非地形写真測量におけるバンドル調整(Ⅰ)

Bundle Adjustments in Non-Topographic Photogrammetry(Ⅰ)

服部 進*

Susumu Hattori

Abstract: This paper reviews the bundle adjustments in non-topographic photogrammetry using non-metric cameras. Unlike the bundle adjustments using metric cameras, many factors that should be considered increase, i.e., dependency or independency of unknown parameters, possibility of their direct observation, camera performances and exposure configurations, etc., because these factors influence both accuracy and stability in evaluation of object space coordinates. These factors are detailed in relation to stability of the least squares solutions.

On account of the large volume of the paper, part(Ⅰ) only describes how to set up observation equations, followed by the treatment of additional parameters, least squares solutions and resulting strength of the network configuration of photogrammetry and conventional surveying, etc.

概 要: 非測定カメラを非地形写真測量に用いようとするとき、付加パラメータ付バンドル調整法は主要なキャリブレーション法の1つである。空中三角測量のバンドル調整は広く普及しているが、非測定カメラを使う際には新しく考えておかなければならない要素が増える。この解説は付加パラメータ付バンドル調整法の考え方、取り扱い方を、実際にプログラムを作成しようとする人の参考になる様、丁寧に述べたものである。従来のバンドル調整法の解説では、式の立て方と最小2乗解の解法のみが述べられることが多かったが、非測定カメラを使う場合、パラメータの独立性、直接観測の可・不可性、撮影の形態とカメラの性能によって、対象空間のモデルの安定性が大きく変わるため、事情は簡単でない。この解説ではこれらの問題を1つ1つ説明した。実際の応用では、いくつかのシミュレーションによって予め写真測量と対象空間での基準点測量のネットワークの強さを予想しておく必要があるだろう。この解説はそのための方法にも言及する。

説明の便宜上、ここでは通常の内部、外部の標定要素を使わず、岡本^{6),7)}の一般標定論に従った。ただし必要に応じ両者の対比を行っている。解説(Ⅰ)では観測方程式を立てるところまでを説明し、解法およびネットワークの強さについては(Ⅱ)以降に譲った。

1. はじめに

計算機ならびに解析図化機の普及に伴い、非測定カメラを比較的精密な写真測量に使いたいという要求が強くなっている。さらにビデオ画像を使って、概略かつ安価な計測ができないかという希望も多い。

非測定カメラによる計測については、既に多くの事例が報告されていて、使われるキャリブレーション法を大別すると次の2つのグループに分けられる。

①直接線型変換法および類似の解法¹⁾ (11パラメータ解法と呼ばれることがある)

②セルフキャリブレーション付バンドル調整法^{2),3)}

直接線型変換法は単写真標定法(あるいは後方交合法)であり、これについてはすでに解説した⁴⁾。この方法では誤差が複数の写真に伝播することではなく、キャリブレーションの計算量も小さい。その反面安定した精度を保つには、多くの基準点を対象空間内に配置しておかねばならない。これは屋外での撮影には困難なことが多い。

これに対し、バンドル調整法は比較的少数の基準点を使って複数の重複する写真群を同時に調整しようとするもので、多くの点でより応用性の高い方法と言える。

* 東京大学生産技術研究所
「写真測量とリモートセンシング」Vol.27, No. 2, 1988

る。

この解説は非測定カメラを使った場合のバンドル調整法の考え方、解き方を詳しく解説しようとしたものである。解析写真測量における非測定カメラの使用に関しては、Fraser⁵⁾が秀れた解説論文を発表しているがあまりに簡潔に書かれていて読みづらい。そのため、その構成を利用しながら、基本からわかり易く説明するよう努めた。ただし、Fraser は共線条件式のパラメータとして通常の内部、外部の標定要素を使っているが著者は後述するいくつかの理由から、岡本の一般標定論^{6),7)}にもとづき直接線型変換式をそのまま使っている。

