簡易平均繊維長測定法の精度について*

永 井 弘 —**

Precision of Convenient Method for Determining the Average Fiber Length

Koichi Nagai

The average fiber length $\bar{\lambda}$ in an area T can be estimated by counting the number of the intersections of fibers with a pattern A . (1) (2) (3) The precision of this method is discussed. When the direction and the location of A in T are chosen randomly and T satisfies the condition of "unbiasedness" (3) (4) (5), the unbiased estimate of $\bar{\lambda}$ is given by following eq.

$$\hat{\bar{\lambda}} = \frac{\bar{c} \cdot \Pi \cdot D}{\bar{n}}$$

Where $\bar{c}$ is the average number of the intersections, $\bar{n}$ is the average number of fiber ends in A , (average is taken for the number of traveling times of A), and D is a reciprocal of the line density of the pattern.

The major error is due to the arrangement of fibers on A , that is c for a fiber varies according to the relative direction and the position of fiber against A .

When the pattern is consisted of the straight lines uniformly spaced at distance d from each other and fibers also straight, the variance caused both variables is calculated as

$$\sigma^2 = \frac{0.234\bar{\lambda}^2 + 0.411d^2}{\nu} \quad (\text{parallel grid pattern } D=d)$$

$$\sigma^2 = \frac{0.0191\bar{\lambda}^2 + 0.411d^2}{2\nu} \quad (\text{square lattice pattern as fig. 1 B, } D = \frac{d}{2})$$

ν is the total number of fibers inside A .

The model experiment showed that above σ^2 was nearly proper as the variance of $\hat{\bar{\lambda}}$ if we could minimize the error due to the judgment of the crossing. The effects of the fiber shape and the pattern character are discussed.

A square lattice pattern is efficient for determining $\bar{\lambda}$.

§ 1. 序 論

1956年, M. W. Kane,¹⁾ J. d'A Clark²⁾ 等により簡単な図形と繊維との交点数から, 平均繊維長, コースネスを迅速に求める方法が発表された。更に翌57年には芳賀³⁾によりその数学的厳密性と, 改良測定法が与えられた。芳賀の方法の一例を次に紹介する。

測定すべき繊維又はその拡大写真上に直径 $d, 3d, \dots, (2k-1)d$ 及び $2kd$ の同心円を画いた透明板 (第1図A) を重ね, 繊維の中心線と最外周を除いた k 重周心円円周との交点数 C 及び最外周円内にある繊維の末端数 n を数える。面積 T 内で図形の位置を任意に変えて数回測定を繰返し平均の $\bar{c}, \bar{n}$ を求める。 T 内の繊維の平均繊維長不偏推定値 $\hat{\bar{\lambda}}$ は

$$\hat{\bar{\lambda}} = \frac{\hat{A}}{\hat{N}} = \frac{\bar{c} \cdot \Pi \cdot d}{\bar{n}} \quad \dots\dots\dots(1)$$

より求められる。但し $\hat{A}$ は T 内の繊維の全長 A の不偏推定値, $\hat{N}$ は T 内の繊維本数 N の不偏推定値である。測定 (運動) 図形としては平行線, 正方格子

(第1図B) 円等を用いても, (1)式中の d の代りに図形の線分密度の逆数 D を用いて, それぞれ平均繊維長の推定が出来る。^{1), 2), 3)}

一般に(1)式から求められた値が $\bar{\lambda}$ の不偏推定値であるためには, 運動図形が繊維と交わる時は, 図形に固定した点 M が必ず T の内に含まれねばならないという, いわゆる不偏性の条件^{3), 4)} と共に運動図形の位置及び方向の確率化が必要である。

図形として円又はその重りを用いる時は, 方向の確率化が省略出来る。⁵⁾ これらの手続きが不充分であれば, 結果の偏りが大きくなる。一方, 例え適切な手続

* 原稿受付 33.1.25

** 東北パルプKK. 技術研究所 (32.11.25 第1回研究発表会講演)

きがとられた場合でも、測定方法が確率的なものであるため、結果の信頼性に不安が抱かれ易いものと思われる。そこで本報では、一定の条件下で、本測定法に固有な確率の因子に基づく測定値の σ を求め、測定結果の信頼度について判定の目安を得ることと、一方必要な測定精度に応じた測定条件を効率的に推定出来ることを目的とした。

