力学モデルによる段ボールの変形解析に関する研究*

長岡技術科学大学工学部 石 渕 浩, 吉 谷 豊
吉沢工業(株) 吉沢 昭宣

Analysis of Deformation of Corrugated Fiberboard by Mechanical Model

Hiroshi Ishibuchi^{*1}, Akinori Yoshizawa^{*2} and Yutaka Yoshitani^{*1}

^{*1} Department of Engineering, Nagaoka University of Technology

^{*2} Packaging System House Co., Ltd.

Recently, the use of corrugated fiberboard as a packaging structural materials has been increased, and it has been required to have high-precision and high-strength as industrial materials. Corrugated fiberboard is composed of the paper board (corrugated fiberboard stencil) of top liner, bottom liner and medium. It is well-known that the paper board expands and shrinks easily, because the shape change as the moist-expansivity, shrinkage of fibers occurs through the temperature and humidity change. The Young's modulus and expansivity of paper board depend upon the papermaking machine direction (MD), because fibers of the paper board manufactured by a paper-making machine arrange to the paper-making direction. Furthermore the direction was arranged fibers (a fiber orientation) does not always match the paper-making machine direction. In this study, A nonlinear and continuous mechanical model developed for superplastic materials was proposed to analyze the tensile and the bending properties of fiberboard before/after the temperature and humidity cycling. For the warping deformation problem of corrugated fiberboard, a prediction equation of warping deformation was derived from the Lamination theory, and the mechanism of the warping deformations were investigated. Following results are obtained : (1) The nonlinear and continuous mechanical model can be applied to the analysis of the tensile and the bending properties of fiberboard. (2) For SCM, the creep rate in the fiber direction (MD) decreases about 4% by temperature and humidity cycling. (3) Spring backs of fiberboard increase by the temperature and humidity cycling, and increasing rate by the humidity cycling is greater than by the temperature cycling. And further, increasing rate of CD is greater than MD. (4) Generation limits of spring back of KL and SCM are set within the limits of a finite band by the temperature and humidity cycling. (5) There is little change in the residual stress distributions of the sheet for KL, but residual stress for SCM increases by temperature and humidity cycling. (6) Relation between the warping and the parameter influenced the warping has been elucidated by the simplified prediction equation, and prediction of the warping deformation are possible by them. (7) The twisting warping are closely connected with difference of the fiber orientation angle between top liner and bottom liner, and they increase with fiber orientation angle. (8) The bending warping and twisting warping increase as the

* この報告の一部は第 41 回塑性加工連合講演会 (1990 年 10 月, 長野), 日本機械学会第 69 期通常総会講演会 (1992 年 4 月, 横浜), 及び Pan-Pacific Pulp & Paper Technology Conference (1992 年 9 月, 東京) に於て発表した。

anisotropy ratio of Young's modulus and the anisotropy ratio of the expansivity, and the increase ratio of bending warping along with the machine direction (MD) is larger than it along with the cross direction (CD).

Keywords : Mechanical model, Prediction equation, Corrugated fiberboard, Liner, Medium, Spring back, residual stress, Warping, Curvatur

1. 緒 言

近年, 包装構造材である段ボールの用途が広がるにつれ, 工業材料としての高精度・高強度化が金属と同様に要求されるようになってきた。しかし, 段ボールの力学的変形に関する研究は少なく^{1)~4)}, また機械的精度及び加工特性に関する研究報告もほとんどみられない。

3層段ボールは表・裏ライナ, 中芯の板紙(段ボール原紙)からなる構造体である。板紙は温度・湿度(以下, 断らない限り湿度は相対湿度を指す)変化を与えることにより, 紙を構成する繊維が膨潤, 収縮という形態変化を起こすため伸縮することが知られている⁵⁾。また, 抄紙機によって抄造された板紙は抄造方向に繊維が配列するため, 抄造方向とその垂直方向で弾性係数, 伸縮率は大きく異なる。

従来, 段ボール原紙のような板紙の引張り特性の解析については, ばねとダッシュボットの機械要素を用いた3要素モデルやその拡張形である多要素モデルが示されてきたが, これらのモデルは基本的現象を十分説明できるとは言い難い^{6)~9)}。例えば, 3要素モデルについては引張りの降伏現象は説明できるが, クリープや緩和現象は定量的によく合わない。多要素モデルについては, 要素の数を増やすだけ数学的取扱いは複雑となり, 長時間の現象には定量的には一致しない。また板紙の曲げ特性の解析についてはあまり解析例がないように思われる。

