資源循環再利用計画のための方法論的研究

第7報：数式モデルによる古紙備蓄計画の評価

大野 弘^{*1)}，吉田総夫^{*2)}，橋本伊織^{*3)}，塩谷捨明^{*3)}，高松武一郎^{*3)}

Process System Approaches for Resources Recycling in Pulp and Paper Industries

7th Report : Assesment of Waste Paper Storing Policies

Hiroshi Ōno^{*1)}，Fusao Yoshida^{*2)}，Iori Hashimoto^{*3)}，Suteaki Shioya^{*3)}，Takeichiro Takamatsu^{*3)}

This 7-th report is concerned with assessing several waste paper storing strategies by using a mathematical model developed in the 5-th report of this series. After summarizing the model structure in which the dynamic aspects of waste paper market are expressed, we consider feedback and feedforward control policies to maintain waste paper price at a appropriate level and carry out dynamic simulations in order to assess these waste paper storing policies quantitatively. As a result, we conclude that any storing policy has no hope of success in stabilizing waste paper price.

概 要

この第7報では、第5報で得た数式モデルを用いて古紙備蓄策の評価を行った。古紙市場の動的な側面を表現したこの数式モデルの構造的な特徴をまず要約した上で、古紙価格を適正水準に維持することを考えたフィードバックおよびフィードフォワード策を提案し、シミュレーションを行った。この結果から、古紙備蓄策が、古紙価格を中位安定化するための有効な方策ではないということが推測された。

1. 緒 言

われわれは、第5報^{*}において古紙回収再利用システムの一つの数式モデルを提案した。このモデルは、紙パルプ統計年報に公表されてきた月間データを基礎

として、古紙市場の動的な側面を定量的に分析して得られたものである。紙生産量とパルプ価格を外生変数とするこの数式モデルは、製紙メーカにおける古紙の使用量、購入量およびその価格の動的な関連を、連立差分方程式系として表現したものである。さらに第5報では、この動的モデルの有効性について、種々の側面から定量的な検討を行い、いくつかの問題点を明らかにしたが、基本的にはこのモデルが、古紙市場の構造的な特徴をうまく捉えており、古紙の使用量、購入量およびその価格の月々の動的な動きを表現していることが判明した。このことにより、紙生産量とパルプ価格の将来の予測値をあたえて、古紙市場の将来動向をシミュレーションし、その結果を参考に古紙市場の安定化を計ることが可能であろうと記した。そこで本報告では、考えられる2, 3の古紙備蓄策に関するシナリオを準備し、その各々を定量的に評価した結果を提供する。ただし、本報告の目的は、動的モデルを用いた古紙備蓄策の評価の可能性を検討することであり、

* 大野弘他資源循環再利用計画のための方法論的研究第5報：古紙回収再利用システムの数式モデル 紙パ技協誌第35巻第4号805頁(1981)

*1) 神戸大学工学部 Department of Chemical Engineering, Kobe University

*2) 大阪府立工業技術研究所 Osaka Prefectural Industrial Research Institute

*3) 京都大学工学部 Department of Chemical Engineering, Kyoto University

将来予測を行うものではない。すなわち、過去のある時点から、何らかの備蓄策が行われていたとしたら、その結果はどうなっていたであろうかを計算し、現実のデータと比較することに留めた。

次節では、まず第5報で得た数式モデルの概要を記すとともに、その構造的な特徴をまとめる。3節では古紙の安定した回収体制の確立をめざした古紙価格の安定化を実現する一つの方策と考えられる古紙備蓄策について考察し、いくつかのシナリオを描く。4節ではこれらのシナリオに従った方策が、過去のある時点から実施されていたなら、どうなっていたかを計算機によりシミュレーションを行った結果を示し、現実のデータと比較し、あたえた方策を評価する。

