研 究 報 文

面圧荷重を受ける波段および波板の弾性変位
および材料変形強度有効率愛媛大学工学部 松島 成夫, 矢野 忠
長崎大学教養部 松島 晟Elastic Displacement and its Material Efficiency for Corrugated
Fiberboard and Wave Board under Surface LoadShigeo Matsushima and Tadashi Yano
Faculty of engineering, Ehime UniversityAkira Matsushima
Faculty of liberal art, Nagasaki University

From elastic analysis as in the previous paper, displacements at the top positions of FB (semichemical corrugated board in corrugated fiberboard) and WB (board of wave shape) under surface load were determined, and the deformation strength efficiencies (deformation strength per material mass) were discussed.

And the difference between their displacement behaviors for FB and WB was obtained, and mechanism of deformation strength for FB was also discussed.

From extremely small moment caused by the condition of the displacement $\lambda_n=0$ in the machine direction for the FB, it is recognized that the displacement of load direction becomes very small, and its value is about 1/20 of WB.

Keywords : Strength of corrugated fiberboard, Elastic stress analysis,
Structure strength

1. 結 言

段ボール^{1),2)}は包装用箱材として、波板(フルート…波形状の板)は包装用詰材ばかりでなく、銅、樹脂、スレート材等の構造用材などとして盛んに利用されている。したがって、段ボールの中芯(波段)および波板についての応力、荷重等に対する強度の議論ばかりでなく、波段および波板についての一つの包装特性を示す変形に対する強度を議論することは、波段および波板の包装部材設計の立場および波板に関する強度算定上重要なことである。すなわち、波段および波板の変形に関する強度を明らかにし、これらの変形強度の比較を行い、両者の相違性を議論し、両変形に関する強度機構をより明確にすることは有意義なことである。

段ボールの強度^{3),4)}、段ボール箱の強度⁵⁾⁻⁷⁾等に関する研究は既に行われている。また、幾何学的条件を基にした段ボールの力学的強度機構に関する引張り変形強度についての筆者らの研究がある⁸⁾。弾性変形については、荷重に伴う波板の曲げ変形に関する研究⁹⁾があり、筆者らの面圧を受ける波段(段ボールの中芯)の内部応力等に関する研究¹⁰⁾、さらに波段および波板の内部応力およびこれらの相違等に関する研究¹¹⁾もある。

しかし、筆者らの前の研究^{10),11)}では、中芯および波板の変位に関する論議は行っていない。けれども、変位は変形抵抗を表すパラメータとして、また包装特性の一つである緩和性を明らかにする上に重要な値である。

以上のことより, 本報では前報¹¹⁾と同様, 正弦波形状をなす波段および波板を弾性体と見なし, 波段, 波板の面圧荷重を受ける際の波段および波板の弾性変位強度を議論することを試みた。そして, 両者の変位強度を比較し, 変位に関する機構を明らかにすることを試みた。その変形強度の算定は前報の処法にならい, 曲がりはりの算定法を用いて行った。

2. 解析方法

段ボールの中芯(波段)および波板は波状をなす曲面である。中芯については段上部の糊付け部付近の加工による複雑な状態変化などがあり, またその形状としては単純な関数形であるとはいいい難いが, 簡便で近似の高いものとして, Seydel にならい⁹⁾, 前報と同様¹⁰⁾, 正弦波状をなすものであるとした(図1(a)参照)。そこで, 波段および波板の変形は平面ひずみ状態をなすものとし, 板のシート厚さ T の中央の位置 y_0

を

$$y_0 = (h/2) \sin(2\pi x/l) \quad \dots\dots(1)$$

であるとする。ただし, x は波状進行方向の基準位置からの距離, h は波形の高さ, l は波形の長さ(波長)である。周期性および対称性により, 考慮すべき基本的な形状は図1(b)のようなものであるとし, 近似的に, 波段および波板の山谷部の接線の角度が変化しない曲がりはりであるとする。

