2つの平均二乗誤差

Two Dissimilar Semantics of Mean Square Error

小林 和夫*

Kazuo KOBAYASHI

Abstract: We have been provided confusion to some extent by several explanations of dissimilar meanings with respect to a scientific terminology.

This paper shows a semantic problem concerning stochastic error term stood for “mean square error” (MSE) which does not exhibit only “root of mean of squared errors” in surveying and photogrammetry, but also indicates “average of squared errors” (or residuals) in statistics.

Therefore, it is highly recommended even in surveying and photogrammetry that precision and accuracy illustrated a dispersion and an extent of measurements, respectively, should be utilized variance and MSE (square of “RMS” (root mean square) error) which can be obtained with sum of squared differences between measurements and most probable parameter (or true value), divided by number of observations, or redundancy of them. Similarly, definition of “MSE” in statistics makes variance added to squared bias (systematic error).

1. はじめに

科学技術用語において、同義語で表現の異なる用語が、また同一表現で意義の異なる用語が存在することがある。このようなカオスは、初心者にとって、学習理解の妨げになることは否定できない。

ここでの問題は、「平均二乗誤差」の用語に関する問題である。本報は、『平均二乗誤差には、2通りの解釈が存在する』という建石氏の問題提起¹⁾に基づき、調査検討を試みたものである。その2つの解釈とは、次のとおりである。

解釈①：平均二乗誤差（測量学）＝ [分散の平方根]

解釈②：平均二乗誤差（統計学） $\supset$ [分散]

解釈①では、平均二乗誤差が分散の平方根すなわち標準偏差（または標準誤差）を表すものとして測量学等で用いられてきたことを意味する。これに対し、解釈②は、統計学において分散（標準偏差の平方）は狭義の平均二乗誤差として使用されてきたことを表す。

すなわち、統計学では平均二乗誤差は分散に等しい場合もあるが、分散より一般的であり、広義の意味をもつ。

2. 標準偏差と同義語

標準偏差と同意義とみなせる用語が、掲載されている「測量学・写真測量等の分野における内外国の30冊の専門書」及び「写真測量関係の30部の論文」を任意抽出しまとめたものは、別表—1及び2に示してある。それらの表に基づき統計的処理を行うにあたり、同一の専門書等で標準偏差、または標準誤差等の2つ以上の用語が使用されている場合には、それぞれ1個の用語として集計した。さらに、“mean error”, “mittlerer Fehler”【独語】、及び平均誤差は中等誤差の範疇に入る。また、二乗平均誤差及び自乗平均誤差は平均二乗誤差とみなし、それらが同一専門書に重複して現れる場合には1個の平均二乗誤差の用語として加算した。

得られた標準偏差に同意義とみなせる主な用語は、平方誤差 (square error)、中等誤差 (mean error)、標準誤差 (standard error)、平均二乗誤差 (mean

*近畿測量専門学校

「写真測量とリモートセンシング」Vol. 30, No. 3, 1991

square error [MSE]), 標準偏差 (standard deviation), 及び RMS 誤差 (root mean square error [平均二乗誤差の平方根]) であった。

図1 標準偏差に同意義な用語の使用度数分布

図一1は、別表一1及び2を集計した6個の用語を横軸に、これに対する使用度数(%)を縦軸にプロットしたものである。それらの用語の全度数は92個(100%)である。同図に示すように、各用語の度数は、平方誤差1.1%, 中等誤差13.0%, 標準誤差19.6%, 平均二乗誤差19.6%, 標準偏差34.7%, 及びRMS誤差12.0%であった。

平方誤差は、最も低い度数を示し、これは一般に認められなかった用語であると考えられる。

中等誤差は、13.0%の度数であって、Gaussが最小二乗法を開発し、また“mittlerer Fehler”(中等誤差)を用いたこともあって、かなり一般に支持されたものといえるが、しかし現在ではほとんどの専門書で()記号で記されているから、中等誤差は古典語になりつつあると推定できる。