2. 数式モデル

今、第 t 期の古紙使用量、購入量、価格をそれぞれ $W(t)$ 、 $X(t)$ 、 $P(t)$ とした時、これらの変数間の動的な関連は次の連立差分方程式で表現された。

$$\frac{P(t)}{P(t-1)} = \prod_{i=1}^3 \left\{ \frac{\hat{X}(t-i)}{\hat{X}(t-i-1)} \right\}^{a_i} \cdot \prod_{i=1}^3 \left\{ \frac{Q(t-i)}{Q(t-i-1)} \cdot \frac{Q(t-i-1)}{Q(t-i-2)} \right\}^{b_i} \quad (1)$$

$$\frac{W(t)}{W(t-1)} = \left\{ \frac{Q(t)}{Q(t-1)} \right\}^{\alpha} \cdot \left\{ \frac{P(t)}{P(t-1)} \right\}^{\beta} \cdot \left\{ \frac{Y(t)}{Y(t-1)} \right\}^{\gamma} \quad (2)$$

$$\hat{X}(t) = \hat{X}(t-1) + k_2 \{ \hat{W}(t-1) - \hat{W}(t-2) \} + k_2 \{ X(t-1) - W(t-1) \} \quad (3)$$

(1)～(3)式において $Y(t)$ 、 $Q(t)$ は紙生産量(10^3t)、パルプ価格(N・U・KP ストロング、円/kg)である。また $\hat{X}(t)$ 、 $\hat{W}(t)$ は、古紙購入量(10^3t)、古紙使用量(10^3t)に季節調整をほどこした値を示しており、実購入量、実使用量を表1に示す季節係数で除したものである。 $P(t)$ は段ボール屑(プレス物)で代表した古紙価格(円/10 kg)である。一方、11個のパラメータ $a_1 \sim a_3$ 、 $b_1 \sim b_3$ 、 α 、 β 、 γ 、 k_1 、 k_2 は、1970年から1978年の9年間の実データより推定されたものであり、表2に示す通りである。

(1)式は、古紙価格の対前月比が、4カ月前までの古紙購入動向と5カ月前までのパルプ価格の推移から予測されることを示した式である。(2)式は製紙メーカーによる古紙の使用量が、紙生産量、パルプ価格、古紙価格の3者により決定されていることを、(3)式は製紙メーカーの古紙購入量が使用量の伸びと在庫の増減により決定されることを示したものである。(1)～(3)式における外生変数 $Y(t)$ と $Q(t)$ の変化は内生変数 $X(t)$ 、 $W(t)$ 、 $P(t)$ へ、遅れを伴いながら互に複雑に絡みあって伝播するが、基本的には、パルプ価格のステップ状

Table 1 Seasonal factors

month	purchase	consumption
1	0.874	0.938
2	0.870	0.952
3	0.988	1.012
4	1.046	0.999
5	1.052	1.014
6	1.028	1.013
7	1.042	1.021
8	1.006	0.982
9	1.001	1.005
10	1.023	1.037
11	1.005	1.014
12	1.053	1.002

Table 2 Model parameters

i	1	2	3
a_i	0.260	0.780	0.362
b_i	2.421	2.796	2.085
k_i	1.0096	-0.0808	—
α, β, γ	0.027	-0.001	1.172

の上昇に伴った古紙価格のインパルス状の変化、紙生産量の急激な増加による古紙使用割合の増加、それに1カ月の遅れを伴って追従する古紙購入量の変化の3つの基本的な構造を表現したものである。パラメータ k_2 の値が k_1 に比してきわめて小さいことは、製紙メーカーにおける古紙在庫が従来はきわめて軽視されてきたことを意味しており、この面からも古紙備蓄策がどの程度機能するものかを評価することは興味深いものと考えられる。

古紙市場の安定化を目的として、制御の観点からモデル(1)～(3)を見ると次のように解釈される。直接に操作しえない外的な入力 $Y(t)$ と $Q(t)$ は外乱とみることができる。この外乱下で古紙価格 $P(t)$ を安定化するため操作しうる変数は古紙購入量 $X(t)$ である。ただしこの $X(t)$ には、次式できまってくる古紙在庫 $S(t)$ が負の値をとらない範囲内でしか動かすことはできない。

$$S(t) = S(t-1) + X(t) - W(t) \quad (4)$$

以上のような意味では、(3)式は現実に採られた一つの制御則を表わしたものといえよう。 $P(t)$ 、 $W(t)$ 、 $S(t)$ は対象とする系の状態量、(1)(2)(4)の各式が状態方程式であり、その中の $X(t)$ が操作変数、 $P(t)$ が制御したい変数、制御量である。(3)式は一つのフィードバック

制御則をあたえているといえよう。次節では、このような制御系に(1)(2)(4)において(3)式のようなある制御則を見い出して $P(t)$ を安定に推移せしめるにはどうすればよいかという観点から、古紙備蓄策に光をあてる。