ページ数の制約から、解説の(Ⅰ)では観測方程式の立て方とその性質に話題を限った。続いて、最小2乗法による解法、付加パラメータの構造、撮影形態と期待される精度、およびネットワークの安定性などについて解説する予定である。

なおこの解説は測量協会主催昭和六十二年度専門技術講習会(写真測量 A 課程)で著者が行った講義がもとになっている。

2. 共線条件と共面条件

2.1 一般共線式

バンドル調整の基本観測式は次の一般共線式(一般線型変換式)である。

$$\left. \begin{aligned} v_x - \left[x - \frac{L_1 X + L_2 Y + L_3 Z + L_4}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1} - \Delta x \right] &= 0 \\ v_y - \left[y - \frac{L_5 X + L_6 Y + L_7 Z + L_8}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1} - \Delta y \right] &= 0 \end{aligned} \right\} (1)$$

X, Y, Z は対象空間点の座標、 $L_1 \sim L_{11}$ は変換係数パラメータ、 x, y は画像座標の観測値、 v_x, v_y はその残差、 $\Delta x, \Delta y$ はレンズおよびフィルムの歪による画像の非線型歪の補正項である。

キャリブレーションされていない理想的カメラとキャリブレーションされたコンパレータによる組合わせでは、独立な変数が撮影位置の3個、画面距離、写真主点位置の2個、回転角の3個の計9個であり、 $L_1 \sim L_{11}$ には2組の従属関係が導かれる^{1),4)}。

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= (L_1^2 + L_2^2 + L_3^2) - (L_5^2 + L_6^2 + L_7^2) \\ &\quad + [(L_5 L_9 + L_6 L_{10} + L_7 L_{11})^2 \\ &\quad - (L_1 L_9 + L_2 L_{10} + L_3 L_{11})^2] \cdot \\ &\quad (L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2)^{-1} = 0 \\ g_2 &= (L_1 L_5 + L_2 L_6 + L_3 L_7) \\ &\quad - (L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2)^{-1} \cdot \\ &\quad (L_1 L_9 + L_2 L_{10} + L_3 L_{11}) \cdot \\ &\quad (L_5 L_9 + L_6 L_{10} + L_7 L_{11}) = 0 \end{aligned} \right\} (2)$$

この2つの自由度は画像座標の伸縮と非直交性と解釈できるので(むろん、対象空間の方をアフィンのに歪めても同じことが言える)、非測定カメラの場合、これを認めておいた方が汎用性がある。線型のレンズ歪、フィルム歪はこれに含めることができる上、コンパレータのキャリブレーションが不完全で、軸の直交性が不完全でも最終精度に影響しない。

付録に座標軸の伸縮と非直交性を認めた場合の変換係数パラメータと内部標定要素との関係を示した。直交性、伸縮性が保存されるときは式(2)が成り立つことがわかる。今は $L_1 \sim L_{11}$ を全て独立と考えておく。

バンドル調整では、対象空間点の座標、共線式のパラメータ、画像の非線型歪 $\Delta x, \Delta y$ のパラメータ(付加パラメータ)を全て未知数として同時調整を行う。いくつかの未知量は直接観測でき、式(1)とともに観測方程式の系をつくる。

2.2 付加パラメータのないときの共面条件

同一の対象空間点を2枚の写真上で観測し、式(1)を立てると、4つの観測式が得られる。これは共面条件を与えるが、これがどの程度パラメータの決定に有効か、すなわち幾何学的拘束を持つかを考えておくのは重要である。

測定カメラでは2枚の重複画像(必ずしも立体観測できなくてもよいから立体画像とはいわない)は5つの共面条件が成立すれば相似モデル(回転、平行移動、縮尺で対象空間と重なるモデル)ができることは良く知られている。しかし、一般共線式を使う場合は、岡本^{6),7)}が明らかにしたように事情が異なる。