前報¹¹⁾にならい, 位置 x, t (厚さ方向の位置で y_0 からの距離)における波段および波板の応力は, 曲がりはり^{12),13)}の式と同様, 近似的に

$$\sigma = (N/T) + (M/(T\rho)) \quad \dots\dots(2)$$

$$(1 + (1/K)(t/(\rho+t)))$$

$$K = (1/3)(T/(2\rho))^2 + (1/5)(T/(2\rho))^4 + (1/7)(T/(2\rho))^6 \quad \dots\dots(3)$$

$$\rho = -(d^2 y_0 / dx^2) / (1 + (dy_0 / dx)^2)^{3/2} \quad \dots\dots(4)$$

$$N = -(W \sin \theta + W_0 \cos \theta) \quad \dots\dots(5)$$

$$M = -M_0 = -Wx + W_0 y_0 \quad (\text{波段}) \quad \dots\dots(6)$$

$$M = M_p = -Wx \quad (\text{波板}) \quad \dots\dots(7)$$

で表されるものとした。ただし, T は板厚, ρ は着目点 (x, y_0) の曲率半径, N は軸力, θ は波段および波板の接線 (dy_0/dx) と x 方向とのなす角である。 M_0, M_p は各々波段, 波板に働くモーメント, W は山谷部に働く垂直荷重, W_0 は反 x 方向に働く横圧(図1(b)参照)である。

波段の最上部と最下部(山谷部)の横(x 方向)の変位 λ_h はクラフト・ライナーと糊付け加工による束縛によって零, すなわち $\lambda_h = 0$ であると思なし, 波板の λ_h は横方向の束縛がなく自由(横荷重が零, $W_0 = 0$)であるとする。この条件とカスチリアノの定理^{14),15)}を適用した関係

$$\lambda = (\partial U / \partial W) = (-1/(ET)) \int_{-l/4}^{l/4} (N \sin \theta + (M/\rho^2)((1+K)/K)x + (M/\rho) \sin \theta + (N/\rho)x) dS \quad \dots\dots(8)$$

$$\lambda_h = (\partial U / \partial W_0) = (-1/(ET)) \int_{-l/4}^{l/4} (N \cos \theta + (M/\rho^2)((1+K)/K)y_0 + (M/\rho) \cos \theta + (N/\rho)y_0) dS \quad \dots\dots(9)$$

とを用いて, λ および λ_h の値を決定した。ただし, (8)

Fig. 1 Composition of corrugated fiberboard (FB) and a fundamental element of corrugated sheet.

(a) A schematic picture of corrugated sheet.

(b) A fundamental element of corrugated sheet.

Position (x, y_0) of corrugated sheet is introduced in terms of the coordinate system shown in Fig. 1 (b). Here T, l, h, w and w_0 represent thickness, wave-length, height, weight and lateral force of corrugated sheets, respectively.

の U はひずみエネルギー, E は縦弾性係数 ($=1 P_a$), S は基準位置より波形に沿っての厚さ中心部の長さである。

荷重と変位の比例関係が成立するから, λ および λ_h は所定の垂直荷重 $W=10^{-4} \text{N/mm}$ が働く際の値のみを以下では議論する。

3. 結果と考察

3.1 荷重および横方向の変位

ポアソン比 $\nu=0.2$ とした際の荷重方向の変位 λ , 横方向の変位 λ_h を求め, それらの結果を以下に示す。

上記の解析法によって, 波段 (FB) および波板 (WB) の垂直荷重 ($W=10^{-4} \text{N/mm}$) が働く際の荷重方向の変位 λ と波板の厚さ T の関係を求めた。その関係を示したものが図 2 である。図より両者の λ は T の増加によって急激に減少することが分かる。

また, 波段および波板の λ と波形の高さ h および長

Fig. 2 Relations between vertical displacement λ and T for FB and WB.

