カルマンフィルターのパラメータ推定における RLS 法の適用限界

A Limit of the Recursive Least Square Method
for the Parameter Estimation of Kalman Filter

瀬戸 要*・新井康平*

Kaname SETO and Kohei ARAI

Abstract: A limit of the RLS (Recursive Least Square) method for the parameter estimation of Kalman Filter is clarified based on the simulated time series of data from Time Variant AR (Auto-Regressive) model. Learning process is converged for the stationary time series of data while the process is diverged for the non-stationary time series of data. It is also found that the required time for the convergence depends on the degree of stationarity of time series of data.

Keywords: Kalman Filter, RLS method, Time Series Analysis, Parameter Estimation

1. まえがき

カルマンフィルター^{1),2)}は、非定常な信号や雑音を含む地球観測衛星データの時系列解析および予測を行うことを可能にする。

松岡・建石達は、時系列モデル (BRDF model; Bidirectional Reflectance Distribution Function model) [先験的知識] を用いて実際に観測されたリモートセンシングデータに対する反射率補正法を提案している³⁾。

著者達は、カルマンフィルターによる可降水量の時系列予測を試みている^{4),5),6),7),8)}。これら時系列の予測を可能にするためには、過去の時系列データから対象時系列の動的特性を抽出する必要がある。対象時系列の動的特性抽出に際し先験的知識を導入できない場合や、先験的知識を利用し、かつ、精度向上のためその残差の時系列を用いて対象とする動的特性の抽出を図るという場合も考えられる。このような場合、時系列データのみからその動的特性の抽出を行うための手法

が必要となる。動的特性を抽出する方法として RLS 法^{2),9),10)} (Recursive Least Square method; 逐次型最小 2 乗法) による逐次学習法がある。しかし、これは、線形定常過程と見做せる時系列データに対してのみ適用が可能である。

本論文では、RLS 法に基づく動的特性抽出手法の適用限界を明らかにする。線形定常過程および非定常過程を生成し、対象時系列の属性と適用限界との関係を明らかにしている。

2. RLS 法に基づくカルマンフィルター

カルマンフィルターは、信号や雑音を含む時系列データが非定常な過程で記述されるような場合にも適用できるようにそれまでのウィナーフィルターの理論を拡張したものである。

2.1 カルマンフィルターアルゴリズム

カルマンフィルターでは、一般的に時系列データの過程を

$$x_{t+1} = F_t x_t + u_t \quad (1)$$

$$y_t = H_t x_t + w_t \quad (2)$$

と表す。ここで、 $\bar{x}$ は x の平均を表し、 x^T は x の転置を表す。また、 x_t は時刻 t における状態を示し、 u_t はシステム雑音、 y_t は時刻 t における観測データ、 w_t は

*佐賀大学 知能情報システム学科
Dept. of Information Science, Saga University
佐賀市本庄 1

1 Honjo, Saga 840-8502 Japan

「写真測量とリモートセンシング」VOL. 39, NO. 1, 2000

Figure 1 Kalman Filter consists of the Measurement Update Algorithm [Equation (5), (6), and (7)] and the Time Update Algorithm [Equation (3), and (4)].

観測雑音, F_t は状態遷移行列, また, H_t は観測行列である。式(1), 式(2)はそれぞれ, 状態方程式, 観測方程式と呼ばれ, 両式の状態遷移および観測行列の要素を確定することによりカルマンフィルターを構成することができる。Figure 1 にカルマンフィルターの構成図を示す。