式(1)が2枚の写真上の対応点について成立したとする。 v_x, v_y を0とおき、4つの式から X, Y, Z を消去すると次式を得る。

$$=0 \quad (3)$$

$$\begin{vmatrix} (x_1 - \Delta x_1)L_{9,1} - L_{1,1} & (x_1 - \Delta x_1)L_{10,1} - L_{2,1} & (x_1 - \Delta x_1)L_{11,1} - L_{3,1} & (x_1 - \Delta x_1)L_{4,1} \\ (y_1 - \Delta y_1)L_{9,1} - L_{5,1} & (y_1 - \Delta y_1)L_{10,1} - L_{6,1} & (y_1 - \Delta y_1)L_{11,1} - L_{7,1} & (y_1 - \Delta y_1)L_{8,1} \\ (x_2 - \Delta x_2)L_{9,2} - L_{1,2} & (x_2 - \Delta x_2)L_{10,2} - L_{2,2} & (x_2 - \Delta x_2)L_{11,2} - L_{3,2} & (x_2 - \Delta x_2)L_{4,2} \\ (y_2 - \Delta y_2)L_{9,2} - L_{5,2} & (y_2 - \Delta y_2)L_{10,2} - L_{6,2} & (y_2 - \Delta y_2)L_{11,2} - L_{7,2} & (y_2 - \Delta y_2)L_{8,2} \end{vmatrix}$$

添字1, 2は写真番号を表わす。| | は行列式である。

$$\mathbf{a} = (L_9 \ L_{10} \ L_{11} \ 1), \quad \mathbf{b} = (L_1 \ L_2 \ L_3 \ L_4)$$

$$\mathbf{c} = (L_5 \ L_6 \ L_7 \ L_8)$$

と書けば式(3)は、

$$\begin{vmatrix} (x_1 - \Delta x_1)\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1 \\ (y_1 - \Delta y_1)\mathbf{a}_1 - \mathbf{c}_1 \\ (x_2 - \Delta x_2)\mathbf{a}_2 - \mathbf{b}_2 \\ (y_2 - \Delta y_2)\mathbf{a}_2 - \mathbf{c}_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (3')$$

と表わされる。 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ の添字は写真番号である。これを展開すると次式を得る。

$$\begin{aligned} & (x_1 - \Delta x_1)(x_2 - \Delta x_2)h_1 + (x_1 - \Delta x_1)(y_2 - \Delta y_2)h_2 \\ & + (y_1 - \Delta y_1)(x_2 - \Delta x_2)h_3 + (y_1 - \Delta y_1)(y_2 - \Delta y_2)h_4 \\ & - (x_1 - \Delta x_1)h_5 - (y_1 - \Delta y_1)h_6 - (x_2 - \Delta x_2)h_7 \\ & - (y_2 - \Delta y_2)h_8 + h_9 = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{c}_2 \end{vmatrix} & h_2 &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 \end{vmatrix} & h_3 &= \begin{vmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{c}_2 \end{vmatrix} & h_4 &= \begin{vmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 \end{vmatrix} \\ h_5 &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{c}_2 \end{vmatrix} & h_6 &= \begin{vmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{c}_2 \end{vmatrix} & h_7 &= \begin{vmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{c}_2 \end{vmatrix} & h_8 &= \begin{vmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 \end{vmatrix} \\ h_9 &= \begin{vmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{c}_2 \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$h_1 \sim h_9$ は9個以上の共面条件から決定できるが、実はこの9個の量は独立変数ではない。たとえば h_3 , h_4 , h_6 , h_7 から $\mathbf{b}_1$ を、また h_2 , h_5 , h_8 , h_9 から $\mathbf{b}_2$ を消去できる。すなわち独立変数は7個である。したがって画像歪 Δx , Δy がないとすると、7組以上の共面条件で、22個の係数パラメータ $L_{1,1} \sim L_{11,1}$, $L_{1,2} \sim L_{11,2}$ に7個の拘束を与えることができる。この結果、対応する光線はすべて交会するから1つのモデルができたことになる。ただしこのモデルは1般に自由度7の相似モデル