さ l の関係を求めた。これらの関係を図 3, 4 に示した。図 3 (a), 4 (a) より, 両者の λ は l の増加に伴って増加することが分かる。なお, 図 3 (b) から, 波段の λ は h の増加に伴ってまず強く減少し, その後, 緩やかな増加を呈し, その間に λ は最小値をとることが分かる。これに対して, 図 4 (b) から波板の λ は h の変化によらずほぼ一定であることが分かる。

波板の横変位 λ_h と T の関係を図 5 に示す。図より波段および波板の λ の場合と同様に, λ_h は T の増加によって急激に減少することが分かる。

また, λ_h と l および h の関係を図 6 (a), (b) に各々示す。図より λ_h は l および h の増加によって各々増加することが分かる。

T による λ および λ_h の減少は, 前報¹¹⁾ で得られた結果 (たとえば, 最大応力 $\sigma_{\max}$ の結果 (図 7 (b) 参照), すなわち (2) の $(1/T)$ の因子による波段および波板全域の応力の減少) と弾性方程式の応力-ひずみの比例関係とにより, 応力の減少に基づく部材全域のひずみの値の減少によるものであると考えられる。すなわち, 変位方向の全ひずみの成分の和である変位 λ および λ_h が減少したものと考えられる。

Fig. 3 Relations of $\lambda-l$ and $\lambda-h$ for FB.

Fig. 4 Relations of λ - l and λ - h for WB. Fig. 5 Relation between horizontal displacement λ_h and T for WB.

図3 (a), 4 (a), 6 (a) より, 波長の λ および波板の λ_h は l の増加によって各々増加することが分かる。このことは一般の真直はりの l の増加(すなわち, l の増加に伴うモーメント M の増加)によるたわみ増加と同様に, l の増加による λ および λ_h の増

Fig. 6 Relations of λ_h - l and λ_h - h for FB.

加(すなわち, 形状増加による効果)が強く生じたことによるものと考えられる。すなわち, 変位方向の全ひずみの成分の和である変位 λ , および λ_h が増加したものと考えられる。

図3 (b), 4 (b), 6 (b) より, 波段および波板の λ - h 関係と波板の λ_h - h 関係は各々顕著に異なることが分かる。波段の λ の h の増加による減少とその後の緩やかな増加は, 前報¹¹⁾ に示された応力(たとえば, $\sigma_{\max}$ (図7 (a) 参照) の h による減少と緩やかな増加とによって, 部材全域のひずみの減少および緩やかな増加が生じたことによるものと考えられる。波板の λ が h の増加に対して一定であることは(7)より変形の基因となるモーメント M_p が位置 y_0 (すなわち, h) に無関係であることによるものと考えられる。さらに, h の増加による波板の λ_h の増加は, (9)より分かるように h の増加によって ρ が減少し, その結果として生じたものと考えられる。すなわち, h による λ および λ_h の複雑な変化は, h の変化より生じたモーメントによる応力の影響ばかりでなく, 上述のように h によって生じた ρ の変化, すなわち形状変化にも強く

Fig. 7 Relations of $\sigma_{\max}$ - T for WB and FB.

影響しており、これらの影響を通して h の増加による応力およびひずみ分布の変化が顕著に現れたものと考えてよからう。

図2～6より、波段の λ の値は波板の λ より 1/20 程度、また波板の λ_h より 1/40 程度小さいことが分かる。このことは、 λ が各点に生じるひずみの荷重方向の成分の和であることにより、前報^{(10),(11)}の波段の応力の絶対値の減少に伴うひずみの減少が基因となって生じたものであろう。すなわち、(2), (6), (7)より、波段の λ の減少は応力を起こす主因となる M_p の絶対値が M_0 のものに比べ著しく低い (図8参照) ことに基づくものであると考えられる。

3.2 変形強度基準と形状

前報^{(10),(11)}の波段 (中芯) の山部の最大応力 $\sigma_{\max}$ の材料質量当りの強度基準にならって、材料の質量は板厚 T と波形に沿っての長さ S 、また単位長さ当りの段数 $1/l$ に比例し、段当りの材料量は T とその実長に比例するものと見なし、 $T=0.24$ mm, $l=9.2$ mm, $h=4.6$ mm の変位 λ_{r0} (波段の λ)、 λ_{w0} (波板の λ)、 λ_{h0} (波板の λ_h) を基準とした材料量当りの変形強度基準 E_r

Fig. 8 Relations between bending moment M and l for FB and WB.