3. 古紙備蓄策

現実のデータを解析して得られた(3)式の古紙購入モデルは、過去に行われた一つの制御方策と見ることができるとは前節に記した通りである。この場合その目的は、製紙メーカによって必要とされる月々の古紙の数量的な確保であった。すなわち、来期に予想される古紙使用量の確保が第1であり、古紙価格は紙・板紙需要の変動をもろに受け、それを増幅して浮沈を繰返して来た。これに対して通産省、古紙回収促進センター主導による古紙備蓄は古紙価格の“中位安定”をねらい、将来の重要な製紙原料と考えられる古紙の回収集荷体制が壊れるのを防止しようとしてきたといえよう。しかし、過去何回か実施された備蓄が有効に機能したとはいえない。「備蓄量も焼け石に水程度であり、行政指導価格もメーカや問屋は守ろうとはしないし、通産省も本格的に取組もうとはしていない」という声もあり、定量的にどの程度備蓄し、それをいかに放出すれば古紙市場が安定するかについては、ほとんど検討されてこなかったといえる。本節では、上記の動的モデルを用いて、実際にはどれ程の備蓄量が必要なのかを計算し、回収集荷体制を安定させる対策を検討する上での基礎的な資料を得るための方法を記す。

3.1 フィードバック的方策

状態方程式(1)(2)(4)に対して、(3)式のようなフィードバック形式で古紙価格を安定化させることを考える。そのための最も直接的な方法は、(3)式に古紙価格の適正水準からの偏差を加味することである。すなわち、

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) = & \dot{X}(t-1) + k_1\{\hat{W}(t-1) - \hat{W}(t-2)\} \\ & + k_2\{X(t-1) - W(t-1)\} \\ & + k_3\{P(t-1) - P_0\}\end{aligned}\quad (5)$$

なる制御則により、メーカが古紙購入を行うというものである。(5)式において k_3 はフィードバック・ゲインであり、 P_0 は古紙価格の適正水準である。ここでの問題はパラメータ k_3 および P_0 をどの程度に設定するかである。これは、適当にあたえた k_3 、 P_0 の値に対して、連立差分方程式系(1)(2)(4)(5)を、繰返し解くことにより求めざるを得ない。

同様のフィードバック的方策としては、パルプ価格の動向を見て古紙購入量を調整する方策が考えられる。この場合の制御則としては

$$\dot{X}(t) = \dot{X}(t-1) + k_1\{\hat{W}(t-1) - \hat{W}(t-2)\}$$

$$+ k_3\{Q(t-1) - Q(t-2)\} \quad (6)$$

のようなものが考えられ、前者の場合と同様に、フィードバック・ゲイン k_3 は、適当な値を仮定した上で、連立差分方程式(1)(2)(4)(6)を繰返し解くことにより、決定することになる。

これら2つの方策は民間備蓄に対応するものと考えられるが、価格安定にとってあまり大きな効果は期待しえない。なぜならフィードバック・ゲイン k_3 を一定としているため、(5)式あるいは(6)式を(1)式に代入した時いずれにせよ、古紙価格 $P(t)$ に対して外乱 $Q(t)$ が直接に影響し、 $P(t)$ が一定となることはありえない。また $P(t)$ の急上昇をおさえるため(6)式において、大きなゲインを用いると、古紙在庫が負となるし、(5)式においては制御の遅れのため、十分にフィードバックが機能しないものと予想される。そこでフィードフォワード的に制御する方法について考える。

3.2 フィードフォワード的方策

理想的に考えて、 $P(t)$ にいっさいの変動がないものと考えれば(1)式の左辺は常に1である。すなわち、

$$1 = \prod_{i=2}^3 \left\{ \frac{\hat{X}(t-i)}{\hat{X}(t-i-1)} \right\}^{a_i} \cdot \prod_{i=1}^3 \left\{ \frac{Q(t-i)}{Q(t-i-1)} / \frac{Q(t-i+1)}{Q(t-i)} \right\}^{b_i} \quad (7)$$

