投影変換アルゴリズムの評価

Evaluation of Map Projection Converting Algorithms

飯倉 善和*

Yoshikazu IIKURA

Abstract : In digital maps, positions are usually given by latitude and longitude, while topographic maps and satellite images are projected on the UTM coordinate system. In order to overlay them, the map projections should be converted each other. In this report, we investigate error factors of the conversion and evaluate their accuracy. Based on these analysis, we propose a practical algorithm, of which accuracy is enough for the conversion of the topographic maps and satellite images.

1. はじめに

国土地理院などから発行される数値地図情報の多く(標高50m メッシュ, 海岸線&行政界ベクターなど)は緯度と経度を基本とする座標(経緯度座標)で与えられている¹⁾。一方, 地形図や衛星画像など2次元平面への投影が必要な場合には, ガウス・クリューゲル図法に基づく座標系(UTM 座標など)が用いられる。したがって, これらの情報を重ね合わせるためには, 2つの座標系の相互の変換が必要となる。

ガウス・クリューゲル図法における経緯度座標の2次元平面への投影については数学的な解析に基づく級数解が知られており, 理論的には誤差のない計算が可能である²⁾。しかし, 実用的には計算量と計算誤差を勘案した級数解の打ち切りが必要となる。2万5千分の1の地形図に基づいた多くの数値データの場合, 位置は10m, 標高は5 m程度の精度しか保証されていない³⁾。また, ランドサット TM の空間解像度は30mである。このような画像データとの重ね合わせにはどの

程度の変換式が必要なのであろうか。

数値地図ユーザーズガイド(以下ガイドと省略する)¹⁾には経緯度座標から UTM 座標へ変換するプログラム(FORTRAN)が掲載されている。またガイドの最新版の参考資料に紹介されている計算式に従えば逆変換のプログラムの作成も可能である。これらの変換式の精度は, より高次の変換式²⁾と比較することで0.1mm以内に納まることが確認できる。

本報告では, 投影変換における誤差要因とその大きさを具体的に評価するとともに, 衛星画像や地理情報の処理のための変換アルゴリズムを検討する。第2節では, 測地系やガウス・クリューゲル図法など投影変換に必要な基本的な概念を紹介する。第3節では数値計算における誤差要因を考える。第4節では, 変換アルゴリズムで重要な問題となる子午線弧長の計算方法について検討する。第5節では経緯度から UTM への相互変換式とその精度を評価する。第6節では計算の効率化を検討する。第7節はまとめである。

2. 基本的な概念と用語

2-1 測地系

地球の形が回転楕円体に非常に似た形をしていることは18世紀以降よく知られている²⁾。また, 回転楕円体は数学的な取扱いも容易であるため, ガウス・クリューゲル図法を始め多くの投影法で用いられている。我が

*弘前大学知能機械システム工学科
Dept. Intelligent Machines and System Engineering,
Hirosaki University
〒036-8561 弘前市文京町3番地
3 Bunkyo-cho, Hirosaki, 036-8561 Japan
「写真測量とリモートセンシング」VOL. 39, NO.3, 2000

国では、ベッセルが示した値をもとに測量法(第11条)により、赤道半径 a と扁平率 f が以下のように定義されている。

赤道半径：6,377,397.155m
 扁平率：1/299.152813

2-2 ガウス・クリューゲル図法

ガウス・クリューゲル図法は横メルカトル図法とも呼ばれる。回転楕円体を円筒に投影した心射円柱図法と混同されることが多いが、等角性を保証するために複素関数論を用いた厳密な取扱いが必要である。変換式を導出するには複素平面上に以下の解析関数 f を考える^{2),4)}。

$$ix + y = f(\phi + i\Delta\lambda) \tag{1}$$

ここで、 x, y を平面座標、 $\phi, \Delta\lambda$ を緯度および中央経線と経度差とする（ここで x 軸を虚数軸としたことに注意）。縮尺を中央経線上で正しくするためには、次の式が成立しなければならない。

