Y + L_7 Z + L_8}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1} \end{aligned} \quad (7)$$

ここで x, y ; 写真座標の測定値

x_p, y_p ; 写真主点の座標

$r^2 = (x - x_p)^2 + (y - y_p)^2$

$K_1, K_2, \dots, P_1, P_2$; レンズ歪の係数

X, Y ; 対象空間座標

$L_1 \sim L_{11}$; 未知の変換係数

非測定用カメラではレンズ歪が大きいので、未知の写真主点の位置を中心とする放射方向と接線方向それぞれの補正項をつけている。フィルム歪もこれらに吸収されるとする。しかし実際には補正項としては、 K_1 のみで充分であって式(7)のかわりに、

$$\begin{aligned} & x + x' K_1 r^2 = \frac{L_1 X + L_2 Y + L_3 Z + L_4}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1} \\ & \quad (x' = x - x_p) \\ & y + y' K_1 r^2 = \frac{L_5 X + L_6 Y + L_7 Z + L_8}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1} \\ & \quad (y' = y - y_p) \end{aligned} \quad (8)$$

で充分であるとされている¹⁾*。以後の説明には式(8)を使う。式(8)の未知係数は対象空間内の6点以上の基準点によって最小2乗法で求める。ただし基準点は3次元的に配置しておかねばならず、基準点の配置の状態によってキャリブレーションの精度が大きく変わる。

3.2 未知係数の決定

厳密には式(8)の x, y に誤差があるとみなして観測方

程式を立てねばならない。方程式は非線型であるから、未知量の近似値のまわりに線型化し、くり返し解法で未知量を決定する必要がある。しかしこのくり返し最小2乗法はもっと簡単な手続きで以下のように近似的に解ける。式(8)自身が近似式であるとみなせるので、最小2乗解のみを厳密に求めても意味が薄いから近似解法は妥当であろう。

(1) 直接解法 —— 式(8)の分母を払い、

$$\begin{aligned} & L_1 X_i + L_2 Y_i + L_3 Z_i + L_4 - x_i X_i L_9 - x_i Y_i L_{10} \\ & - x_i Z_i L_{11} - x_i K_1 r_i^2 A - x_i = r_{xi} \\ & L_5 X_i + L_6 Y_i + L_7 Z_i + L_8 - y_i X_i L_9 - y_i Y_i L_{10} \\ & - y_i Z_i L_{11} - y_i K_1 r_i^2 A - y_i = r_{yi} \end{aligned} \quad (9)$$

を観測方程式とする。添字 i ($i = 1, 2, \dots, n$) は観測点番号を示す。 r_{xi}, r_{yi} は観測方程式の残差であり、 x', y' は x, y で置き換えている。このため主点位置 x_p, y_p は充分0に近くなければならない。通常は像のフレームの四隅を仮の指標として x_p, y_p を決定する。また A は

$$A = L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1$$

である。

式(9)では補正項の影響は小さいと考え、 A を定数にしている。 $K_1 A$ を更めて K'_1 とし、12個の未知数

$$(L_1, L_2, \dots, L_{11}, K'_1)$$

を6個以上の基準点から $\Sigma(r_{xi}^2 + r_{yi}^2) \rightarrow \min$ によって求める。式(9)は線型であるから1回の計算で終了する。

(2) くり返し解法 —— 写真座標の観測値 x, y の誤差を v_x, v_y とし、式(8)を次の観測方程式の形に書く。

$$v_{xi} - \frac{X_i}{A_i} L_1 - \frac{Y_i}{A_i} L_2 - \frac{Z_i}{A_i} L_3 - \frac{1}{A_i} L_4 + \frac{x_i X_i}{A_i} L_9$$