が成立する。従って(7)式より $X(t)$ を求めれば、 $X(t)$ は次の差分方程式を満していることがわかる。

$$\begin{aligned}\hat{X}(t) = & \hat{X}(t-1) \prod_{i=2}^3 \left\{ \frac{\hat{X}(t-i)}{\hat{X}(t-i+1)} \right\}^{i_i} \\ & \cdot \prod_{i=1}^3 \left\{ \frac{Q(t-i)}{Q(t-i-1)} / \frac{Q(t-i+1)}{Q(t-i)} \right\}^{b_i}\end{aligned}\quad (8)$$

$$\bar{a}_i = a_i/a_1, \quad \bar{b}_i = b_i/a_1$$

(8)式に従って古紙を購入すれば、古紙価格は常に $t=1$ なる時点の値に維持されることになる。この(8)式と(2)(4)式を連立して解くことにより、古紙在庫 $S(t)$ が計算される。この理想的フィードフォワードは、その開始時点での古紙価格 $P(1)$ によって実現が不可能なものとなる。なぜなら、もし維持したい適正価格 P_0 をこえて上昇しようとする時点から(8)の制御を開始すれば、無理に価格をおさえこうとする結果 $\hat{X}(1)$ がきわめて小さい値となり古紙在庫 $S(t)$ はただちに負になる。一方、古紙価格が適正水準以下の時に(8)の制御を開始すれば、そのまま価格は低水準のまま推移することになる。このような意味で、理想的な制御(8)は、現実には意味を持ちえない。そこで(8)式を手掛りとして、より現実的な策を以下に考える。

(1)式において $P(t)/P(t-1)$ を1とせず、(8)式のごとく書きかえると、次式を得る。

$$\hat{X}(t) = \hat{X}(t-1) \left\{ \frac{P(t+1)}{P(t)} \right\} \cdot \prod_{i=2}^3 \left\{ \frac{\hat{X}(t-i)}{\hat{X}(t-i-1)} \right\}^{\hat{a}_i} \cdot \prod_{i=1}^3 \left\{ \frac{Q(t-i)}{Q(t-i-1)} / \frac{Q(t-i+1)}{Q(t-i)} \right\}^{\hat{b}_i} \quad (9)$$

ここで、もし t 期の計算された古紙価格 $P(t)$ が適正水準 P_0 から離れていたとすれば、 $(t+1)$ 期の古紙価格 $P(t+1)$ が P_0 へ近づくように $\hat{X}(t)$ を(9)式によって決めることにする。すなわち(9)式中の $P(t+1)$ に次式を代入する。

$$P(t+1) = P(t) + k_3(P(t) - P_0) \quad (10)$$

この(10)式によって、古紙価格が適正水準を下まわると予想された時には、来期の古紙価格を $100 \times k_3(1 - P_0/P(t))\%$ だけ上昇せしめることを画策するものである。この人為的な価格操作により、古紙購入量は、古紙価格が低い時には従来より増加し、逆の場合には減少する。この量が常識はずれの値にならないように歯止めをかけておく必要がある。すなわち、次の不等号制約を $\hat{X}(t)$ に課しておく必要がある。

$$\begin{cases} \hat{X}(t) = A & (\hat{X}(t) < A \text{ の時}) \\ \hat{X}(t) = B & (\hat{X}(t) > B \text{ の時}) \end{cases} \quad (11)$$

(9)式で計算される $\hat{X}(t)$ が A 以下の時には $\hat{X}(t)$ は A にし、 B 以上の時には B と強制的に決めてしまう。 A 、 B の値を適当にあてた上で k_3 の値は、古紙在庫が負にならないように設定しなければならない。

以上 3.1 と 3.2 で合計 3 つの古紙備蓄策について考察した。これらの各々が実際にどの程度の効果を有しているのか、また備蓄量はどれほど必要となるかを検討するために、第4節では、1970年からこれらの方策が実施された場合のシミュレーション結果を示し、現実のデータと比較する。

4. シミュレーション結果

前節で展開した備蓄策を1970年から実施していれば古紙市況はどのように推移したであろうかを、計算機によりシミュレーションを行い、その結果と実データとを比較し検討する。制御則(5)(6)(10)に現われるフィードバック・ゲイン k_3 の値は、1970年から1980年10月までのシミュレーションにおいて在庫が負にならないことを目安にして求めた。その結果を表3に掲げる。(5)式と(10)式に含まれている適正価格パラメータ P_0 は30円/kgとした。また、フィードフォワード策での歯止め(11)式の A 、 B は次のようにして決定した。メーカにおいて現実に採られたと考えられる制御則(3)式によって決まる古紙購入量 $X(t)$ を $X_0(t)$ とし、この値の f_1 倍から f_2 倍まで $\hat{X}(t)$ は動かせるものとした。すなわち、