§ 2. 誤差の原因

本測定法によって得られた平均繊維長推定値には、通常のサンプリング誤差、測定誤差の他に、運動図形と繊維との相対的位置に基づく誤差が加わっている。一方測定誤差は直接各繊維の長さを計る代りに図形との交点を数えるだけでよいから著しく減少するものと思われる。即ち、この“読み取り”誤差には、交点数、末端数の数え違い、繊維末端付近での交点の判定、繊維形態の判定等によるものが含まれているが、これらは判定に一定の基準を設け、測定に適当な注意を払えば十分小さく出来るものと思われる。

ここでいうサンプリングは、 T 内で任意に図形 A を落す操作に相当する。従って T に比べ繰返し測定を通じて A によってカバーされた面積が小さ過ぎる場合、 T 内での繊維長及び本数の分布が偏っている場合、又は繊維長分布の σ が大きい場合、サンプリング誤差は増加することが多い。そこで逆に T を適当に縮小するが、 A の移動を伴う繰返し測定回数を多くするか、又は繊維の層別即ち篩別等の操作によってサンプリング誤差を容易にかつ十分小さくすることが出来る。この様に読み取り誤差、サンプリング誤差は一般的な推定が困難であり、一方上記の注意を守ることにより十分小さくすることが出来るものと考えられるので、本報では特に定量的な検討を行わなかった。従って以下に本法特有の誤差の原因である図形と繊維の相対的な位置による変動について考察し、サンプリング及び読み取り誤差が無視出来ると思われる状態において行ったモデル実験と対比した。なお繊維拡大時の誤差、図形の不正確さによる誤差は主に結果の正確さに関係するがここでは特に触れない。

§ 3. 繊維の方向による変動

運動図形として間隔 d の平行線を考える。長さ λ の直線状繊維が図形と交わる角を θ とし、 λ の平行線に直角方向への投影成分を $\lambda_{\perp}$ とすると

$$\lambda_{\perp} = \lambda \sin \theta \quad \dots\dots\dots(2)$$

θ が確率的に選ばれた場合

$$\varphi \equiv \sin \theta = \frac{\lambda_{\perp}}{\lambda}$$

なる確率偶然量の分布の平均を $\bar{\varphi}$ 、分散を $\sigma^2 \varphi$ とすると

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = \frac{2}{\pi} \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$\sigma^2 \varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta - \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 = 0.0949 \quad \dots\dots\dots(4)$$

j 回目の測定で図形 A 中に含まれる末端数を n_j 、繰返し測定回数を m とすると全測定繊維数 ν は

$$\nu = \sum_{j=1}^m \frac{n_j}{2} \quad \dots\dots\dots(5)$$

相当多数の繊維 ν 本について φ の平均

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\lambda_{\perp i}}{\lambda_i} \quad \dots\dots\dots(6)$$

の分布は λ 即ち繊維長分布の如何にかかわらず

$$\text{平均} \quad \bar{\varphi} = \frac{2}{\pi} \quad \dots\dots\dots(7)$$

$$\text{分散} \quad \sigma^2 \varphi = \frac{0.0949}{\nu} \quad \dots\dots\dots(8)$$

なる正規分布で近似される。

θ が確率的で ν が相当多数である場合には

$$\bar{\varphi} \doteq \frac{\sum_{i=1}^{\nu} \lambda_{\perp i}}{\sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i} = \frac{L_{\perp}}{L} \quad \dots\dots\dots(9)$$

但し

$$\hat{A} = L = \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i \quad \dots\dots\dots(10)$$

$$L_{\perp} = \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_{\perp i} \quad \dots\dots\dots(10')$$

即ち $L_{\perp}$ は $\bar{\varphi}$ 、 L なる分布を有するものと考えることが出来る。この場合 L は一定値であるから(7)(8)より $L_{\perp}$ の分布は

$$\text{平均} \quad \bar{L}_{\perp} = \frac{2}{\pi} L \quad \text{分散} \quad \sigma^2 L_{\perp} = \frac{0.0949 L^2}{\nu}$$