* しかし恐らくは、カメラ、フィルムの性能、基準点の配置によってこれは異ってくるだろう。アマチュアカメラではフィルム歪がレンズ歪と同じオーダーで発生し、かつ不規則であるから、実は式(7)の定式化もあやしい。この場合補正項を直交多項式で与えたとか、レンズ歪を放射方向のみとし、フィルム歪の項を通常の多項式で与えることなどの方法が考えられる⁵⁾。しかし場合によっては係数間の相関が高くなって解が求められなくなることもあり、この場合線型項のみの係数 $L_1 \sim L_{11}$ を一旦決定し、その残差を更めて観測量として補正項の係数を決定することになる⁵⁾。著者としては、レンズ歪、フィルム歪をレゾーで補正できるか、圧着機構によってフィルム歪を抑える程度の比較的良好いカメラを使い、式(8)によるのが最も実用的ではないかと考える。

$$\begin{aligned}
& + \frac{x_i Y_i}{A_i} L_{10} + \frac{x_i Z_i}{A_i} L_{11} + x_i r_i^2 K_1 + \frac{x_i}{A_i} = 0 \\
v_{yi} - \frac{X_i}{A_i} L_5 - \frac{Y_i}{A_i} L_6 - \frac{Z_i}{A_i} L_7 + \frac{1}{A_i} L_8 + \frac{y_i X_i}{A_i} L_9 \\
& + \frac{y_i Y_i}{A_i} L_{10} + \frac{y_i Z_i}{A_i} L_{11} + y_i r_i^2 K_1 + \frac{y_i}{A_i} = 0 \quad (10)
\end{aligned}$$

ここで $A_i = L_9 X_i + L_{10} Y_i + L_{11} Z_i + 1$

式(10)では $v_x K_1 r^2$, $v_y K_1 r^2$ の項を省略している。また式(10)は非線型であるから、くり返しの最小2乗法で未知係数を求めねばならない。そのためまず次式を連立して解いて $L_1 \sim L_{11}$ の初期近似値を求める。 K_1 の初期値は0とする。

$$\begin{aligned}
& X_i L_1 + Y_i L_2 + Z_i L_3 + L_4 - x_i X_i L_9 \\
& - x_i Y_i L_{10} - x_i Z_i L_{11} = x_i \quad (i=1, 2, \dots, 6) \\
& X_i L_5 + Y_i L_6 + Z_i L_7 + L_8 - y_i X_i L_9 \\
& - y_i Y_i L_{10} - y_i Z_i L_{11} = y_i \quad (i=1, 2, \dots, 5) \quad (11)
\end{aligned}$$

正規方程式を作るためには、式(10)を近似値のまわりに展開して線型化してもよいが次のようにするのが簡単である。最初 L_9 , L_{10} , L_{11} の近似値を用いて A_i の近似値を計算し、式(10)を線型の観測方程式として正規方程式を立てる。次にこれを解いてより正確な $L_1 \sim L_{11}$, K_1 を求める。以降は同様のくり返し計算により、近似値を更新していく。

3.3 対象空間座標の決定

変換係数 L_i , K_1 (あるいは K') が求まれば、これを使って対象空間の座標を求める測定作業になる。対象空間が平面であれば単写真測定ができるが、3次元空間であれば視点の異った2枚以上の写真が必要である。これには厳密解法と近似解法が考えられるが、DLT法では変換係数を近似的に求めているので近似解法の方が適しており、かつまた解析図化機でリアルタイムに計測していくには、近似解法の方が高速であり好ましい。厳密な解法については4.3で簡単に触れる。

変換係数は全て無相関の定数とみなし式(8)の分母を払い次の観測方程式を立てる。

$$\begin{aligned}
& (\tilde{x}_{i,n} L_1^0 - L_1^n) X_i + (\tilde{x}_{i,n} L_{10}^0 - L_{10}^n) Y_i \\
& + (\tilde{x}_{i,n} L_{11}^0 - L_{11}^n) Z_i + \tilde{x}_{i,n} - L_4^n = r_{x,n,i} \\
& (\tilde{y}_{i,n} L_1^0 - L_1^n) X_i + (\tilde{y}_{i,n} L_{10}^0 - L_{10}^n) Y_i \\
& + (\tilde{y}_{i,n} L_{11}^0 - L_{11}^n) Z_i + \tilde{y}_{i,n} - L_8^n = r_{y,n,i} \quad (12)
\end{aligned}$$