ではない。対象空間に一致させるには残りの15個の係数を決めねばならない。これはたとえば対象空間内の5点の基準点から決定できる。

3枚以上の重複画像の場合を考えてみよう。理解を容易にするため測定カメラで撮影した重複画像の場合と比較すればよい。測定カメラの場合、 n 枚の重複画像は $6n$ 個の未知パラメータ（外部標定要素）を含み、 $(n-1)$ 個のモデルができる。各モデルは共面条件で5個のパラメータ（相互標定要素）を決定して作ることができる。あとはモデル間の縮尺調整で $(n-2)$ 個のパラメータを固定すれば7自由度の相似モデルができる。自由度の収支は

$$6n = 5(n-1) + (n-2) + 7$$

となる。ついでに最後の7自由度は3点の基準点で固定できる (X , Y 座標2点と X , Y , Z 座標1点)。

一般共線式の場合、同様に考えてみると、 n 枚の画像では $11n$ 個の未知量があり、共面条件で $7(n-1)$ 個の拘束を与えることができる。1組のモデルを対象空間に一致させるのに15個の拘束を必要としたから、自由度の収支は

$$11n = 7(n-1) + 4(n-2) + 15$$

でなければならない。これは次のことを意味する。対象空間中に基準点は5個以上必要であり、かつ、隣接モデルとの結合には4個の拘束が必要である。もし、隣接する3枚に共通の対応点が1点あるとすれば、6個の共線条件が立ち3個の拘束が得られる。このとき2つの拘束はそれぞれ2つのモデルを作る共面条件に使われてしまうから新しい拘束は実は1つである。したがってこのような共通対応点が4組以上必要である。しかし通常小さい対象空間では束支撮影することが多いので、この条件は自然に満たされる。

ついでに n 枚の写真を束支撮影して、対象空間がそれぞれの写真に完全に含まれるときのモデル結合に触れておく⁸⁾。測定カメラでの撮影では、対象空間点が m 個あるとき、 $2mn$ 個の共線式が立つ。相似モデルを作るまでの $3m + 6n - 7$ 個の自由度を拘束するには

$$r = 2mn - (3m + 6n - 7) \geq 0$$

を満たすだけの対象空間点が必要である。 r は冗長度

(*redundancy*) と呼ばれる。 $n=2$ では $m \geq 5$ であり、通常の相互標定の条件と一致する。 $n \geq 3$ では $m \geq 4$ であり、 $n \rightarrow \infty$ で $m \rightarrow 3$ になる。

非測定カメラでは、 $3m+11n-15$ 個の自由度を拘束しなければならないから

$$r = 2mn - (3m + 11n - 15) \geq 0$$

である。 $n=2$ で $m=7$ であり、 $n \geq 3$ で $m \geq 6$ である。

2.3 付加パラメータがあるときの共面条件

任意の連続関数は多項式で一様に近似できる。非線型画像歪 $\Delta x, \Delta y$ はなめらかな関数と考えてよいから

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= \alpha_1 x^2 + \alpha_2 xy + \alpha_3 y^2 + \dots \\ \Delta y &= \beta_1 x^2 + \beta_2 xy + \beta_3 y^2 + \dots \end{aligned} \right\} (6)$$

と表わしてみる。線型項は共線式の変換係数に含まれるので(6)式中には入れてない。2枚の重複画像で画像歪が異なった関数で与えられるとして、試みに $\Delta x, \Delta y$ を2次までとってみよう。式(6)を式(4)に入れて、 x_1, y_1, x_2, y_2 の多項式の係数ごとに整理する。すると未知数21個 (α, β が12個、 h が9個) に対し、決定可能な多項式の係数は34個あり、 α, β は全て決定できることがわかる。一般に3次元的に配置された対象空間点からは、非線型画像歪はどのようなものであっても、理論上共面条件から求めることが可能である。しかし実際には十分に近似度のよいモデル構造を与えないと、最小2乗法で決定するパラメータの信頼性が乏しく、とくに高次多項式を使うと大きな振動が発生することが予想される。言い換えると、画面上では確かにキャリブレーション後縦視差が消えているが、計測精度は一向によくないということになる。付加パラメータについては同題目(II)で述べる。