段ボールについては引張りや曲げ変形よりも反り変形が重要な問題となるが, 反り変形については経験的な立場からの報告がほとんどである¹⁰⁾。唯一, 竹中ら¹¹⁾は反り変形を解析的に取り扱っているが, 反りの計算

を行うために複雑な行列演算を必要とするため, 反りとこれに影響を及ぼすパラメータとの具体的な関係式より推測することは難しい。

よって本研究では, 段ボール原紙と段ボールの変形解析を行うためそれぞれの力学モデルを提案した。そして, 段ボール原紙については3要素モデルや多要素モデルにかわり, 引張り及び曲げ特性を表すための非線形性を考慮した力学モデルの適用を試みた。そして力学モデルにより, 引張り及び曲げ特性に及ぼす温度・湿度履歴の影響をみた。

3層段ボールについては複合材料力学のLamination theory^{12)~14)}により, 簡易的に反りを評価できる力学モデルを導出しその妥当性を検討した。更に本力学モデルから反り変形と反りに影響を及ぼすパラメータとの関係を明らかにし反り変形予測を行った。

2. 段ボール原紙の引張り及び曲げ変形解析

2.1 供 試 材

JIS P 3902, JIS P 3904に準拠し段ボール表裏の平面を形成するクラフトライナ(KL)にK 6, 波段を形成するセミ中芯(SCM)に120を用いた。これらにはJIS P 8111に準拠した前処理(温度 $20 \pm 2^\circ\text{C}$, 湿度 $65 \pm 2\%$ の恒温・恒湿状態に24時間以上放置)を施した。測定方向は抄造方向(MD), その 45° 方向(45°D), その垂直方向(CD)の3方向とした。表1に本実験に使用した供試材の機械的性質を示す。

2.2 履歴条件

温度と湿度の変更は1時間ごとに設定を切り換え, 1周期2時間, 計12周期24時間の矩形波の履歴を表2に示す2つの条件により与えた。

Table 1 Mechanical properties of specimens at $20 \pm 2^\circ\text{C}$ and $65 \pm 2\% \text{ RH}$

Specimen	Thickness Th/mm	Apparent density Ad/ $\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$	Tensile strength Ts/ $\text{kN}(\text{MD}/\text{CD})$	Elongation $\delta/\%(\text{MD}/\text{CD})$	Bursting strength Bs/ kPa
KL	0.22	0.81	191/59	2.3/3.6	543
SCM	0.23	0.78	218/83	2.5/3.8	634

Table 2 Cycling pattern of humidity and temperature

Cycling pattern	Temperature cycling		Humidity cycling	
	Initial temperature/°C	Temperature amplitude/°C	Initial humidity/% RH	Humidity amplitude/% RH
①Humidity	20±3 (Constant)	—	50	75±25
②Temperature	20	20± $\frac{5}{7}$	90±7 (Constant)	—

2.3 力学モデルの導出

段ボール原紙の引張り及び曲げ特性を評価できる力学モデルについて考える。はじめに履歴前後の板紙について引張り試験を行い、応力とひずみ、応力とひずみ速度の関係を求めた。引張り試験には万能試験機(島津製作所, AG 10 TA)を用いた。JIS P 8113 に準拠し試験速度は 0.2, 0.5, 1, 2 mm/min とした。本試験で求めた応力—ひずみ曲線のバラツキは 5 回の試験結果より約 8% であり, ここではその平均状態を表す代表的な曲線を用いた。履歴前の KL, SCM について MD, CD の応力とひずみの対数関係を図 1 に, 応力とひずみ速度の関係を図 2 に示す。

板紙の引張り強度は, MD, CD で異なることが知られている^{15)~18)}。繊維の配列構成により KL, SCM にお

ける MD, CD の引張り応力 σ_m , σ_c 及び繊維方向からのずれ角 θ 時の引張り応力 σ を次式で表す。

$$\sigma_m = (1+f)s, \quad \sigma_c = (1-f)s \quad \cdots(1)$$

$$\sigma = (1+f-2f\sin\theta)s \quad \cdots(2)$$

ここで f は繊維の配向による異方性係数, s は繊維が等方に配向した際の引張り応力とする。式(1)より f と s は式(3)として導かれる。

$$f = \frac{\sigma_m - \sigma_c}{\sigma_m + \sigma_c}, \quad s = \frac{\sigma_m + \sigma_c}{2} \quad \cdots(3)$$