なる正規分布で近似される。 $L_{\perp}$ を測定すると L は

$$\hat{L} = \frac{L_{\perp}}{2/\pi} \quad \dots\dots\dots(11)$$

により推定されその分散 σ_L^2 は

$$\sigma_L^2 = \frac{0.234 L^2}{\nu} \quad \dots\dots\dots(11')$$

となる。

§ 4. 繊維の位置による変動

前節の結果から測定繊維の投影成分全長 $L_{\perp}$ がわかれば L 引いては全繊維長 A が推定される事が分った。しかし本測定法では、 $L_{\perp}$ は繊維と図形との交点数によって確率的に表わされるに過ぎない。このため別に繊維長を交点数で表わすことによる変動を考慮する必要がある。前節同様運動図形として間隔 d の平

行線を考える。直線状繊維の方向が全て図形と直交している場合、両者の交点数は繊維長の測定となる。繊維の一端が丁度図形に触れている場合の交点数を $1/2$ と定めると長さ d の繊維は常に図形と 1 回交わる。一般に長さ $\lambda = (e+f)d$ ($e=0, 1, 2, \dots, r, 0 \leq f < 1$) の繊維は図形と e 回交わる確率は $(1-f)$, $e+1$ 回交わる確率が f である。このような繊維一本当りの交点数 C_i の確率分布の平均値を $P(C)$ 分散を σ_c^2 とすると

$$P(C) = e + f \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\sigma_c^2 = f(1-f) \quad \dots\dots\dots (13)$$

である。平均交点数に d を乗じ平均繊維長が得られる。繊維の方向が任意の場合は $\lambda_{\perp}$ について同様の議論が成立する。即ち

$$\lambda_{\perp} = (e_{\perp} + f_{\perp})d \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$(e_{\perp} = 0, 1, 2, \dots, r, 0 \leq f_{\perp} < 1)$$

と置く

$$P(C) = e_{\perp} + f_{\perp} \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\sigma_c^2 = f_{\perp}(1-f_{\perp}) \quad \dots\dots\dots (16)$$

繊維長が一定の範囲内に分布している時はこれらの値は分布状態に左右される。今 $f_{\perp} \cdot d$ は任意の $e \cdot d$ と $(e+1) \cdot d$ 間で同様又は直線状に分布しているものと仮定しよう。この仮定は ν が相当多数で d が平均繊維長に対し適当に選ばれれば、極めて一般的に成立し得る。(10) (14) (16) より交点数を測度として $L_{\perp}$ を $\sum_{i=1}^{\nu} C_i d$ で表わした場合の確率分布は平均 $L_{\perp}$, 分散 $\nu(\sigma_c d)^2$ の正規分布で近似される。 σ_c^2 として(16)を $f_{\perp} = 0$ から 1 までの間で平均したものをとることにする。 $f_{\perp} d$ 分布の仮定に従い積分を行うと

$$(\sigma_c d)^2 = 0.1667 d^2 \quad \dots\dots\dots (17)$$

(11) より

$$\hat{L} = \frac{\hat{L}_{\perp}}{2/H} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} C_i \cdot \pi \cdot d}{2} \quad \dots\dots\dots (18)$$

交点数を測度としたことによる $\hat{L}$ の分散は

$$\sigma_{\hat{L}}^2 = \frac{0.1667 d^2 \nu}{(2/H)^2} = 0.411 d^2 \nu \quad \dots\dots\dots (19)$$

繊維の方向による $L_{\perp}$ の変動と $L_{\perp}$ を C によって表わすための変動は独立と考えられるから $\hat{L}$ の総合的な分散は

$$\sigma_{\hat{L}}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = \frac{0.234 L^2}{\nu} + 0.411 d^2 \nu \quad \dots\dots\dots (20)$$

不偏性の条件を考慮し, $d = D$ となるように図形の面積を選べば, (1) (5) (18) より

$$\hat{\lambda} = \frac{\hat{A}}{\hat{N}} = \frac{\hat{L}}{\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} C_i \cdot \pi \cdot d}{\sum_{j=1}^m n_j} = \frac{\bar{c} \cdot \pi \cdot d}{\bar{n}} \quad \dots\dots\dots (21)$$

第1表 σ の計算値 ($\nu=100$ 本)

図形 $\bar{\lambda}$	平 行 線		正 方 格 子	
	a 1.0	a' 0.5	b 1.0	b' 0.5
0	0.0642	0.0321	0.0453	0.0227
1	0.0802	0.0580	0.0463	0.0264
2	0.116	0.102	0.0493	0.0318
3	0.159	0.149	0.0540	0.0386
4	0.204	0.196	0.0598	0.0463