カルマンフィルターの状態 x_t の推定のための学習アルゴリズム(カルマンフィルター学習アルゴリズム)は, 時間更新アルゴリズム

$$\widehat{x_{t+1|t}} = F_t \widehat{x_{t|t}} \quad (3)$$

$$P_{t+1|t} = F_t P_{t|t} F_t^T + Q_t \quad (4)$$

および観測更新アルゴリズム

$$K_t = P_{t|t-1} H_t^T (H_t P_{t|t-1} H_t^T + R_t)^+ \quad (5)$$

$$\widehat{x_{t|t}} = \widehat{x_{t|t-1}} + K_t (y_t - H_t \widehat{x_{t|t-1}}) \quad (6)$$

$$P_{t|t} = P_{t|t-1} - K_t H_t P_{t|t-1} \quad (7)$$

とから成る。ここで, $\widehat{x}$ は x の推定値を表し, $(H_t P_{t|t-1} H_t^T + R_t)^+$ は $(H_t P_{t|t-1} H_t^T + R_t)$ の Moore-Penrose 型一般化逆行列を表す。また, 添字の $t|t-1$ は $t-1$ から t へ遷移する変数を意味している。ただし,

$$E[u_k] = \overline{u_k} = 0 \quad (8)$$

$$E[(u_k - \overline{u_k})(u_l - \overline{u_l})^T] = \delta_{k,l} \cdot Q_k \quad (9)$$

$$E[w_k] = \overline{w_k} = 0 \quad (10)$$

$$E[(w_k - \overline{w_k})(w_l - \overline{w_l})^T] = \delta_{k,l} \cdot R_k \quad (11)$$

$$E[x_0] = \overline{x_0} \quad (12)$$

$$E[(x_0 - \overline{x_0})(x_0 - \overline{x_0})^T] = P_0 \quad (13)$$

$$\delta_{k,l} = \begin{cases} 1 & k=l \\ 0 & k \neq l \end{cases} \quad (14)$$

を仮定する。

2.2 自己回帰モデルと逐次型最小 2 乗法 (RLS 法)

次数 d の n 次元自己回帰モデル

$$\xi(t) = \sum_{j=1}^d B_j \xi(t-j) + \nu(t) \quad (t=0, 1, \dots) \quad (15)$$

の未知係数行列 $B_j (j=1, 2, \dots, d)$ の推定に際し, 以下のようにしてカルマンフィルターを構成することができる。

$$z(t+1) = z(t) \quad (16)$$

$$\xi(t)^T = H_t z(t) + \nu(t)^T \quad (17)$$

ただし,

$$z(t) = \begin{bmatrix} B_1^T \\ B_2^T \\ \vdots \\ B_d^T \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$H_t = [\xi(t-1)^T, \xi(t-2)^T, \dots, \xi(t-d)^T] \quad (19)$$

である。式(16)および式(17)に対してカルマンフィルター学習アルゴリズムを適用したものが RLS 法である。

3. 適用限界

3.1 実験概要

今回は、マイクロ波放射計 SSM/I (Special Sensor of Microwave/Imager) 19.3GHz 垂直偏波観測輝度データ (64次元) のあるラインのみに注目して、それをスカラー時系列と見做す。SSM/I を搭載している DMSP (Defence Meteorological Satellite Program) 衛星 [準回帰軌道] の進行方向に時間軸をとる。なお、各ラインにおける観測輝度データは、互いに独立であるとする。これにより、観測輝度データ (64次元) をスカラー時系列と見做すことができる。以下、このスカラー時系列を SSM/I 時系列と呼ぶ。SSM/I 時系列から動的特性および統計的属性を抽出し、それを実現する自己回帰モデルのパラメータに反映し、当該モデルから生成される時系列を用いて RLS 法に基づく動的特性抽出手法の適用限界を明らかにすることを試みる。SSM/I 時系列は、0 ~ 255 の整数値を持ち、平均 121.75 程度、標準偏差 54.97 程度である。SSM/I 時系列の部分時系列に対する自己相関関数 $L(\tau)$ を Figure 2 に示す。Figure 2 は、SSM/I 時系列が非定常性を有していることを示している。

3.1.1 シミュレーションデータ生成

次数 d_0 の時変スカラー自己回帰モデル

$$y(t) = \sum_{j=1}^{d_0} A_j(t)y(t-j) + v(t) \quad (t=0, 1, \dots) \quad (20)$$

により生成される時系列を用いる。 $v(t)$ は、平均 0.0、標準偏差 β の正規白色雑音である。ここでは、次数 d_0 および時変係数 $A_j(t) (j=1, 2, \dots, d_0)$ を平均 0.0、標準偏差 α の正規乱数 $N(0.0, \alpha)$ により $\eta_j(t)$ を生成し、 $A_j(t) = \hat{a}_j + \eta_j(t) \quad (t=0, 1, \dots)$ (21)