$$y = f(\phi) = S_\phi \tag{2}$$

S_ϕ は赤道から緯度 ϕ までの経線の長さ（子午線弧長）であり、次の式で定義される。

$$S_\phi = \int_0^\phi R d\phi \tag{3}$$

ただし、子午線曲率半径 R は a を赤道半径、 e^2 を離心率として次のように表せる。

$$R = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^3}} \tag{4}$$

(1)式の中央経線の周りのテーラー展開における微係数を(3)式の関係式から逐次的に求めることにより、解を級数の形で求めることができる。なお、実際の計算では操作を簡単にするために緯度ではなく次の式で定義される異性緯度 q が用いられる。

$$dq = \frac{R}{N \cos \phi} d\phi \tag{5}$$

ただし、卯酉線曲率半径 N は次のように表せる。

$$N = a / \sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \phi)} \tag{6}$$

xy 座標系から緯度経度への逆変換では、縦軸の座標値から次の式で定義される垂足緯度 ϕ_1 (図1 参照) が用いられる。

$$y = \int_0^{\phi_1} R d\phi \tag{7}$$

ここで、与えられた y 座標値にたいして垂足緯度 ϕ_1 が積分の範囲として定義されている。なお、数値標高

図1 UTM 座表系上の経緯線

モデルなどのラスターデータの投影変換では再配列において逆変換が必要になることにも注意されたい。

2-3 UTM 座標系

UTM 座標系は地球全体を経度 6 度毎に60の帯 (Zone)にわけ、その帯の中央の子午線を中央経線 λ として、その帯内をガウス・クリューゲル図法で横円筒に投影したものである⁴⁾。ゾーン内での平均的な歪みが小さくなるように、ガウス・クリューゲル図法での平面座標 (x, y) に対して、UTM 座標 (X, Y) は以下のように調整される。

$$X = 0.9996x + 500000 \tag{8a}$$

$$Y = 0.9996y \tag{8b}$$

我が国はゾーンの51～55に位置する。

より高い精度の座標系として我が国では平面直角座標系が大縮尺の地図に用いられている。UTM 座標系と同様にガウス・クリューゲル図法を用いているが、縮尺率 (0.9999) と原点のとり方が異なる。

3 誤差要因

数値計算においては、丸め誤差、打ち切り誤差および各種の近似方式が問題となる⁵⁾。また、投影変換では地球の形に関する各種の定数の取扱いにも注意を要す

る。

測地学では最新の計測技術を用いて地球の形のより厳密な値を追求しているが、実用上は、種々の整合性を考えて測量法で定められた赤道半径と扁平率で一意に定められた回転楕円体を用いるべきである。これらの定数を実数値として考えれば有効数字は無限大である。しかし、文献によっては^{1),4),6)}極半径や離心率などの2義的なパラメータが示されている場合も多く、これらに関する値については必ずしも統一されているわけではない。例えば、ガウス・クリューゲル図法の計算における重要なパラメータである離心率 e^2 についても、定義に基づいて倍精度で計算した値と一般に使われる値¹⁾では小数点以下11桁以降が以下のように異なっている。

定義に基づく離心率 : 0.006674372227347

一般に使われている値 : 0.006674372231315

離心率が $(1-e^2)$ の形で使われることを考えると、この違いは倍精度の計算における丸め誤差程度の大きさであり、通常の計算においては問題とならない。

経緯度座標の UTM 座標への変換および逆変換の理論的な級数解において、どの次数で級数を打ち切るかによって誤差が発生する。子午線弧長の計算を含めた投影変換における誤差については、4 節以降で詳しく検討するが、国土地理院の変換式を倍精度で計算すれば、打ち切り誤差に関しては有効数字で 9 ～ 10 桁、物理的な長さとして 0.1mm 程度に押さえることが可能である。

次に入力データに含まれる誤差を検討する。地形図に表示した対象物の平面位置の精度は写真測量の基準になった点の誤差はないものとして地上での明瞭な地点の 60% 以上を図上 0.5 ミリ以内、残りの 20% 以上も図上で最大 1.5 ミリ以内に入ることになっている³⁾。2 万 5 千分の 1 の地形図の場合、約 10m と考えてもよいであろう。また、標高点と等高線の高さの精度は、それぞれ 2.5m と 5 m となる。