3. セルフキャリブレーション付バンドル調整の一般モデル

多くの参考書と同じく、セルフキャリブレーション付バンドル調整の観測式のモデルは、距離、角度等の附加観測量がないとき、次のように与えるのが便利である。

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} v \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ -I_1 & & \\ & -I_2 & \\ & & -I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} l \\ l_1^0 \\ l_2^0 \\ l_3^0 \end{bmatrix}; \\ P &= \begin{bmatrix} P & P^0 & 0 \\ 0 & P_2^0 & P_3^0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} v \\ v^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix} x &= \begin{bmatrix} l \\ l^0 \end{bmatrix}; P = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & P^0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\}$$

あるいはまとめて

ここで v, x, l, P はそれぞれ残差ベクトル、未知パラメータの補正量ベクトル、線型化に伴うくり返し計算で発生する残存量 (discrepancy) ベクトル、および観測の重み行列である。 A はデザイン行列 (係数行列) と呼ばれ、共線式のパラメータに関する微分係数からなる。 I は単位行列である。

添字のない量は写真座標に関するものであり、添字 $i=1, 2, 3$ はそれぞれ対象空間点の X, Y, Z 座標、共線式の変換係数パラメータ、および附加パラメータに関する量である。

式(7)は次の考え方から導かれている。ある量 y の観測量を $\hat{y}$ 、真値を $\dot{y}$ とすると、その誤差 v は

$$v = \hat{y} - \dot{y} \quad (8)$$

であり、真値 $\dot{y}$ は、何らかの手段で与えられた近似値 $\bar{y}$ とその補正量 Δy の和に等しい。すなわち、

$$\dot{y} = \bar{y} + \Delta y \quad (9)$$

これより

$$v + \Delta y = l (= \hat{y} - \bar{y}) \quad (10)$$

となり式(7)の形を得る。

ベクトル、行列の次元を以後の解説のために次の様に定めておく。 $v, l (t \times 1), x (u \times 1), v^0, l^0 (u \times 1), A (t \times u), I (u \times u)$ 。 t は観測数で写真点ごとに2個である。 u は全未知パラメータ数。一般に例外なく $t > u$ である。

式(7)では全てのパラメータを観測可能量として扱っている。未観測のパラメータには重み0を与える。

基準点がうまく配置されていなかったり、撮影の形態が悪いとデザイン行列にランク落ちが発生し、正規方程式が特異になることがある。このとき通常の意味の最小2乗解は存在しない。

行列のランク落ちは次の場合に発生する。

①変換係数間の相関が高くなる (線型従属になる)。

②付加パラメータ間の相関が高くなる。

③対象空間点のネットワークが座標系に対して不定になっている。

①②は内的な不定問題であり、③は外的な不定問題である。対象空間が平面に近いときは、変換パラメータは独立でなくなり、また式(3)の共面条件の係数も独立でなくなるから、①②は必然的に起こる。また、対象空間点の配置と撮影形態しだいで、パラメータの決定精度、ひいては対象空間点の決定精度は極端に変動する。

これらの問題は節を変えて詳しく扱う。

4. 確率モデルの基本的仮定

調整計算の結果得られた対象空間点座標とパラメータの最確値の精度、およびネットワークの強さを議論するために次の仮定をおく。

式(7)の写真座標と未知パラメータの残差ベクトル $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}^0$ は平均値 0, 分散共分散行列 $D(\mathbf{v}) = K_{ii}$, $D(\mathbf{v}^0) = K_{ii}^0$ の分布に従う。 D は分散オペレータである。さらに数理統計的議論を進めるために $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}^0$ が多次元正規分布するという仮定が必要になることが多い。