を用いて時変係数 $A_j(t) (j=1, 2, \dots, d_0)$ を設定した。また、

$$\beta = \sqrt{(\hat{\beta}_{d_0})^2 \times \gamma} \quad (\gamma > 0) \quad (22)$$

を用いて標準偏差 β を設定した。ただし、 $\hat{a}_j$ は SSM/I 時系列に対する次数 d_0 における正規方程式の解であり、 $\hat{\beta}_{d_0}$ は SSM/I 時系列に対する次数 d_0 における正規方程式の解 $\hat{a}_j$ による残差の時系列の標準偏差である。

これら d_0 および標準偏差 α および標準偏差 β をそれぞれ変化させることにより、任意のスカラー時系列データを生成した。なお、 $\alpha=0$ の時、式 (20) は、 $A_j(t) = \hat{a}_j$ となるので、時不変スカラー自己回帰モデルとなる。また、標準偏差 α の値を大きくすると、時変性・非線形性が強くなる。さらに、 $\gamma=1$ の時、 $\beta = \hat{\beta}_{d_0}$ となる。

3.1.2 評価関数

観測データに対する動的特性抽出率を調べるために、評価関数として、

$$J1(t) = \sqrt{\frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} \|y^*(i) - y(i)\|^2} \quad (23)$$

を用いる。ただし、 t は任意の時刻であり、 N_t は時刻 t までのデータの個数である。また、 $y^*(i)$ は時刻 i に

Figure 2 Autocorrelation function at the different time of the SSM/I 19.3 GHz vertical polarization of data of interest (It shows that the time series of data is time variant so that the coefficients of the AR model should be time variant in order to fit to the SSM/I of data).

おける推定データであり、 $y(i)$ は時刻*i*における正解データである。

有効な動的特性抽出（学習）が行われていれば、時刻*t*が増加するにしたがい、 $J1(t)$ の値は減少する。

3.2 実験結果

時変自己回帰モデルの次数 d_0 および標準偏差 α および標準偏差 β をそれぞれ変化させることによりスカラ-時系列を複数生成した。今回は、 $d_0=5,100, \alpha=0.00, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, \gamma=0.70, 1.00, 1.50, 2.00, 2.50$ とそれぞれ変化させた。すなわち、60種類のスカラ-時系列を生成した。そして、生成された時系列の動的特性抽出手法としてはRLS法を用いた。RLS法を構成する際の次数 d [式(15)参照]は、 $d=5$ とした。

学習の収束判定条件は、

$J1(t) \leq const1 = 25.0$ (24)

$|J1(t) - J1(t-1)| \leq const2 = 0.01$ (25)

とした。

3.2.1 $d_0=5$ の場合

$d=d_0$ の場合である。

t が増加すれば、 α の値が小さい（時不変性が強い）方が $J1(t)$ の値は小さくなることを確認した。これは、学習効率が α の値に依存することを示している。

各パラメータ（ d_0, α, γ ）による $J1(t)$ の推移は、ほぼ同じ傾向であるので、 α を固定し（ $\alpha=0.00$ ） γ を変化させた（ $\gamma=0.70, 1.00, 1.50, 2.00, 2.50$ ）場合の結果を

Figure 3に例示する。

Table 1は、学習の収束判定条件 [式(24)かつ式(25)]を初めて満たす $J1(t)$ の値とその $t=t_0$ の値を示す。Figure 4は、式(24)を初めて満たす $J1(t)$ の値と学習の収束判定条件を初めて満たす $J1(t)$ の値とを示す。