Table 3 Control parameters

	feedback of P Eq. (5)	feedback of Q Eq. (6)	feedforward Eqs. (10), (12)
k_3	-0.01	-0.092	-0.054564
P_0	30	—	30
f_1	—	—	1.1725
f_2	—	—	0.5000

Fig. 1 Feedback control by Eq. (5)

Fig. 2 Feedback control by Eq. (6)

$$A = f_1 \cdot X_0(t), \quad B = f_2 \cdot X_0(t) \quad (12)$$

定数 f_1 と f_2 の値は、古紙在庫が6カ月以上とはならないことを目安にして、表3に示した値を用いた。

図1から図3は、1970年1月から1980年10月まで、各々の備蓄策が実施されていた場合の古紙価格の推移(実線)と現実データ(点)とを比較したものである。ただし、図中に点で示した実データとは、段ボールくず(プレス物)の東京近郊メーカ工場価格の高値と低値の中間値のことである。図4は、3つの備蓄策における在庫率の推移の違いを比較したものである。図中に示した記号 FBP, FBQ, FF はそれぞれ古紙価格のフィードバック策(5)式、パルプ価格のフィードバック策(6)式、およびフィードフォワード策(9)式を意味し

Fig. 3 Feedforward control

Fig. 4 Changes of inventory-consumption ratio

ている。

図1から図3を比較して、フィードフォワードの方がフィードバックに比べて、古紙価格が低い水準におさえこまれて推移していることがわかる。2つのフィードバック策では、価格の面では大きな違いを示していないが、図4からわかるように古紙在庫に大きな違いが現われている。古紙価格を直接にフィードバックした場合は在庫率は徐々に上昇し、3.5から4カ月の間に落着いている。一方、パルプ価格をフィードバックした場合には、在庫率はきわめて低い水準を保ったままで推移している。フィードフォワードにおける在庫率の水準は3者の中で最も高い。その結果として、古紙価格が低くおさえられているといえよう。この方策を実現するのに、今仮に備蓄センターを設け、ここにおいて古紙を購入・備蓄し適当な時期に適当な量放出するものとして、その時の備蓄センターの古紙の月々の出入りを計算した結果を図5に示す。これはメーカーが(3)式で計算される購入希望量を完全に満すように、備蓄センターが古紙積み増しと放出を行ったと仮定して得られた結果である。すなわち備蓄センターでの古紙の購入・放出量は(9)式で計算された $\hat{X}(t)$ と、(1)式から(3)式を解いて得られたメーカー実購入量 $X(t)$ との

Fig. 5 Store and release of waste paper

差である。この結果は、備蓄センターが毎月平均して6万t程度の古紙を備蓄して、古紙価格上昇時にいっきに放出する必要があることを示している。月1万t程度の備蓄を単発的に実施した程度では、古紙価格を中位安定化することはとうていできないといえよう。図1に示されているように、価格は適正水準 P_0 を30円と設定したにもかかわらず、それより低い値で推移しており、これをもっと上昇せしめるには、備蓄量をさらに増さなければならない。現状の回収率の高さから考えてこれはほとんど不可能であろう。古紙購入量を操作して備蓄という形で古紙価格を中位安定化し、回収集荷体制の壊れるのを防止しようという政策は、根本的な欠陥を有しているのではないかと推測される*。健全な古紙回収集荷体制の確立のためには、製紙メーカーの購入価格を、少なくとも物価上昇程度は引上げる時期にきているものと考えられ、社会的側面からこれは当然のことであろう。

5. 結 言

古紙備蓄問題は、数学的には、(1)(2)および(4)式を満たす古紙価格と在庫がある範囲内におさまるような古紙購入量を見い出せという問題として定式化される。この問題は Appendix に示されているように非線型の不等式の解を求める問題に帰着されるが、この有効な解法はない。そこで本報告では、古紙購入量を3つの違った制御則の型で前もってあたえてしまい、その中のパラメータの値をいくつか仮定しシミュレーションによって解の存在の可能性をさぐってみた。結果は図1から図4に示した通りであるが、月々1万t程度の恒常的な備蓄を行ったとしても、古紙価格を30円近