(波段の λ に関するもの)、 E_w (波板の λ に関するもの)、 E_h (波板の λ_h に関するもの) を

$$E_r = \frac{((9.2^2 + 4.2^2)^{1/2}}{(l^2 + h^2)^{1/2}} \frac{(0.24}{l} \lambda_{r0}}{(9.2}{T} \lambda_r) \quad \cdots \cdots (10)$$

$$E_w = \frac{((9.2^2 + 4.2^2)^{1/2}}{(l^2 + h^2)^{1/2}} \frac{(0.24}{l} \lambda_{w0}}{(9.2}{T} \lambda_w) \quad \cdots \cdots (11)$$

$$E_h = \frac{((9.2^2 + 4.2^2)^{1/2}}{(l^2 + h^2)^{1/2}} \frac{(0.24}{l} \lambda_{h0}}{(9.2}{T} \lambda_h) \quad \cdots \cdots (12)$$

で定義する (ただし、実用段ボールとして $T=0.3$ mm 程度のものであるので、 $T=0.24$ mm, $T=0.36$ mm のものを中心として以下述べる)。ここで、 λ_r 、 λ_w は各々波段、波板の λ である。

波段の E_r - T 関係を示す図9 (a) より、 E_r は l および h によらず T の増加に伴い増加するが、その増加率は T の増加によって減少することが分かる。しかし、図9 (b), 10 より、波板の E_w - T および E_h - T 関係は T の増加に伴って増加するが、 E_r の際のようにその増加率は減少せず、常に増加することが認められる。また、 l/h = 一定のとき、 E_w - T の関係は変化せず、 l/h = 一定のときの E_h - T 関係も変化しないことが分かる。

また、 E_r - l および E_r - h の関係を示す図11を見ると、 E_r の値は、 l および h の増加によって増加する

Fig. 9 Relation between material efficiency E_f (for FB) and T , and relation between material efficiency E_w (for WB) and T .

が、やがてある値に達すると減少し、その間に l および h の増加による E_f の最大値が現れることが分かる。

E_w - l および E_w - h の関係、 E_h - l および E_h - h の関係を示す図 12, 13 により、 E_w および E_h は l の増加によってまず増加するが、ある値を越えるとやがて減少し、ある l の値で E_w および E_h の最大値が生じることが分かる。しかし、 E_w は $h=0$ 付近ではほぼ一定となり、 h が大きくなるにつれて減少すること、および E_h は h の増加によって単調に減少することが認められる。

図 9, 10 および (10)~(12) より、 T による E_f, E_w, E_h の増加は、これらの式の特性 (E_h と $(1/T)$ の比例関係) と、波板の T による λ および λ_h の強い減少性 (図 2, 5 参照) とによって生じられたものと考えられる。

図 3 (a), 4 (a), 6 (a) および (10)~(12) より、

Fig. 10 Relation between material efficiency E_h (for WB) and T .

Fig. 11 Relations of E_f - l and E_f - h for FB.