$\mathbf{v}$, $\mathbf{v}^0$ の重み行列は、

$$P = \sigma_0^2 K_{ii}^{-1}; P^0 = \sigma_0^2 (K_{ii}^0)^{-1} \quad (11)$$

で与えられる。 σ_0^2 は先験的分散因子 (a priori variance factor) と呼ばれ一般に 1 とする。 P , P^0 は通常対角行列である。

なお、 $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}^0$ はオーダが全く異なる量であるが重み行列で補正される。ただ出力の便宜を考えると、式(7)を次の様に正規化しておく方が良い。

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}} \\ \tilde{\mathbf{v}}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{A} \\ \sqrt{P^0} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{l}} \\ \tilde{\mathbf{l}}^0 \end{bmatrix}; \tilde{P} = I \quad (7')$$

ここで

$\tilde{\mathbf{v}} = \sqrt{P} \mathbf{v}$, $\tilde{A} = \sqrt{P} A$, $\tilde{\mathbf{l}} = \sqrt{P} \mathbf{l}$, $\tilde{\mathbf{v}}^0 = \sqrt{P^0} \mathbf{v}^0$, $\tilde{\mathbf{l}}^0 = \sqrt{P^0} \mathbf{l}^0$ である。 $\sqrt{P}$ は P が対角行列のときはその各要素の平方根を並べた行列である。ただし以後の議論には上式は用いず、式(7)を使うことにする。

5. 変換係数の内的拘束

式(1)を線型化し、式(7)のように表わすと次のようになる。変換係数パラメータの自由度が高く、係数行列

の線型独立性が破れ易い構造をしていることがわかる。

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_9 & a_{10} & a_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & b_9 & b_{10} & b_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dL_1 \\ dL_2 \\ dL_3 \\ dL_4 \\ dL_5 \\ dL_6 \\ dL_7 \\ dL_8 \\ dL_9 \\ dL_{10} \\ dL_{11} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$+ \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_x \\ l_y \end{bmatrix}$$

ここで、

$$a_1 = \frac{X}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1}$$

$$a_2 = \frac{Y}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1}$$

$$a_3 = \frac{Z}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1}$$

$$a_4 = \frac{1}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1}$$

$$a_9 = -\frac{(L_1 X + L_2 Y + L_3 Z + L_4) X}{(L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1)^2}$$

$$a_{10} = -\frac{(L_1 X + L_2 Y + L_3 Z + L_4) Y}{(L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1)^2}$$

$$a_{11} = -\frac{(L_1 X + L_2 Y + L_3 Z + L_4) Z}{(L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1)^2}$$

$$b_9 = -\frac{(L_5 X + L_6 Y + L_7 Z + L_8) X}{(L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1)^2}$$

$$b_{10} = -\frac{(L_5 X + L_6 Y + L_7 Z + L_8) Y}{(L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1)^2}$$

$$b_{11} = -\frac{(L_5 X + L_6 Y + L_7 Z + L_8) Z}{(L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1)^2}$$

c_1

$$= \frac{(L_1 L_{10} - L_9 L_2) Y + (L_1 L_{11} - L_9 L_3) Z + L_1 - L_9 L_4}{(L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1)^2}$$

c_2

$$= \frac{(L_2 L_9 - L_{10} L_1) X + (L_2 L_{11} - L_{10} L_3) Z + L_2 - L_{10} L_4}{(L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1)^2}$$