標準偏差は、n個の測定値と平均値(真値を含む)との差(誤差)を平方した値の平均値の平方根として求められる。標準偏差の度数は、34.7%と最も高く、広

く一般に用いられていることを実証している。

測定値の真値は未知であるから、n個の測定値と真値の代わりの平均値との差(残差)を平方した総和を(n-1)で割った値の平方根を標準誤差という。この度数は、比較的高く19.6%に達し、一般的に用いられていることが分かる。

平均二乗誤差(分散の平方根と同じ次元)は、標準誤差と同じ19.6%の高い度数を示す。

RMS誤差(root mean square error)は、比較的新しい用語で、1958年以前には余りみられなかったもので、その使用の増加は、1970年以降と思われる。したがって、RMS誤差の度数が短い期間にもかかわらず12.0%に上っていることは、この用語が最近かなり高い使用率となっていると評価できる。

以上の用語のうち、平均二乗誤差(分散の平方根と同じ次元)が測量学や写真測量の分野で広く用いられてきたのは、次の理由によると推定できよう。

- ① 音韻がよい
- ② 意味内容が正確に表現されている
- ③ 学術用語としての重量感がある
- ④ 4個以上の単語が結合されていないこと

だが、建石氏の疑問¹⁾のとおり、②の条件は満たされていない。「測量学において平均二乗誤差は分散でなく、標準偏差または標準誤差に等しい次元のものと考えるのが慣習」といっても、平均二乗誤差は意味論的に考察すると「平方した誤差の平均」すなわち分散(標準偏差の平方)と同一次元のものとししか解釈できないのではなかろうか。

3. 用語「平均二乗誤差」の考案

Rainsfordの著書²⁾の精度の節において、『標準誤差は分散の平方根で、測量学の分野において“mean square error”がよく使われている。Gaussは、それと同じ意味で“mean error”と表した』と述べている。ここでいう“mean error”は、Gaussの使用した“mittlerer Fehler”の直訳と考えられる。これは、日本語に翻訳しても「平均誤差」または「中等誤差」となる。しかしながら、誤差の絶対値の平均である“average error”(“durchschnittlicher Fehler”【独語】:平均誤差)と同意義の“mean error”(平均誤差)が存在し、標準偏差(標準誤差)を意味する“mean error”(平均誤差)と混同して用いられている。Rainsfordが、

それらの2つの異なる誤差の“mean error”をあえて記しているのも事実である。

Gauss は Theoria Motvs³⁾において、太陽の運動軌道の最確値を求めるため、最小二乗法を用いたことを記し、『最小二乗の期待値(W)は、観測値が同じ精度ならば、観測値と計算値(平均値)との差(v)の平方の和を最小にすることである』と述べている。その期待値を $W = vv + v'v' + v''v'' + \text{etc.}$ と表した。このWは、平均二乗誤差を求める際に必要な残差(v)の平方和を示す。

さらに、Rainsford は『Gauss が、一最小二乗法は“mean square error”を最小にすることであると記している』と述べているから、これが事実ならば、Gauss は“mean square error”を表す“mittlerer Fehlerquadrat”【独語】(平均二乗誤差)を用いた可能性がある。もしも、それが最初に用いたものならば、Gauss は統計学で用いられている平均二乗誤差(分散と同次元)の考案者ということになる。

Gauss の最小二乗の期待値に基づく、「平均二乗誤差の平方根」を表す RMS 誤差(RMSE)は、当時の用語作成法において、余りにも長い用語であるので(英米語では、4つ以上の名詞等を連ねた合成語を作成することを嫌う慣習があったことから)、その用語の短縮を考えたものと推測される。そこで、仮に、“root mean square error”の4つの単語の内3つ以下を選んで、RMS 誤差を意味する短縮用語の造語を試みると、次のようになる。

- ① root mean error (平均誤差の平方根)
- ② root square error (二乗誤差の平方根)
- ③ root error (誤差の平方根)
- ④ mean square error (平均二乗誤差)
- ⑤ mean error (平均誤差=中等誤差)
- ⑥ square error (二乗誤差=平方誤差)