ここで $L_j^n (j=1, 2, \dots, 11)$: n 番目の写真の11枚の変換係数

$\tilde{x}_{i,n}$, $\tilde{y}_{i,n}$: 点 P_i の n 番目の写真座標, 位置補正を次式で行った後の座標

$$\tilde{x} = x + K_1 x r^2, \quad \tilde{y} = y + K_1 y r^2 \quad (\text{添字略})$$

X_i , Y_i , Z_i : 点 P_i の対象空間座標

3枚以上の写真に対象が写っているときには、各写真ごとに座標計測を行って最小2乗法で X_i , Y_i , Z_i を求める。

2枚の写真で立体観測ができれば連続的に対象の表面を追跡できる。このとき観測行列は4行3列であり、各点ごとに正規方程式を解いても、たとえばGauß-Seidel法などのくり返し法によれば、1つ前の測定値から近似値が与えられるから、収束は速く実用的な追随速度が得られるだろう。もし計算機的能力が不足するようであれば、次の様にしてもほとんど変わらない値が得られるだろう。式(12)の右辺を0とおき2式から Y_i を消去した式を作り、左右の写真座標から X_i , Z_i を連立して解く。 Y_i はそれぞれの写真に対して X_i , Z_i の値から計算した値を平均して求める。

キャリブレーションが完全であれば2枚の写真上の1組の対応点の xy 座標 $(x_{i,1}, y_{i,1})$, $(x_{i,2}, y_{i,2})$ のうち3つのみが独立であり、他の1つは対象空間座標の決定に不要であるが、実際には残存誤差があるため上記のように (4×3) 観測式を立てて最小2乗法で対象空間座標を決定するのである。

4. 完全カメラ, 測定用カメラのキャリブレーション

4.1 制約条件式がついた場合の変換係数の決定

この節では式(6)の制約条件式のついた場合に式(1)の11枚の変換係数 L_j を求める方法について述べる。独立した係数は9個であるから基準点は5個以上あれば良い。ただしこれらは3次元的な配置が必要である。式(1)を観測方程式に書き直すと次式を得る。

$$\begin{aligned}
x_i + v_{xi} &= \frac{L_1 X_i + L_2 Y_i + L_3 Z_i + L_4}{L_9 X_i + L_{10} Y_i + L_{11} Z_i + 1} \\
y_i + v_{yi} &= \frac{L_5 X_i + L_6 Y_i + L_7 Z_i + L_8}{L_9 X_i + L_{10} Y_i + L_{11} Z_i + 1} \quad (13)
\end{aligned}$$

添字 i は点 P_i に関する諸量, v_{xi} , v_{yi} は写真座標の誤差である。制約条件のついた最小2乗の解法としてはラグランジュ乗法を使う方法が一般的であるが、制約条件式を重み無限大 (あるいは分散0) の観測方程式として観測式の系の一部を占めるように組み込んでしま

う方が簡単になる。以下に両者を説明する。

(1) ラグランジェの未定係数を用いる方法——式(13)を $L_1 \sim L_{11}$ の近似値のまわりに展開して線型化する(あるいは式(9)のように分母を払ってしまっても解けるが最小2乗法の厳密な意味はなくなる)。同じく式(6)を線型化し、以下の2つの系を得る。

$$\begin{aligned} v_1 &= A_1 u - l; \text{重み行列 } P_1 \text{ (通常単位行列)} \\ 0 &= A_2 u - d \end{aligned} \quad (14)$$

ここで、

$v_1^T = (v_{x1}, v_{y1}, v_{x2}, v_{y2}, \dots, v_{xn}, v_{yn})$: 写真座標の誤差ベクトル

u (11×1): 未知係数 L_j の補正量ベクトル

A_1 ($11 \times 2n$), A_2 (11×2): 係数行列

l ($2n \times 1$), d (2×1): 定数項ベクトル

L_j の最確値はグランジェ乗数ベクトル $\lambda^T = (\lambda_1, \lambda_2)$ を使って

$$\begin{aligned} \phi(u) &= \frac{1}{2} (A_1 u - l)^T P_1 (A_1 u - l) \\ &\quad - 2\lambda^T (A_2 u - d) \rightarrow \min \end{aligned}$$