* 厳密には Appendix に定式化した非線型不等式の解が常識的な在庫量の上下限に対して、存在しないことを証明する必要がある。

傍で推移せしめることはとうてい不可能であり、古紙回収率を考えに入れれば、備蓄によって古紙価格の中立安定を計るという事は机上の楼閣であることが推測された。この推測を厳密に証明するには、Appendixに示した非線型不等式の解が存在しないことをいえばよいのであるが、これは、今後の研究課題として残した。

Appendix

(1), (2)および(4)式の解 $P(t)$ および $S(t)$ が次の不等式を満すようにする $\hat{X}(t)$ を求める問題は以下のようになる。

$$P_1 \leq P(t) \leq P_2, \quad S_1 \leq S(t) \leq S_2 \quad (\text{A-1})$$

(1)式, (2)式を $t=1$ から $t=T$ まで書き下し辺々かけあわすことにより次式を得る

$$P(T) = \prod_{i=1}^3 \{\hat{X}(T-i)\}^{a_i} \prod_{i=1}^3 \left\{ \frac{Q(T-i)}{Q(T-i-1)} \right\}^{b_i} \cdot \prod_{i=1}^3 \left\{ \frac{1}{X(-i)} \right\}^{a_i} \cdot \prod_{i=1}^3 \left\{ \frac{Q(-i-1)}{Q(-i)} \right\}^{b_i} \cdot P(0) \quad (\text{A-2})$$

$$W(T) = Q(T)^a \cdot P(T)^b \cdot Y(T)^r \cdot \left\{ \frac{1}{Q(0)} \right\}^a \cdot \left\{ \frac{1}{Q(0)} \right\}^b \cdot \left\{ \frac{1}{Y(0)} \right\}^r \cdot W(0) \quad (\text{A-3})$$

(A-2) 式を (A-3) 式に代入し外生変数 $Q(t)$ および $Y(t)$ と初期条件より決っている値 $P(0)$, $W(0)$, $\hat{X}(-i)$ を含む項を $d(T)$ とおけば $W(t)$ は次のように $X(T-i)$ の関数である。

$$W(T) = \prod_{i=1}^3 \{\hat{X}(T-i)\}^{\beta a_i} \cdot d(T) \quad (\text{A-4})$$

一方, (4)式より $S(t)$ は

$$S(t) = S(0) + \sum_{T=1}^t (X(T) - W(T)) \quad (\text{A-5})$$

これに (A-4) を代入して

$$S(t) = S(0) + \sum_{T=1}^t [X(T) - \prod_{i=1}^3 \{\hat{X}(T-i)\}^{\beta a_i} \cdot d(T)] \quad (\text{A-6})$$

を得る。また (A-2) において外生変数と初期条件を含む項を $C(T)$ とおいて $T=t$ を代入すれば次式を得る。

$$P(t) = \prod_{i=1}^3 \{\hat{X}(t-i)\}^{a_i} \cdot C(t) \quad (\text{A-7})$$

(A-6) と (A-7) を (A-1) に代入すれば $\hat{X}(3)$, $\hat{X}(4)$, $\dots$, $\hat{X}(t)$ に関する非線型不等式を得る。ただし, (A-6) 中に現われる $X(T)$ は12カ月を周期とする季節調整の周期関数(表1)を $f(t)$ とおくことにより次式であたえられる。

$$X(T) = f(T) \cdot \hat{X}(T) \quad (\text{A-8})$$

以上の結果をまとめると、古紙備蓄問題は、

$$P_1 \leq \prod_{i=1}^3 \{\hat{X}(t-i)\}^{a_i} \cdot C(t) \leq P_2$$

$$S_1 - S(0) \leq \sum_{T=1}^t [f(T) \hat{X}(T) - \prod_{i=1}^3 \{\hat{X}(T-i)\}^{\beta a_i} \cdot d(T)] \leq S_2 - S(0)$$

を満す $\hat{X}(3)$, $\hat{X}(4)$, $\dots$, $\hat{X}(t)$, $\dots$ を求めることに帰着される。これを直接に解くことはほとんど不可能である。

古紙回収率 $\{X(t)/Y(t-q)\}$ (q は紙製品が古紙として発生するのに要する遅れ時間) に制約があるとすれば上記の2式に加えて、さらに次の不等式によって $\hat{X}(t)$ は制約される。

$$f(t) \hat{X}(t) \leq R \cdot Y(t-q)$$

R は回収率の上限である。

(受理 57.3.6)