以上に示す6通りの短縮用語について簡単に考察してみよう。

①は、求めた誤差の測度の単位が測定値の単位の平方根になっている。

②は、“square error”が複数存在するとして、仮にそれらの総和の平方根と解釈すると、“root square error”は RMS 誤差に近い用語となる。しかし、「平均」の意味が失われている。

③によって、RMS 誤差を想像することは困難である。

④については、“mean”の語があるので、“error”は複数存在し、それらを平方し、その平均を導いたものと解釈できる。つまり、“mean square error”は、統計学で用いられる平均二乗誤差(分散と同次元)に一致する。

⑤にも“mean”があるので、“error”は複数存在する。しかし、誤差の総和はゼロになるから、誤差を絶対値にして、その平均を求めなければならない。これは、統計学的処理法であって、“mean error”は“average error”を表すと解釈できる。

⑥からは、RMS 誤差を想定することは困難である。

以上に示すとおり、RMS 誤差とみなせる短縮用語はないと言わねばならないだろう。ただし、①～③の用語の使用例は認められないが、④～⑥は実在する。

4. 精度と正確さ

前節では標準偏差についてのいくつかの同義語をあげたが、統計学的にもう少し詳しく述べると、標準偏差と平均二乗誤差(MSE)とは意味の異なる用語であるといわねばならないのである⁴⁾。その相違は、以下に述べる精度と正確さの違いに相当する。

図2 バイアス(偏り)のある予測値

図一2は、精度(precision)と正確さ(accuracy)の概念を説明するために用いる図である。精度は同一確率変数の観測値の集合間における相似性の度合いといえる。その確率分布の広がり、または散布度は精度の1つの表示と定義する。観測値の精度は、分散または標準偏差(標準誤差)で表される。

同図において、その3つの分布のうち x_2 は最も低い精度であり、 x_3 は最も高い精度を表す。

これに対し、正確さは真値 (μ) を含むパラメータのまわりの予測値の拡張度と定義する。図-2 に示すように、 x_1 と x_2 の精度は異なるが、それらの正確さはほぼ同じである。しかし、その3つの確率分布において x_3 の正確さは最も悪い。したがって、 x_3 の精度は最も高いが、その正確さは最も低いことになる。

精度と正確さの違いは、バイアス (bias) すなわち系統的誤差 (systematic error) の存在に関係する。精度は確率誤差のみを、正確さは確率誤差に加えて系統的誤差 (バイアス) の両者を含んでいる。統計学上、精度として標準偏差または分散が、正確さとして RMS 誤差 (RMSE) または平均二乗誤差 (MSE) が用いられる。

ある確率変数 x の平均二乗誤差 ($MSE(x)$) は、次式で求められる。

$$MSE(x) = m^2 = E[(x - \mu)^2] \quad \text{.....(1)}$$

ここで、 m は x の RMS 誤差であり、 μ は真値を含むパラメータを表す。

平均二乗誤差 (MSE) の使用例を以下に示す。

図3 バイアスのある観測値 X の確率分布例

図-3 はある観測値 X の確率分布を示す。 X の正確さ (平均二乗誤差 $MSE(X)$) は、観測値 X と真値 μ_x との差により、次のように導かれる。

$$\begin{aligned} MSE(X) &= m^2 = E[(X - \mu_x)^2] \\ &= E[\{(X - E(X)) + (E(X) - \mu_x)\}^2] \\ &= E[(X - E(X))^2] + E[(E(X) - \mu_x)^2] \\ &\quad \text{.....(2)} \end{aligned}$$