地形図から数値データを読み取る場合にも誤差が発生する。人間でも 300dpi のスキャナーでも約 0.1 ミリ程度、2 万 5 千分の 1 の地形図の場合で 2.5m の読み取り誤差である。さらに、UTM 座標系における縮尺がゾーンの端で 0.04% 歪むこと (10km で 4 m)、地形図の紙の歪みなどによる制御点のズレ等も考えられる。

これまでの衛星画像の空間分解能は数 10m (ランドサット TM やスポット HRV) であったが、今後は 1

m 程度に改善されてくる。これらの画像を正射投影を含む精密幾何補正を行うことにより、平均的には 1 画素以内の幾何的な精度が期待できる⁷⁾。

以上の考察から地形図や衛星画像の幾何的な精度は 1 m ～ 10m 程度であり、投影変換には 10% 程度の誤差 (10cm ～ 1 m) は許され则认为えられる。

4. 子午線弧長の計算

変換式の計算には、赤道から対象とする地点 (緯度 ϕ) までの子午線弧長を求める必要がある (図 1 参照)。子午線弧長は積分で定義されるが、数値計算では以下の近似式を用いるのが効率的である。

$$S_{\phi} = a(1 - e^2) \left(A_0 \phi - \frac{1}{2} A_1 \sin 2\phi + \frac{1}{4} A_2 \sin 4\phi - \frac{1}{6} A_3 \sin 6\phi + \frac{1}{8} A_4 \sin 8\phi - \frac{1}{10} A_5 \sin 10\phi \right) \quad (9)$$

ここで、係数 A_i は離心率の関数として与えられるが^{6),8)}、ベッセルの地球楕円体に対してはあらかじめ計算された以下の値が利用できる¹⁾。

$A_0 = 1.005 \ 037 \ 306 \ 048 \ 555$

$A_1 = 0.005 \ 047 \ 849 \ 240 \ 300$

$A_2 = 0.000 \ 010 \ 563 \ 786 \ 831$

$A_3 = 0.000 \ 000 \ 020 \ 633 \ 322$

$A_4 = 0.000 \ 000 \ 000 \ 038 \ 853$

$A_5 = 0.000 \ 000 \ 000 \ 000 \ 070$

(9) 式で計算した値とシンプソン法を用いて (3) 式の積分を計算した結果との差は倍精度の計算における丸め誤差程度 (約 1 μ m) であった。

A_2 から A_5 の各項による寄与を計算し結果を図 2

図 2 近似式による子午線弧長の計算誤差

に示す。経度は歪みが最も大きくなるゾーンの境界(東経144度)とし、緯度を北緯30度から40度まで変化させた。A₄の項による寄与は0.1mm以下、A₃の項による寄与は2 cm以下であり、高い精度が要求されない場合には省略が可能である。

UTM 座標から経緯度座標を求めるには、子午線弧長の逆計算、すなわち、与えられた子午線長に対していわゆる垂足緯度が必要となる。ガイド¹⁾には経線長S_φの逆関数を逐次近似法(ニュートン法)で反復計算する方法が示されている。日本付近では初期値を35度とすると、3回程の反復計算を行うことにより約10⁻⁹度の精度で垂足緯度を求めることができるとされている¹⁾。しかし、反復計算などが必要とならない以下の近似式により、数値計算を簡明かつ効率的に行うことができる。

$$\phi_1 = u + \sum_{n=1}^5 C_n \sin 2nu \tag{10}$$

ただし、

$$u = \frac{y}{a(1-e^2)C_0} \tag{11}$$

文献⁹⁾に示された式の誤りに注意されたい。係数C_iはベッセルの地球楕円体に対して以下のように示されているが⁹⁾、原典は明らかではない。

- C₀=1.005 037 306 045 577
- C₁=0.002 511 273 240 647
- C₂=0.000 003 678 785 849
- C₃=0.000 000 007 380 969
- C₄=0.000 000 000 016 832
- C₅=0.000 000 000 000 041