$\hat{\lambda}$ の分散 σ^2 は (20) (21) 及び読み取り誤差等に関する仮定より

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_{\hat{L}}^2}{\nu^2} = \frac{0.234 \bar{\lambda}^2 + 0.411 d^2}{\nu} \quad \dots\dots\dots (22)$$

Q 倍に拡大された写真について測定を行った場合には実際の平均繊維長 $\bar{\lambda}_0$ は

$$\hat{\lambda}_0 = \frac{\hat{\lambda}}{Q_2} \quad \dots\dots\dots (21')$$

により推定され, 又その分散 σ_0^2 は

$$\sigma_0^2 = \frac{\sigma^2}{Q} \quad \dots\dots\dots (22')$$

となる。

§ 5. 図形, 測定法の影響

第1表及び第2図 a, a' は $d=1\text{cm}$ 及び 0.5cm $\nu=100$ 本の場合の $\bar{\lambda}$ に対する σ を求めたものである。 ν が2倍になると σ は $1/\sqrt{2}$ に減少する。ここで図形の位置及び方向の確率化を局部的に行った場合につき考える。局部的な位置の確率化のモデルとして, 平行線図形を平行線に直角方向へ $d/2$ 移動させ測定を繰返した場合は $d/2$ 間隔の図形を用いた時と同じ結果になる方向の局部的確率化のモデルとして第1図Bのような正方格子を考える。

この場合 $D = \frac{d}{2}$ 従って $\hat{\lambda} = \frac{\bar{c} \cdot \pi \cdot d}{2\pi}$, 又(2)式における $\sin \theta$ の代りに $\sin \theta + 1 \cos \theta 1$ が用いられ従って σ^2 は

$$\sigma^2 = \frac{0.0191\bar{\lambda}^2 + 0.411d^2}{2\nu} \dots\dots\dots(23)$$

と繊維方向に関する変動が減少する。第1表及び第2図 b, b' は $d=1\text{cm}$, 0.5cm , $\nu=100$ 本の場合の正方格子による測定 of σ を示す。 $a/\sqrt{2}$ と b を比べると d に比べて $\bar{\lambda}$ が大きい場合, 特に局所的な方向の確率化が有効であることが分る。

一般に T 又は ν が少ない場合には正方格子による測定が能率的であると思われる。なお末端数の読みとりは図形が直線的であるとやりやすい。

§ 6. 繊維の形状の影響

以上の議論は繊維及び図形が直線状の場合について述べたものである。繊維又は図形が曲線又は不規則な線分の連結された場合にも(1)式は成立する。³⁾ この場合には繊維の方向に関する変動が平均され従って σ は小さくなる。

しかし実際の繊維の形態は不規則であり, σ_1 の減少を定量的に求めることは困難である。ここでは極く定性的にこの点について考察してみよう。繊維が円弧状, 図形は平行な直線とする。

繊維が半径 R なる円形を形作っている場合, 図形の方角に関せず $\lambda_{\perp}$ は一定である。この時, いずれの方角より見ても円周は重複しておる故,

$$\lambda_{\perp} = 4R, \lambda = 2\pi R, \therefore \frac{\lambda_{\perp}}{\lambda} = \frac{2}{\pi} \quad \sigma_1 = 0$$

中心角 Ψ が 2π より減少するにつれ σ_1 は増加するが半円の場合再び $\sigma_1 = 0$ となる。更に Ψ が減少するにつれ σ_1 は増加し, $\Psi \rightarrow 0$ で直線と同じ値になる。繊維が折れ曲った直線の場合 σ_1 は折れ曲りの角及び折れ曲りの回数に關係する。セグメントの長さ及び折れ曲りの角度が確率的である場合には, セグメント数の増加に伴い σ_1 は 0 に近づく。更に繊維の形態が一般化された場合には形態係数を定めて σ_1 との關係を求めることが必要になる。例えば互に直角な方向への繊維の投影成分の比 Y/X を形態係数とすると, $Y/X = 1$ ならば $\sigma_1 = 0$ $Y/X = 0$ 又は ∞ ならば σ_1 は(1)式から求められる。但しこの場合, 各投影成分は重複部分を加算しなければならない。しかしながらこのような形態係数を測定のためごとに求めなければならないようでは簡易法としての意味がない。繊維と図形の相対性を考えれば, 図形を適当に選ぶことにより σ_1 を減少することが出来る。第2図において各曲線が $\bar{\lambda} =$