$$\begin{aligned}
c_3 &= \frac{(L_3L_9 - L_{11}L_1)X + (L_3L_{10} - L_{11}L_2)Y + L_3 - L_{11}L_4}{(L_9X + L_{10}Y + L_{11}Z + 1)^2} \\
d_1 &= \frac{(L_5L_{10} - L_9L_6)Y + (L_5L_{11} - L_9L_7)Z + L_5 - L_9L_8}{(L_9X + L_{10}Y + L_{11}Z + 1)^2} \\
d_2 &= \frac{(L_6L_9 - L_{10}L_5)X + (L_6L_{11} - L_{10}L_7)Z + L_6 - L_{10}L_8}{(L_9X + L_{10}Y + L_{11}Z + 1)^2} \\
d_3 &= \frac{(L_7L_9 - L_{11}L_5)X + (L_7L_{10} - L_{11}L_6)Y + L_7 - L_{11}L_8}{(L_9X + L_{10}Y + L_{11}Z + 1)^2}
\end{aligned}$$

変換係数を安定して決定するには、その自由度を制限するのが有効である。いくつかの内部標定要素がフィルム間で共通であったり、既知である場合がある。これらはカメラの性能による。アマチュアカメラではフィルムの巻き上げごとに内部標定は変わると考えるべきである。もしフィルムの圧着機構およびリゾマーを備えているカメラならば、焦点を変えない限り、画面距離、主点位置は変わらないとみなせることは多い。これらの拘束条件も観測方程式の系に組み込むことができる。しかし、パラメータの拘束が強くなる程、式(1)、(12)の一般共線式を使う意味は薄れ、通常の標定要素を使うバンドル調整で充分となる。最大の拘束を与えたカメラが測定カメラである。

拘束条件を組み込むにはラグランジェの乗数を使う方法と大きな重みを使う方法とがあり、後者の方が便利である⁴⁾。拘束条件として次のものが考えられる。

(1) 画面距離と主点位置

画面距離 c 、主点位置 x_p, y_p と変換係数パラメータ L_j の関係式は付録の式(5)に与えられている。これらの式を線型化し、フィルム間で共通の場合は、等置した関係式をつくり、値が既知であれば観測式の形に置けばよい。

(2) 写真座標系の伸縮と非直交性

これらが画像間で一定に保たれると考えられるときは付録の式(5)の a, b について(1)と同様にとり扱える。またカメラの性能が良い場合には $a=1, b=0$ として式(2)を条件にできる。

付録 直接線型変換式の変換係数パラメータと標定要素の関係

式(1)の直接線型変換式の係数パラメータと内部、外部の標定要素の関係は、いわゆる「完全カメラ」につ

いては Bopp, Krauß により明らかにされた^{1),4)}。ここでは画像座標の伸縮と座標軸の非直交性を含めたときの関係式を導いておく。

画像座標系 x, y 、対象空間座標系 X, Y, Z を次の同次座標系で表わす。

$$\begin{aligned}
(u, v, t) &\leftrightarrow (x, y) \\
(U, V, W, T) &\leftrightarrow (X, Y, Z)
\end{aligned} \quad \} (1)$$

画像座標系の伸縮と非直交性を入れた関係式の立て方はいくつか考えられるが、ここでは次の様にとる。

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \frac{1}{-c} & 0 \\ -c & \frac{1}{-c} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & -x_p \\ 0 & 1 & -y_p \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ t \end{bmatrix} \\
&= (m_{ij}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -X_0 \\ 0 & 1 & 0 & -Y_0 \\ 0 & 0 & 0 & -Z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ T \end{bmatrix} \quad (2)
\end{aligned}$$

ここで、 c は画面距離、 a, b は伸縮と非直交性のパラメータ、 x_p, y_p は写真主点の座標 m_{ij} は回転行列の成分、 X_0, Y_0, Z_0 は撮影点の座標式。(2)と、

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 & L_4 \\ L_5 & L_6 & L_7 & L_8 \\ L_9 & L_{10} & L_{11} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ T \end{bmatrix} \quad (3)$$