3.2.2 $d_0=100$ の場合

$d \ll d_0$ の場合である。 α および β に大きく影響する時系列の場合である。

$\alpha=0.00 \sim 0.01$ の場合は $J1(t)$ の値は t が増加するにしたがい減少する傾向にあり、 $\alpha=0.02 \sim 0.05$ の場合は $J1(t)$ の値は t が増加するにしたがい増加する可能性があることを確認し、 α の値が増加するに伴い $J1(t)$ の値の最小 $J1_{min}$ が大きくなることを確認した。すなわち、 $\alpha=0.00$ の場合 $J1_{min}=10$ 程度、 $\alpha=0.01$ の場合 $J1_{min}=15$ 程度、 $\alpha=0.02$ の場合 $J1_{min}=20$ 程度、 $\alpha=0.03$ の場合 $J1_{min}=25$ 程度、 $\alpha=0.04$ の場合 $J1_{min}=35$ 程度、 $\alpha=0.05$ の場合 $J1_{min}=45$ 程度であった。また、 α の値が増加するにしたがい、 $J1(t)$ の値が増加し始める時点 t_1 が早くなることを確認した。すなわち、 $\alpha=0.00 \sim 0.01$ の場合 $J1(t)$ は減少傾向にあり、 $\alpha=0.02$ の場合 $t_1=120$ 程度、 $\alpha=0.03$ の場合 $t_1=100$ 程度、 $\alpha=0.04$ の場合 $t_1=80$ 程度、 $\alpha=0.05$ の場合 $t_1=50$ 程度であった。

Table 2は、学習の収束判定条件 [式(24)かつ式(25)]を初めて満たす $J1(t)$ の値とその $t=t_0$ の値を示す。Table 2において“-”の表記は、式(24)を満た

Table 1 Root Mean Square Error: RMSE, $J1(t)$ at which the learning process is converged as function of variance of the coefficients of the fifth order of Autoregressive Model: AR of time series of simulation data.

α	γ	$J1(t)$	α	γ	$J1(t)$	α	γ	$J1(t)$
0.00	0.70	13.16(165)	0.02	0.70	12.97(165)	0.04	0.70	18.28(75)
	1.00	14.18(165)		1.00	19.42(77)		1.00	13.67(155)
	1.50	14.96(165)		1.50	15.67(144)		1.50	19.60(89)
	2.00	17.38(150)		2.00	16.39(150)		2.00	20.31(89)
	2.50	17.41(144)		2.50	17.62(150)		2.50	17.24(153)
0.01	0.70	12.67(165)	0.03	0.70	18.20(77)	0.05	0.70	20.01(58)
	1.00	13.60(165)		1.00	14.46(144)		1.00	14.00(153)
	1.50	19.93(77)		1.50	20.70(75)		1.50	22.10(58)
	2.00	17.28(144)		2.00	19.80(89)		2.00	21.85(68)
	2.50	23.03(77)		2.50	21.47(89)		2.50	17.99(159)

Table 2 RMSE, $J1(t)$ at which the learning process is converged as function of variance of the coefficients of the 100th order of AR Model of time series of simulation data.

α	γ	$J1(t)$	α	γ	$J1(t)$	α	γ	$J1(t)$
0.00	0.70	11.21(111)	0.02	0.70	20.28(93)	0.04	0.70	-(-)
	1.00	8.44(76)		1.00	17.47(87)		1.00	-(-)
	1.50	10.76(38)		1.50	18.39(89)		1.50	-(-)
	2.00	9.31(104)		2.00	17.53(104)		2.00	-(-)
	2.50	12.05(44)		2.50	18.29(113)		2.50	-(-)
0.01	0.70	18.87(181)	0.03	0.70	-(-)	0.05	0.70	-(-)
	1.00	22.03(230)		1.00	-(-)		1.00	-(-)
	1.50	15.06(181)		1.50	24.29(86)		1.50	-(-)
	2.00	18.35(53)		2.00	23.68(83)		2.00	-(-)
	2.50	20.33(53)		2.50	24.67(79)		2.50	-(-)

Figure 3 The transient responses of RMSE, $J1(t)$ as a function of learning step, t . (α : fixed ($\alpha=0.00$), γ : variable ($\gamma=0.70, 1.00, 1.50, 2.00, 2.50$)) [$d_0=5$]

Figure 4 RMSE, $J1(t)$ at which the learning process is converged as function of variance of the coefficients of the 5th order of AR Model of time series of simulation data.