0 に交わる点が $\sigma_1 = 0$ であり, 実際上正方格子を用いれど繊維形態による σ の差を考慮しなくともよいことが分る。

§ 7. 実験との比較

モデルとして長さ1メートルの細い銅線を50本及び100本に切り, それぞれ $\bar{\lambda} = 2\text{cm}$, $\bar{\lambda} = 1\text{cm}$ の繊維群と見なした。個々の繊維の長さはランダムに切った。この繊維を第1図の如き正方格子又は同心円の上に任意にばらまき, 交点数を数えて(2)式より $\hat{\lambda}$ を求めこれを10回繰返して $\hat{\sigma}^2$ を求めた。この場合には, サンプル読み取り等の誤差は十分小さくなる。一方(2)式より σ^2 を計算により求め, 両者の比をカイ自乗/自由度 検定した。結果を第2表及び第3表に示す。

正方格子の場合は縦横の平行線についての測定値と両者の平均値について比較した。平均により $\hat{\sigma}$ は計算通り著しく減少することがわかる。 $\sigma_{10\nu}$ は10回の測定値の平均値に対する σ である。 $\hat{\sigma}^2/\sigma^2$ の検定は帰

第2表 正方格子による測定 (単位 cm)

ν	$\bar{\lambda}$	No.	d			d		
			横	縦	平均	縦	横	平均
100	1	1	0.82	1.16	0.99	0.92	1.11	1.015
		2	1.16	0.86	1.01	1.00	1.05	1.025
		3	0.99	1.04	1.01	1.01	1.03	1.02
		4	0.96	0.87	0.91	0.96	1.07	1.01
		5	0.97	0.99	0.98	1.11	1.00	1.05
		6	0.93	0.99	0.96	1.08	1.00	1.04
		7	1.04	0.94	0.99	1.15	0.97	1.06
		8	0.94	0.96	0.95	1.09	1.05	1.07
		9	0.97	1.08	1.03	1.05	1.05	1.05
		10	1.13	0.97	1.04	1.03	1.10	0.065
		平均	0.991	0.986	0.988	1.038	1.041	1.040
		$\sigma_{10\nu}$	0.025		0.015	0.018		0.008
		$\hat{\sigma}$	0.0988	0.0922	0.0886	0.0714	0.0452	0.0211
50	2	σ	0.0802		0.0463	0.0580		0.0264
		$\hat{\sigma}^2/\sigma^2$	1.47	1.30	0.70	1.52	0.61	0.64
		1	2.09	2.09	2.09	1.81	2.25	2.025
		2	1.82	2.23	2.025	1.37	2.48	2.025
		3	1.82	2.29	2.06	2.00	1.98	1.99
		4	2.14	1.70	1.90	1.84	2.21	2.025
		5	2.26	1.92	2.09	1.95	2.04	1.995
		6	1.92	2.04	1.98	2.04	2.07	2.06
		7	1.73	2.20	1.965	1.89	0.07	1.98
		8	1.95	2.17	2.06	1.98	2.04	2.01
		9	1.92	2.20	2.06	2.07	1.98	2.03
		10	1.82	2.26	2.05	1.78	2.07	1.625
		平均	1.981	2.052	2.018	1.892	2.119	2.006
		$\sigma_{10\nu}$	0.032		0.022	0.046		0.014
		$\hat{\sigma}$	0.161	0.182	0.060	0.150	0.154	0.037
		σ	0.164		0.070	0.144		0.045
		$\hat{\sigma}^2/\sigma^2$	0.96	1.23	0.73	1.08	1.15	0.67