図3 近似式による子午線弧長の逆計算誤差

(9)式で変換した子午線弧長を、この近似式(10)を用いて緯度に変換し、最初の設定値との差を評価した。図3に示すようにC₃の項による寄与は約0.0000003度(5 cm)以下であり、省略が可能である。

5. 投影の変換

本節ではガイドの変換式¹⁾に対して、より低次の変換式を使用することを提案し、その誤差を評価する。

5.1 経緯度から UTM 座標への変換

はじめに変換式に用いる変数を紹介する。赤道半径a、離心率e²、曲率R、卯酉線曲率半径Nについては第2節で述べた。経緯度(λ, φ)からxy座標系への変換では

$$\rho = \frac{180}{\pi} : \text{度とラディアンの変換係数}$$

$$t = \cos \phi, \quad \eta^2 = \frac{e^2}{1-e^2} \cos^2 \phi \tag{12}$$

がさらに必要になる。

提案する変換式を以下に示す。

$$x = \frac{N\Delta\lambda}{\rho} \cos \varphi + \frac{N\Delta\lambda^3}{6\rho^3} \cos^3 \varphi (1-t^2+\eta^2) \tag{13a}$$

$$y = S_\phi + \frac{N\Delta\lambda^2}{2\rho^2} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{N\Delta\lambda^4}{24\rho^4} \sin \varphi \cos^3 \varphi (5-t^2) \tag{13b}$$

図4に東経144度における打ち切り誤差を示した。提案する変換式は、ガイドの変換式の最高次の項などを省略したものであるが、北緯30度から40度の範囲でx座標、y座標とも打ち切り誤差が5 cm以内に納まって

図4 提案する変換式の打ち切り誤差

いる。

5.2 xy 座標から緯度経度への変換

xy 座標から緯度経度への変換では図 1 に示す垂足緯度が用いられるため、添字の 1 で変換の場合と区別する。

$$R_1 = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\phi_1)^3}}$$

$$N_1 = a/\sqrt{(1-e^2\sin^2\phi_1)}$$

$$t_1 = \cos\phi_1, \quad \eta_1^2 = \frac{e^2}{1-e^2} \cos^2\phi_1 \quad (14)$$

提案する逆変換の計算式を以下に示す。

$$\frac{\Delta\lambda}{\rho \sec\phi_1} = \frac{x}{N_1} - \frac{1}{6} \left(\frac{x}{N_1} \right)^3 (1+2t_1^2+\eta_1^2) + \frac{1}{120} \left(\frac{x}{N_1} \right)^5 (5+28t_1^2) \quad (15a)$$

$$\frac{\phi}{N_1 \rho t_1} = \frac{\phi_1}{N_1 \rho t_1} - \frac{1}{2R_1} \left(\frac{x}{N_1} \right)^2 + \frac{1}{24R_1} \left(\frac{x}{N_1} \right)^4 (5+3t_1^2) \quad (15b)$$

図 5 にゾーンの境界 ($x=760000\text{m}$) における打ち切り誤差を図 4 の緯度の範囲にほぼ相当する座標値について計算した結果を示した。 10^{-7} 度は約 1 cm に相当することから、提案する変換式により約 10cm の精度が保証される。(15a) 式ではガイドの変換式で以下の項(16)を省略しただけであるが、緯度方向に較べて経度方向の誤差が大きくあらわれている。

$$\frac{1}{120} \left(\frac{x}{N_1} \right)^5 24t_1^4 \quad (16)$$

図 5 提案する逆変換式の打ち切り誤差

6. 計算の効率化

前節で簡便な変換式を提案したが、ここではその計算量を国土地理院の変換式と比較する。その前に多項式の計算を効率化するためのいくつかの手法を紹介する。なおアルゴリズムの実装には対話的な処理が可能で、豊富な表示解析機能をもついわゆる第 4 世代言語である IDL (Interactive Data Language) を用いた。