より求められる。実際にこれを解いてみると

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial u} = (A_1^T P_1 A_1) u - A_1^T P_1 l - A_2^T \lambda = 0$$

$$u = (A_1^T P_1 A_1)^{-1} (A_1^T P_1 l + A_2^T \lambda) \quad (15)$$

条件式(式(14)の第2式)に式(15)を代入して λ について解くと

$$\begin{aligned} \lambda &= (A_2 (A_1^T P_1 A_1)^{-1} A_2^T)^{-1} \\ &\quad \{d - A_2 (A_1^T P_1 A_1)^{-1} A_1^T P_1 l\} \end{aligned} \quad (16)$$

式(15), (16)が解である。こうして得た L_i の補正量 u からより良い近似を求め、上記の演算を u が充分0に収束するまでくり返す。

(2) 重み無限大の観測式と見なす方法——制約条件式(6)を観測式(13)と共に線型化し、次の観測方程式を作る。

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} l \\ d \end{bmatrix}; \text{重み行列 } P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & aE \end{bmatrix} \quad (17)$$

ここで E (2×2)は単位行列、 a は非常に大きい実数である。極端に大きな数字を与えると P は計算機のまるめ誤差による桁落ちで特異行列になってしまうので解けない。たとえば $P_1 = E$ ($2n \times 2n$)のとき $a = 1.0 \times 10^2 \sim 1.0 \times 10^3$ 程度とする。解は

$$u = (A^T P A)^{-1} A^T P l \quad (18)$$

である。もちろん a が有限値であるからこれは近似解であるが実用上充分である。この場合も u が充分0に収束するまで計算をくり返す。

4.2 変換係数からの内部、外部の標定要素の決定

通常必要はないが内部外部の標定要素を変換係数 L_j から決定することができる。内部標定要素はすでに式(6)'に与えた。

まず撮影点(投影中心)の座標(X_0, Y_0, Z_0)は式(2)より、対応する写真座標が不定になることから、

$$\begin{aligned} L_1 X_0 + L_2 Y_0 + L_3 Z_0 + L_4 &= 0 \\ L_5 X_0 + L_6 Y_0 + L_7 Z_0 + L_8 &= 0 \\ L_9 X_0 + L_{10} Y_0 + L_{11} Z_0 + 1 &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

を連立に解けば得られる。回転行列(m_{ij})は式(5)より

$$\begin{aligned} m_{31} &= -\lambda L_9, \quad m_{32} = -\lambda L_{10}, \quad m_{33} = -\lambda L_{11} \\ m_{11} &= (\lambda L_1 + x_p m_{33})/c, \quad m_{21} = (\lambda L_5 + y_p m_{31})/c \\ m_{12} &= (\lambda L_2 + x_p m_{32})/c, \quad m_{22} = (\lambda L_6 + y_p m_{32})/c \\ m_{13} &= (\lambda L_3 + x_p m_{33})/c, \quad m_{23} = (\lambda L_7 + y_p m_{33})/c \end{aligned} \quad (20)$$

より得られる。

4.3 対象空間座標の決定(厳密解法)

変換係数 L_j が確定すると2組以上の写真座標から対象空間座標が決定される。その方法はすでに3.3で述べた近似解法によればいいが、完全カメラ、測定用カメラでは誤差は写真座標のみに入ると考えられるので次の観測方程式を立てる方が望ましい。

$$\begin{aligned} x_{i,n} + v_{xi,n} &= \frac{L_1^T X_i + L_2^T Y_i + L_3^T Z_i + L_4^T}{L_9^T X_i + L_{10}^T Y_i + L_{11}^T Z_i + 1} \\ y_{i,n} + v_{yi,n} &= \frac{L_5^T X_i + L_6^T Y_i + L_7^T Z_i + L_8^T}{L_9^T X_i + L_{10}^T Y_i + L_{11}^T Z_i + 1} \end{aligned} \quad (21)$$