上式における第1項及び第2項は、それぞれ X の分散 ($Var(X)$) 及び X の系統的誤差、すなわちバイアス ($Bias(X)$) の平方を表す。

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2] \quad \text{.....(3)}$$

$$Bias(X) = E(X) - \mu_x \quad \text{.....(4)}$$

平均二乗誤差は、以下に示すモーメントの概念によっても導くことができる。

もし、 $x_1, x_2, \dots, x_n$ は N 個の確率変数 x とするとき、次式で求まる量は

$$\bar{x}^r = \frac{x_1^r + x_2^r + \dots + x_n^r}{N} = \frac{\sum x_i^r}{N} = E(x^r) \quad \text{.....(5)}$$

r 次のモーメントと呼ばれる。そして、 $r=1$ のとき、 $\bar{x}$ は算術平均となる。ここで、 N は観測値の数である。

次に平均値 $\bar{x}$ のまわりの r 次のモーメントは

$$m_r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^r}{N} = E[(x - \bar{x})^r] \quad \text{.....(6)}$$

によって導かれる。そこで、 $r=2$ とするとき、 m_2 は分散になる。したがって、分散は平均値のまわりの2次のモーメントを表す。

任意の原点 μ (真値を含む) のまわりの r 次のモーメントは

$$m_r' = \frac{\sum (x_i - \mu)^r}{N} = E[(x - \mu)^r] \quad \text{.....(7)}$$

で表される。この式において $r=2$ のとき、 m_2' は観測値の正確さを表す平均二乗誤差 (MSE) に相当する。すなわち、式1及び2に示した $MSE(X)$ と同じになる。

5. おわりに

ここに、測量・写真測量という分野ではどうしても誤差論における「標準偏差」の概念は避けておれず、また標準偏差を意味する同義語が今日に至るまでに数多く存在することは、それだけ重要な用語であることを物語っている。

平均二乗誤差という用語には、2つの意義があるというのは事実で、測量学(写真測量)においては標準偏差を、統計学では狭い意味で分散を表してきた。しかし、この用語を単純に、そしてまた過去の測量的慣例をとりあえず除外して意味論的に解釈するとき、前者の解釈にはどうしても無理があるように思われる。したがって、その2つの解釈の両立性を認めるわけにはいかなないように思えるのである。

現在、測量学や写真測量の分野における欧米の学会誌や論文集では、標準偏差を意味する従来の解釈での平均二乗誤差 “mean square error” (MSE) の使用は、

非常に少なくなってきた。しかしながら、我国の測量学等の専門書や論文で、標準偏差を平均二乗誤差によって表現している例は依然として少なくない。今回調査した限り、統計学において標準偏差を平均二乗誤差で表した例は、ないことが判った。言語としての専門用語は、語彙が厳密に伝達されていなければならないことは当然であるから、測量学や写真測量において標準偏差を表す「平均二乗誤差」の用語は、ここで改めるべきかどうかの論議が大いに期待される。なお、測量士等の国家試験では、理由は不詳であるが10数年ほど前から、平均二乗誤差の記述は完全に消え、これに代わり標準偏差が専ら用いられていることを付記しておく。

しかしながら、統計学において厳密に言えば、分散と平均二乗誤差($MSE = \text{RMS 誤差の平方}$)とは異なることに注意しなければならない。平均二乗誤差(MSE)は分散とバイアスの平方の合計誤差を表し、平均二乗誤差はバイアスのないとき、分散に等しくなる。

したがって、測量学や写真測量等において誤差を論じるときには、観測値の『精度』は分散（または標準

偏差）、『正確さ』は平均二乗誤差（または RMS 誤差）により表す統計学的センスに注目しなければならないのではなかろうか。

いずれにしても、今後は本来の意味を正確に伝える用語の使用が望まれる。

謝 辞

本問題を提起し種々の指摘をいただいた千葉大学建石隆太郎先生、及び本稿について助言をいただいた近畿測量専門学校清水彊先生には、ここに感謝の意を表す。

参 考 文 献

- 1) 建石隆太郎：MSE と RMSE，写真測量とリモートセンシング，Vol. 28, No. 5, p. 48, 1989年
- 2) Rainsford, H. F.: Survey Adjustments and Least Squares, pp. 1-41, Constable, London, 1957.
- 3) Gauss, K. F.: Theoria Motus (Theory of the Motion of the Heavenly Bodies Moving about the Sun in Conic Sections, transl. by C. H. Davis), pp. 249-273, Dover, New York, 1857.
- 4) Mikhail, E. M.: Observations and Least Squares, pp. 43-44, Thomas Y. Crowell, New York, 1976.