(1) 定数の大域的な宣言

a, e^2, ρ, A_i, C_i などの定数だけでなく、 $a(1-e^2)$ や $e^2/(1-e^2)$ などあらかじめ計算して大域変数として宣言した。サブルーチンの中の静的な内部変数としても設定しても良い。

(2) 繰り返し計算の除外

三角関数 $\cos\phi, \Delta\lambda/\rho, x/N_1$ などは重複して計算することのないように(12)式や(14)式で示すような新たな変数とした。

(3) ホーナーの算法

多項式の計算にはホーナーの算法を用いた。提案する変換式では(15a)式以外には、その効果は小さいが、国土地理院の変換式では非常に有効である。

以上の対策を踏まえて変換式のプログラムを作成し処理時間を調べた。その結果、提案するアルゴリズムは国土地理院のアルゴリズムに較べて経緯度から UTM 座標への変換で 71%, UTM 座標から経緯度への変換で 46% の処理時間を要した。逆変換での処理効率が良いのは、子午線弧長の逆計算にニュートン法による反復計算を行わないということが大きく影響している。

7. おわりに

地理的な数値情報の多くは経緯度座標系に基づいているのに対して、地形図や衛星画像は UTM 座標系を用いている。これらを重ねあうために必要となる実用的な投影変換アルゴリズムは、計算量と計算誤差を勘案してきめられるべきである。本報告では、投影変換の数値計算における丸め誤差、打ち切り誤差および各種の近似方式などの誤差要因とその大きさを具体的に検討した。この解析に基づいて、数 10cm の誤差が許される地形図や衛星画像における位置情報を入力データとした場合の実用的な変換アルゴリズムを提案した。

衛星画像の実利用を考えた場合、各種主題図や数値標高モデルなどと重ね合わせるにより大きな付加価値が生まれることが期待される^{6),10)}しかし、衛星画像処理の分野では、投影変換や幾何的な精度といった測量における基本的な概念に対する関心が高いとはいえない。例えば、衛星画像処理のテキスト¹¹⁾には経緯度から UTM 座標系への変換式が紹介されているが、実際にプログラムを作成するための情報としては不十分である。また、子午線弧長の逆計算などの具体的な方法を紹介した文献は極めて少ない⁸⁾。

一方、測量の分野では計算アルゴリズムやその効率性に関する関心が低いように思われる。アルゴリズムの効率は衛星画像や数値標高モデルなど大量のデータ処理が必要となる場合には重要な問題となることを指摘したい。

衛星画像処理と測量をつなげる意味で本学会の役割には大きな期待が寄せられている。本報告に対して多くの方の御意見をいただけることを期待するとともに、この種の問題への関心が高まれば幸いである。

(受付日2000.3.14, 受理日2000.5.11)

引用文献

1) 国土地理院監修, 数値地図ユーザーズガイド (第

2 版補訂版), 日本地図センター, 1998

2) 野村正七, 地図投影法, 日本地図センター, 1983

3) 大竹一彦, 2 万五千分の一地図, 古今書院, 1990

4) 春日屋伸昌, 測量学 I, 朝倉書店, 1978

5) 宇宙開発事業団監修, 地球観測データ利用ハンドブック—ランドサット編・改訂版一, リモートセンシング技術センター, 1986

6) 飯倉善和, 横山隆三, ランドサット TM 画像の正射投影とその評価, 写真測量とリモートセンシング, Vol. 37, No. 4, pp. 12-22, 1998

7) 原田健久, わかりやすい測量厳密計算法, 鹿島出版会, 1992

8) 坪川家恒, 須川 力, 測量の数学的基礎, 現代測量学第 1 巻, 日本測量協会, 1981

9) 伊理正夫, 藤野和建, 数値計算の常識, 共立出版, 1985

10) 飯倉善和, 横山隆三, ランドサット TM 画像の大气および地形効果の補正, 日本リモートセンシング学会誌, Vol. 19, No. 1, pp. 2-16, 1999

11) 高木幹雄, 下田監修, 画像解析ハンドブック, 東京大学出版会, 1991