記号は式(12)と共通であるが写真座標の補正項は入れてない。式(21)は非線型であるから X_i, Y_i, Z_i の近似値のまわりに展開して線型化しなければならない。最初の近似値は式(12)を2枚の写真点の2つの x と1つの y について立てて連立方程式を解いて得られる。

付録 制約条件式(6), (6)'の導出

一般に直行行列 $M = (m_{ij})$ は

$$M M^T = E \text{ (単位行列)}$$

の性質を持つので、これを成分表示すると

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

すなわち

$$\begin{aligned} m_{11}^2 + m_{12}^2 + m_{13}^2 &= 1 \\ m_{21}^2 + m_{22}^2 + m_{23}^2 &= 1 \end{aligned}$$

$$m_{31}^2 + m_{32}^2 + m_{33}^2 = 1$$

$$m_{11}m_{21} + m_{12}m_{22} + m_{13}m_{23} = 0$$

$$m_{11}m_{31} + m_{12}m_{32} + m_{13}m_{33} = 0$$

$$m_{21}m_{31} + m_{22}m_{32} + m_{23}m_{33} = 0$$

式(5)より

$$\cdot L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2 = (m_{31}^2 + m_{32}^2 + m_{33}^2)\lambda^{-2} = \lambda^{-2}$$

$$\begin{aligned} \cdot L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 &= \{c^2(m_{11}^2 + m_{12}^2 + m_{13}^2) \\ &\quad + x_p^2(m_{31}^2 + m_{32}^2 + m_{33}^2) \\ &\quad - 2cx_p(m_{11}m_{31} + m_{12}m_{32} + m_{13}m_{33})\}\lambda^{-2} \\ &= (c^2 + x_p^2)\lambda^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot L_5^2 + L_6^2 + L_7^2 &= \{c^2(m_{21}^2 + m_{22}^2 + m_{23}^2) \\ &\quad + x_p^2(m_{31}^2 + m_{32}^2 + m_{33}^2) \\ &\quad - 2cy_p(m_{21}m_{31} + m_{22}m_{32} \\ &\quad + m_{23}m_{33})\}\lambda^{-2} \\ &= (c^2 + y_p^2)\lambda^{-2} \end{aligned}$$

以下同様の計算で

$$\cdot L_1L_5 + L_2L_6 + L_3L_7 = x_py_p\lambda^{-2}$$

$$\cdot L_1L_9 + L_2L_{10} + L_3L_{11} = x_p\lambda^{-2}$$

$$\cdot L_5L_9 + L_6L_{10} + L_7L_{11} = y_p\lambda^{-2}$$

以上の6式から x_p , y_p , c , λ を消去すれば式(6)を得る。
式(6)も x_p , y_p , c を L_j で表わすことによって得られる。

参 考 文 献

- 1) Hand book of Nontopographic Photogrammetry : ASP 編, 1979, pp. 35-38
- 2) Abdel-Aziz, Y. I. and Karara, H. M. : Direct Linear Transformation from Comparator Coordinates into Object Space Coordinates in Close-Range Photogrammetry, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, Illinois, January 26-29, 1971, pp. 1-18
- 3) Bopp, H and H. Krauss : An Orientation and Calibration Method for Non-Topographic Applications, PE & RS, Vol. 44, No. 9, 1978, pp. 1191-1196
- 4) Wong, K. W. : Mathematical Formulation and Digital Analysis in Close-Range Photogrammetry, PE & RS, Vol. 41, No. 11, 1975, pp. 1355-1373
- 5) 村井俊治, 松岡龍治, 奥田 勉 : セルフキャリブレーション付きバンドル法の精度比較, 写真測量とリモートセンシング, Vol.23, No. 2, 1984, pp. 4-11