別表 1 標準偏差に同意義な用語を使用した参考文献一覧表（書籍）

No.	発行年	著者	書籍（発行所）	使用用語
1	1955	大森又吉	測量学教程応用編 （日本測量協会）	平均二乗誤差 （二乗平均誤差） 標準誤差・中等誤差 （平均誤差） 中等誤差
2	1955	丸安隆和	新制測量（下） （オーム社）	中等誤差
3	1955	齋藤鶴夫	基準点測量の実際 （オーム社）	自乗平均誤差・中等誤差・標準誤差・平方誤差
4	1956	Tienstra, J. M.	Theory of the Adjustment of Normally Distributed Observations (NV Uitgeverij)	mean (square) error standard error standard deviation
5	1957	塚本正文	測量計算法 （理工図書）	標準誤差・中等誤差・自乗平均誤差
6	1957	Rainsford, H. F.	Survey Adjustments and Least Squares (Constable)	standard error
7	1958	Jordan (Eggert, Kneissl)	Handbuch der Vermessungskunde (J. B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung)	mittlerer Fehler
8	1958	FIG	Dictionnaire Multilingue de la F. I. G.	mittlerer Fehler mean square error root mean square error standard error standard deviation 標準誤差
9	1960	谷本勉之助	測量計算法 （森北出版）	標準誤差
10	1960	Hallert, B.	Photogrammetry (McGraw-Hill)	mean square error standard error standard deviation
11	1961	Spiegel, M. R.	Schaum's Outline Series "Theory and Problems of Statistics" (McGraw-Hill)	standard deviation standard error
12	1966	Davis/Foote/Kelly	Surveying (McGraw-Hill)	standard error
13	1968	森口繁一	初等数理統計学 （培風館）	標準偏差
14	1968	竹田通治	測量学概論 （山海堂）	平均二乗誤差・中等誤差

No.	発行年	著者	書籍（発行所）	使用用語
15	1971	Hirvonen, R. A.	Adjustment by Least Squares in Geodesy and Photogrammetry (Fredrich Ungar)	mean error root mean square error standard error
16	1972	小川幸夫	測量技術者必携 （理工図書）	平均二乗誤差
17	1973	Clark, D.	Plane and Geodetic Surveying (Vol. 2: Higher Surveying) (Constable)	standard deviation root mean square residual standard error
18	1974	Cooper, M. A. R.	Fundamental of Survey Measurement and Analysis (Granada)	standard deviation standard error
19	1974	日本測量協会	測量用語解説 （技報堂）	標準偏差・平均二乗誤差・中等誤差
20	1974	土木学会	土木工学ハンドブック （技報堂）	標準偏差・中等誤差
21	1975	中川徳郎	図解・測量士・測量士補受験演習 （現代理工学出版）	平均二乗誤差
22	1977	中村英夫／村井俊治	測量学 （技報堂）	標準偏差
23	1979	土橋忠則	測量計算の基礎演習 （東洋書店）	平均二乗誤差・標準偏差
24	1980	日本数学会	岩波数学辞典	標準偏差
25	1981	森忠次	測量学 2 応用編 （丸善）	標準誤差
26	1981	日本測量協会	現代測量学第一巻	平均二乗誤差・標準偏差
27	1981	日本測量協会	測量ハンドブック	平均二乗誤差（二乗平均誤差）・標準偏差
28	1983	田島稔	図解測量用語事典 （山海堂）	標準偏差・平均二乗誤差
29	1985	田島稔／小牧和雄	最小二乗法の理論と応用（東洋書店）	標準偏差・平均二乗誤差
30	1987	大野重保	測地学の方法 （東洋書店）	平均二乗誤差・標準偏差