を比較して次の関係を得る。

$$\left. \begin{aligned}
\frac{1}{\lambda^2} &= L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2 \\
\frac{x_p - by_p}{a} &= \lambda^2 (L_1L_9 + L_2L_{10} + L_3L_{11}) \\
y_p &= \lambda^2 (L_5L_9 + L_6L_{10} + L_7L_{11}) \\
c^2 + y_p^2 &= \lambda^2 (L_5^2 + L_6^2 + L_7^2) \\
\left(\frac{1}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} \right) c^2 + \left(\frac{x_p - by_p}{a} \right)^2 &= \lambda^2 (L_1^2 + L_2^2 + L_3^2) \\
-\frac{bc^2}{a} + \frac{y_p(x_p - by_p)}{a} &= \lambda^2 (L_1L_5 + L_2L_6 + L_3L_7)
\end{aligned} \right\} (4)$$

未知量は次の順序で求まる。

$$\left. \begin{aligned}
 \lambda^2 &= 1 / (L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2) \\
 y_p &= \lambda^2 (L_5 L_9 + L_6 L_{10} + L_7 L_{11}) \\
 c^2 &= \lambda^2 (L_5^2 + L_6^2 + L_7^2) - y_p^2 \\
 \frac{b}{a} &= \frac{\lambda^2}{c^2} \{ y_p (L_1 L_9 + L_2 L_{10} + L_3 L_{11}) \\
 &\quad - (L_1 L_5 + L_2 L_6 + L_3 L_7) \} \\
 \frac{1}{a} &= \{ \lambda^2 (L_1^2 + L_2^2 + L_3^2) \\
 &\quad - \lambda^4 (L_1 L_9 + L_2 L_{10} + L_3 L_{11}) \} / c^2 - \left(\frac{b}{a} \right)^2 \\
 x_p &= a \lambda^2 (L_1 L_9 + L_2 L_{10} + L_3 L_{11}) + b y_p
 \end{aligned} \right\} (5)$$

上式で λ^2 は縮尺係数になっていることに注意されたい。式(3)の L の行列の (3, 4) 要素を 1 に置いたが、この代わりに $L_5^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2 = 1$ と置いても同様の議論が成り立つ⁹⁾。

参 考 文 献

- 1) Bopp, H and H. Krauss: An Orientation and Calibration Method for Non-topographic Applications, PE & RS, Vol. 44, No. 9, 1978, pp. 1191-1196
- 2) Wong, K.W.: Mathematical Formulation and Digital Analysis in Close-Range Photogrammetry, PE & RS, Vol. 41, No. 11, Nov. 1975, pp. 1355-1373
- 3) Faig, W: Calibration of Close-Range Photogrammetric Systems-Mathematical Formulation, PE & RS, Vol. 41, No. 12, Dec. 1975, pp. 1479-1486
- 4) 服部 進: 非地形写真測量のキャリブレーション法, 写真測量とリモートセンシング, Vol.25, No. 4, 1986, pp.19-25
- 5) Fraser, C.S.: On the Use of Nonmetric Cameras in Analytical Close-Range Photogrammetry, The Canadian Surveyor, Vol. 36, No. 3, Sep. 1982, pp. 259-279
- 6) 岡本 厚: 写真の一般標定論, 写真測量学会年次学術講演論文集, 1981年 5 月, pp.65-70
- 7) A.Okamoto: Orientation and Construction of Models, Part I; The Orientation Problem in Close-Range Photogrammetry, PE & RS, Vol. 47, No. 10, 1981 pp. 1437-1454,
- 8) Granshaw, S.I.: Bundle Adjustment Methods in Engineering Photogrammetry, Photogrammetric Record, Vol. 10, No. 56, Oct. 1980, pp. 181-207
- 9) Faugeras, O.D. and G.Toscani: Camera Calibration for 3D Computer Vision, Proc. International Workshop on Industrial Applications of Machine Vision and Machine Intelligence, 1986, pp. 240-247