Figure 5 RMSE, $J_1(t)$ at which the learning process is converged as function of variance of the coefficients of the 100th order of AR Model of time series of simulation data.

Figure 6 The transient responses of RMSE, $J_1(t)$ as a function of learning step, t . (α : fixed ($\alpha=0.02$), γ : variable ($\gamma=0.70, 1.00, 1.50, 2.00, 2.50$)) [$d_0=100$]

さないことを表している。Figure 5 は、式 (24) を初めて満たす $J_1(t)$ の値と学習の収束判定条件を初めて満たす $J_1(t)$ の値とを示す。Figure 5 において $\alpha=0.00\sim 0.02$ の範囲で表されているが、これは $\alpha=0.03$ 以上では式 (24) を満たさない場合があるからである。

学習の発散過程を Figure 6 に例示する。Figure 6 は、 α を固定し ($\alpha=0.02$) γ を変化させた ($\gamma=0.70, 1.00, 1.50, 2.00, 2.50$) 場合の結果である。

4. 考 察

以上の結果から、 $\alpha=0.01$ の範囲で RLS 法に基づく

動的特性抽出手法は、有効な学習を行っていると考えられる。学習効率 α の値に依存することを示している。また、次数 d_0 が小さい場合は、有効な学習を行っているが、次数 d_0 が大きい場合は、有効な学習を行っているとは限らないことが判る。動的特性を支配する時間間隔が長いほど、RLS 法に基づく動的特性抽出手法による学習が困難であることを示している。

5. あとがき

次数 d_0 の小さい、時変性の小さい場合の時変自己回帰モデルから生成された時系列に対しては、有効な学

習が行われることが判った。次数 d_0 の小さい場合の時変自己回帰モデルから生成された時系列に対しては、学習の効率は時変性の大きさに依存することが判った。次数 d_0 の大きい場合の時変自己回帰モデルから生成された時系列に対しては、時変性の小さい場合は有効な学習が行われることを確認したが、時変性の大きさによっては学習が発散することが判った。

時変性の強い時系列に対して、RLS 法を適用することは困難であることを確認できた。

(受付日1999.11.9, 受理日2000.1.13)

参考文献

- 1) R.E. Kalman: "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems," Trans. ASME, J. Basic Eng., **82D**-1, 35/45, (1960).
- 2) 片山 徹: "応用カルマンフィルタ", 朝倉書店, (1983).
- 3) 松岡 真如, 建石 隆太郎: "時系列モデルを用いた AVHRR データにおける反射率の補正に関する研究", 写真測量とリモートセンシング, **37**-2, 4/14, (1998).
- 4) Kohei Arai: "Detecting Algorithm for Rainfall Area Movement Based on Kalman Filtering", Proceedings of the NSCAT/SWT Workshop, Kyoto, (1995).
- 5) Kohei Arai and Kaname Seto: "Rain Flagging with SSM/I based on Kalman Filter with a new parameter estimation", Proceedings of the NSCAT/SWT Workshop, Hawaii, (1997).
- 6) 新井 康平, 瀬戸 要: "系の非線形性を考慮したパラメータ推定を伴うカルマンフィルタに基づく時系列解析", 第24回日本リモートセンシング学会学術講演会論文集, (1998).
- 7) 新井 康平, 瀬戸 要: "RLS 法によるカルマンフィルタのパラメータ推定における欠測データに対する扱い", 第26回日本リモートセンシング学会学術講演会論文集, (1999).
- 8) 瀬戸 要, 新井 康平: "欠測の多い可降水量予測における RLS 法に基づくカルマンフィルタ", 日本リモートセンシング学会九州支部研究発表会論文集, (1999).
- 9) Eweda Eweda: "Comparison of RLS, LMS, and Sign Algorithms for Tracking Randomly Time-Varying Channels," IEEE Trans. Signal Processing, **42**-11, 2937/2944, (1994).
- 10) 瀬戸 要, 新井 康平: "RLS 法に基づく欠測を多く含む時系列データの予測手法", 日本写真測量学会 [投稿中]