別表2 標準偏差に同意義な用語を使用した参考文献一覧表（論文）

No.	発行年等	著者	論文（機関紙：発行所）	使用用語
1	1971. 8	Soliman, A. H.	Accuracy and Application (PE, ASP)	mean square error (MSE)
2	1971. 9	Hohle, J.	Reconstruction of the Underwater Object	standard deviation (SD)
3	1971. 11	Kenefick, J.	Ultra-Precise Analysis	SD
4	1972. 5	Kupfer, G.	Improvement of the Geometry of Aerial Photos (PE, ASP)	root mean square error (RMSE)
5	1972. 8	Wong, K. W. and et al.	Aerotriangulation by (PE, ASP)	standard error (SE)
6	1972. 11	Williams, H. S.	A Theorem in Least Squares (PE, ASP)	SD
7	1973. 10	Maarek, A.	New Math Model For Independent-Model Triangulation (PE, ASP)	RMSE
8	1973. 11	Veress, S. A. / M. Nasu	Triangulation with Santoni Sterosimplex IIC (PE, ASP)	SE
9	1973 (no. 3)	Stellingwerf, D. A.	Application of Area Volume Tables and Aspects of Their Construction (ITC Journal)	SD
10	1974. 5	van Roessel, J. W. and	SLAR Mosaics for Project RADAM (PE, ASP)	RMSE
11	1974. 9	Karara, H. M. and et al.	Accuracy Aspects of Non-Metric Imageries (PE, ASP)	RMSE
12	1974 (no. 2)	Visser, J. and et al.	OEEPE Oberschwaben Reseau-Investigations (ITC Journal)	SD
13	1974 (no. 3)	Stellingwerf, D. A.	Optimum Ratio of Plots for Aerial Volume and Aerial Volume Growth Regression Construction (ITC Journal)	SE
14	1974 (no. 5)	Visser, J.	Photogrammetry for Cadastral Surveys II (ITC Journal)	SD
15	1975. 1	Wong, K. W.	Propagation of Variance and Covariance (PERS, ASPRS)	RMSE
16	1975. 9	Erio, G.	Three-Dimensional Transformations of Independent Models (PERS, ASP)	RMSE
17	1975. 11	Erlandson, J. P.	Monitoring Deformations of Structures (PERS, ASPRS)	SE

18	1976 (no. 1)	Makaravić, B.	A Digital Terrain Model System (ITC Journal)	SD
19	1982 (no. 4)	Djazmati, S.	Digital Terrain Models for Detailed Highway Design and Construction (ITC Journal)	SD
20	1982 (no. 3)	尾崎幸男	空中三角測量の精度について (写真測量とリモートセンシング, JSPRS)	SD
21	1984 (no. 1)	森忠次他	ドラム走査型微小濃度計の位置精度検査法について (写真測量とリモートセンシング, JSPRS)	SD
22	1988 (no. 4)	Kure, J.	Guidelines in Establishing Mapping Specifications (ITC Journal)	SD
23	1988 (no. 6)	力丸厚他	画素内分光情報の簡易推定手法の開発 (写真測量とリモートセンシング, JSPRS)	MSE
24	1988 (no. 6)	吉野章男他	ガラス窓越しに見た水中被写体の写真測量 (写真測量とリモートセンシング, JSPRS)	中等誤差
25	1988 (no. 6)	新井康平他	SPOT-HRVの幾何学的性能評価 (写真測量とリモートセンシング, JSPRS)	SD
26	1989. 2	Malhotra, R. C.	Potential of Large Format Camera Photography (PERS, ASPRS)	SD
27	1989. 4	Rauhala, U. A. and et. al	Automated DTM Validation and Progressive Sampling Finite Element Array Relaxation (PERS, ASPRS)	RMS
28	1989. 4	Fryer, J. G. and et al.	Rapid Lens Calibration of a Video Camera (PERS, ASPRS)	SD
29	1989. 9	Civco, D.	Topographic Normalization of LANDSAT TM Digital Imagery (PERS, ASPRS)	SD
30	1989. 12	Merchant, D. C. and et al.	Aerial Photo System Calibration Over Flat Terrain (PERS, ASPRS)	RMS