第3表 同心円による測定 (単位 cm)

d			1	0.5
ν	λ	No.		
100	1	1	1.18	1.09
		2	1.10	1.05
		3	0.99	0.94
		4	0.97	0.93
		5	0.96	1.08
		6	1.10	1.07
		7	1.21	1.01
		8	0.99	1.05
		9	1.07	1.18
		10	1.00	1.00
		平均	1.057	1.040
		$\sigma_{10\nu}$	0.025	0.018
		$\hat{\sigma}$	0.0892	0.0738
		σ	0.0802	0.0580
		$\hat{\sigma}^2/\sigma^2$	1.24	1.62
50	2	1	1.89	1.90
		2	1.98	2.07
		3	1.85	1.79
		4	1.89	2.04
		5	2.45	1.98
		6	2.14	2.09
		7	2.01	2.22
		8	2.10	2.03
		9	2.04	2.00
		10	1.89	2.25
		平均	2.023	2.037
		$\sigma_{10\nu}$	0.052	0.046
		$\hat{\sigma}$	0.181	0.136
		σ	0.164	0.144
		$\hat{\sigma}^2/\sigma^2$	1.22	0.90

無仮説のそれでないため能率が悪い。自由度9において $\hat{\sigma}^2/\sigma^2$ の80%が0.46~1.63の範囲に含まれる。従って全実験を通じ σ^2 と $\hat{\sigma}^2$ 間に有意差を見出せなかった。同心円の場合も実際上(2)式を適用してもよいことが知られた。一般に σ と $\hat{\sigma}$ との一致は十分満足すべきように思われる。

§ 8. 結 論

簡単な図形と繊維との交点数から平均繊維長を推定する際の繊維と図形の空間配置に原因する分散を計算により求めることが出来た。サンプリング、読み取りに適当な注意を払えば求めた σ を用いて、平均繊維長推定値の信頼限界を近似的に推定することが出来る。但し(2)式において、 $\bar{\lambda}$ の代りに $\hat{\lambda}$ を用いる。逆に要求される精度に応じた測定繊維数 ν 、図形の線分密度 $1/D$ 、図形の種類等を推定することが出来る。即ち σ は $1/D$ 、 ν が大きくなる程減少する。又図形として正方格子の如きものを用いると σ の内の繊維の方向に関する部分が減少し、測定の精度が向上すると同時

に繊維形態による σ の変動を無視出来るようになる。

終りに御指導を賜った山陽パルプ芳賀敏郎氏、発表の機会を与えられ御激励を戴いた当研究所長尾所長、山本副所長並びに浅岡宏主任に感謝します。なお報告作成に助力を戴いた当所佐藤坦氏に感謝します。

文 献

- 1) M. W. Kane. "Determination of Average Fiber Length." TAPPI. 39, 478—480 (1956)
- 2) J. d'A Clark and et. "A Rapid Simplified Method for Determining the Coarseness of Pulp" ibid. 40—43 (1956)
- 3) 芳賀敏郎 "積分幾何学の繊維への応用" 標準化 10, No. 1 (1957)
- 4) 増山元三郎 "幾何学的調査法の話" O.R. 1, No. 41—49 (1956)
- 5) 増山元三郎 "類偶然性について" O.R. 1, No. 6 2~6 (1957)

主な符号

λ : 繊維長

λ_L : 繊維長の投影成分 : $\lambda \sin \theta$

θ : 繊維と図形の作る角

A : 図形面積

D : 図形の線分密度の逆数, 第1図 A では $D=d$,

B では $D = \frac{d}{2}$

$\bar{\lambda}$: T 内の平均繊維長

$\hat{\lambda}$: 同上不偏推定値

T : 不偏性の条件を満たす面積

$\hat{A}$: T 内の繊維全長不偏推定値

$\hat{N}$: T 内の繊維本数不偏推定値

m : 図形の移動測定回数

n_j : j 回目の A 内の繊維末端数

$\bar{n}$: n_j の平均値 $\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m n_j$

C_i : i 本目の繊維の交点数

C_j : j 図目の A 内の交点数

$\bar{C}$: C_j の平均値 $\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m C_j$ 又は $\frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} C_i$

ν : 全測定繊維数 $\sum_{j=1}^m \frac{n_j}{2}$

L : ν 本の繊維全長

L_L : L の投影成分

σ_1^2 : θ による $\hat{L}$ 分布の分散

σ_2^2 : C による $\hat{L}$ 分布の分散

σ^2 : $\hat{\lambda}$ 分布の分散 $(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)/\nu^2$

$\hat{\sigma}^2$: $\hat{\lambda}$ の不偏分散