Fig. 12 Relations of E_w - l , and E_w - h for WB.

l による E_r , E_w , E_h の最大値の発生 (図 11 (a), 12 (a), 13 (a) 参照) はこれらの図に見られるような l による λ および λ_h の増加に, (10)~(12) の特性 (すなわち, l が小さいとき変形強度基準が l に比例し, λ , λ_h に逆比例すること) が加わり, E_r , E_w , E_h の増加, 減少が生じたものと考えられる。

h の変化による E_r の最大値 (図 11 (b) 参照) は図 3 (b) に示された λ の最小値の発生と (10) の特性によって生じたものと考えられる。同様な考えによって, 波板の $h = 0$ 付近に λ の最大状態が生じたように, h による E_w の単調な減少 (図 12 (b) 参照) が生じることは波板の λ が波段のように最小値を示さず, 単に一定 (図 4 (b) 参照) となっていることと (11) の特性によるものであると見なせ, また h による E_h の単調減少 (図 13 (b) 参照) は h による λ_h の単調な増加 (図 6 (b) 参照) と (12) の特性とによるものであると考えることができる。

図 2, 5 より分かるように波段の λ および波板の λ , λ_h は T によって減少し, 図 9, 10 より E_r , E_w , E_h

Fig. 13 Relations of E_h - l and E_h - h for WB.

は増加することが示された。このことより, T に対して所要の波段の λ , 波板の λ および λ_h に応じた T 値以上の T の値を設定することが, 波段および波板の剛性に対する材料の有効性を考慮する際, 必要であると考えられる。

図 3 (a), 4 (a), 6 (a) より波段の λ および波板の λ , λ_h は l の増加によって単調に増加することが, また, 図 11 (a), 12 (a), 13 (a) より E_r , E_w , E_h はある特定の $l = 2 \sim 4$ mm で最大となることが示された。このことより, $l > 4$ mm のところでは, 所要の変形強度に対する l より小さい l の値をとることが, 変形強度の面からも, また材料の有効性からも妥当であろう。

なお, 図 3 (b), 11 (b) より, 各々波段の λ は $h = 5$ mm 付近で最小, E_r は $h = 3 \sim 10$ mm で最大となることが示された。このことにより, 本計算範囲の形状域では, h が 5 mm 程度の値をとることが変形強度および材料量当りの変形強度 E_r の面からみて妥当であると判断される。

図4(b)より波板の λ は h の増加によってほとんど変化せず、ほぼ一定な値をとることが、また図12(b)より E_w は h の増加によって減少することが各々示された。このことより、変形強度、材料当りの変形強度 E_w の両面から見て、 h は小さな値をとることが望ましいことが分かる。

図6(b)より波板の λ_h は h の増加によって増加し、図13(b)より E_h は h の増加によって減少することが示された。このことより、波板の λ の場合と同様、変形強度、材料当りの変形強度 E_h から見て h は小さい値をとることが望ましいことが分かる。

以上のことより、この E_t , E_w , E_h の値が最大値となるよう、また可能な限りそれらの基準値を大きくとるよう中芯の形状を設定することが望ましく、また面圧縮に対する強度上重要である。したがって、段ボールの中芯の形状寸法は勿論のこと、波板についても、変形強度および材料量当りの変形強度に対して、最適なものが存在し、その決定を行うことは段ボールおよび波板の形状設定上重要なことであると思われる。

3.3 ν と 変 位

前節で変位はポアソン比が $\nu=0.2$ であるとした。そこで、 ν による波段、波板の変位への影響を明らかにするため、 ν と変位(λ , λ_h)との関係を求めた。その関係を図14に示した。図より、 λ および λ_h の ν の増加(0~0.5)による変化は5%以下で、それらの値はほぼ一定であると見なせる。

Fig. 14 Relations between λ - ν and λ_h - ν for FB and WB. ν is Poisson's ratio.

4. 結 言

山および谷部に垂直面圧荷重を受ける波段(中芯)および波板の弾性変形強度の解析を行い、面圧縮変形時の変位(山谷部の垂直荷重(10^{-4} N/mm)による変位 λ (荷重方向), λ_h (横方向))および材料量当りの変形強度有効率 E_t (波段に関するもの), E_w (波板の荷重方向の変位に関するもの), E_h (波板の横方向の変位に関するもの)を議論した。その結果、次のようなことが分かった。

(1) 波板の λ は波段のものより20倍程度、 λ_h は40倍程度大きい。

(2) 波板の λ および λ_h の値が波段のものより顕著に大きいことは、波板のモーメントが波段のものより顕著に大きいことによるものであると考えられる。

(3) 波段および波板の λ は各々板厚 T の増加に伴って顕著に小さくなる。

しかし、波段の λ は波形の波長 l の増加によって大きくなる。また、波段の λ は、波形の高さ h の増加によりはじめは減少、次に増加を示し、ある特定の h の値(我々の結果では6mm付近)で λ の最小値が生じる。波板の λ は h の増加によって変わらず、ほぼ一定な値をとる。

(4) 波板の λ_h は、波段の λ と同様 T の増加によって減少し、 l によって増大することが認められた。

しかし、波板の λ_h は l および h いずれの増加によっても各々増大する。

(5) 波段 E_t および波板の E_w , E_h は T の増加に伴って各々増加する。そして、波段の E_t および波板の E_w , E_h の値は l の増加による増加および減少を示し、ある特定の l で最大となる。また、波板の E_w , E_h は波形の高さ h の増加によって常に減少するが、波段 E_t はある特定の h の値で最大となる。

(6) 上の(3-5)の所見より、材料の有効性を配慮して、 T は必要とされる λ および λ_h に応じた T の値以上のものとすることが望ましい。所要の λ および λ_h に応じた l が変形強度有効率最大となる時の l の値(我々の結果では4mm程度の値)より大きい際、 l は可能な限り小さい値をとることが、また h は常に可能な限り小さい値をとることが望ましい。

なお、ポアソン比による λ および λ_h への変化は小さく、これらの値は近似的に一定とみなしてよい。

以上述べたことより、形状変化から見た段ボールおよび波板の変形強度の設定は変形基準を考慮しつつ、要求する形状を決めることが必要である。この設定条件に対し、本研究の結果は、段ボールならびに波板の

山谷部に働く圧縮荷重による変形（特に変位）に関するものであり、また前報¹¹⁾と同様、生産性への配慮を考慮していないが、より合理的に変位に関する強度形状の設定を行うに当たっての意義ある基礎資料となるであろう。

謝 辞

本報をまとめる際、図の作成について全面的なご協力を得た応用物理学講座技官 大塚昌司氏、また必要な諸資料の提供を賜ったレンゴー株式会社の堀垣雄氏に感謝する。

参 考 文 献

- 1) 例えば、段ボール実用百科編集委員会：段ボール実用百科，一律書房，21（1970）
- 2) レンゴー株式会社：段ボール技術，包装新聞社，16（1971）
- 3) 例えば，1) の p.537；2) の p.310
- 4) J. W. Koning Jr. and R. Stern：Tappi，60（12），128（1977）
- 5) 例えば，1) の p.548；2) の p.316
- 6) 例えば，紙業タイムス社：新・紙加工便覧，紙業タイムス社，797（1980）
- 7) G. G. Maltenfort：Tappi，53（11），1076（1970）；P. Grartaganis：Tappi，58（11），102（1975）；R. M. Morris Jr. and G. P. Vallow：Tappi，58（11），110（1975）
- 8) 松島成夫，奥田隆宏，宮内 治，野沢光治：紙パ技協誌，36（3），377（1982）
- 9) S. P. Timoshenko and S. Woinowsky Krieger：Theory of Plates and Shells，McGraw-Hill Co.，366（1959）
- 10) 松島成夫，矢野 忠，松島 晟：紙パ技協誌，42（5），480（1988）
- 11) 松島成夫，矢野 忠，松島 晟：紙パ技協誌，43（6），602（1989）
- 12) 例えば，白鳥英亮：材料の力学，朝倉書店，95（1979）
- 13) 例えば，黒木剛司郎：材料力学，森北出版，150（1967）
- 14) 例えば，清家政一郎：材料力学，共立出版，23（1978）
- 15) 例えば，12) の p.79，13) の p.121

（受理：'89. 9. 8）