また真応力と真ひずみ及び真ひずみ速度の間に図 1, 2 に示すような非線形性, ひずみ速度依存性が存在するものとし, 関係式を次のように表す(ここで, 真ひずみ=公称ひずみと近似して取り扱う)。

$$\sigma_m = F_1 \varepsilon^{n_1} \dot{\varepsilon}^{m_1}, \quad \sigma_c = F_2 \varepsilon^{n_2} \dot{\varepsilon}^{m_2} \quad \cdots(4)$$

Fig. 1 Relation between tensile stress and strain of KL and SCM before cycling

Fig. 2 Relation between tensile stress and strain rate of KL and SCM before cycling

ここで F_1 , F_2 は材料定数, n_1 , n_2 はひずみ硬化指数, m_1 , m_2 はひずみ速度依存性指数である。式(1)~(4)より θ 時の引張り応力 σ は式(5)で表される。

$$\sigma = F_1 \varepsilon^{n_1} \dot{\varepsilon}^{m_1} - (F_1 \varepsilon^{n_1} \dot{\varepsilon}^{m_1} - F_2 \varepsilon^{n_2} \dot{\varepsilon}^{m_2}) \sin \theta \quad \dots\dots(5)$$

式(4)よりひずみ速度 $\dot{\varepsilon}$ が一定の場合は次式となる。

$$\log \sigma_m = n_1 \log \varepsilon + c_1, \quad \log \sigma_c = n_2 \log \varepsilon + c_2 \quad \dots\dots(6)$$

また式(4)からひずみ ε が一定の場合は次のようになる。

$$\log \sigma_m = m_1 \log \dot{\varepsilon} + c_3, \quad \log \sigma_c = m_2 \log \dot{\varepsilon} + c_4 \quad \dots\dots(7)$$

ここで $c_1 \sim c_4$ は定数である。式(6)の関係から求められる勾配より n 値を, 式(7)から求められる勾配より m 値が決められる。 F 値は任意の ε 及び $\dot{\varepsilon}$ における σ の条件を与えることにより求められる。

以上の関係を用い履歴前後の KL, SCM の各方向について F , n , m 値を求めたものを表 3 に示す。また, これらの値を式(5)の力学モデルに代入し, 計算した結果と実験結果の引張り応力-ひずみ曲線を図 3 に示す。履歴前後の KL, SCM の各方向とも測定値と計算値は誤差率 7% 以下の精度で一致しており, 板紙の引張り

Table 3 Material constants of mechanical model for KL and SCM

(a) KL

Cycling	Direction	F/MPa $\cdot$ S ^m	n	m
Before	MD	860.9	0.711	0.032
	CD	118.7	0.570	0
Humidity	MD	684.4	0.683	0.043
	CD	33.5	0.444	0
Temperature	MD	779.3	0.679	0.017
	CD	56.0	0.500	0

(b) SCM

Cycling	Direction	F/MPa $\cdot$ S ^m	n	m
Before	MD	815.0	0.770	0.015
	CD	76.4	0.719	0
Humidity	MD	460.6	0.632	0.015
	CD	64.8	0.415	0.031
Temperature	MD	580.1	0.675	0.016
	CD	83.7	0.422	0.052

Fig. 3 Relation between tensile stress and strain of KL and SCM before and after cycling (measured value and calculated value)

特性への本力学モデルの適用は妥当であると言える。

2.4 引張り特性に及ぼす履歴効果

2.4.1 応力-ひずみ曲線による評価

図 3 から温度・湿度履歴による応力-ひずみ曲線を見ると, KL は各方向で履歴前より見かけ上ひずみ硬化は小さくなっている。また破断応力は履歴前とほとんど変化はないが, ひずみは MD で履歴前の約 2 倍, CD で約 3 倍の伸びを示す。

逆に SCM は履歴前よりひずみ硬化は大きくなり, 破断応力は MD で履歴前の 1.2~1.4 倍, CD で約 3 倍となる。また, ひずみは MD で約 1.5 倍, CD で約 2.5 倍伸びる。

2.4.2 クリープ解析

KL, SCM の MD については履歴前後で線形のひずみ速度依存性があるため, 式(5)の力学モデルによりクリープ解析を行った。式(5)より $\theta=0$ とし, 時間 $t=0$ で $\varepsilon=0$, $\sigma=\sigma_0$ なる初期条件を用い, ε に関する微分方程式を解くと次式となる。

$$\varepsilon = \left(\frac{n_1 + m_1}{m_1} \right)^{\frac{m_1}{n_1 + m_1}} \left(\frac{\sigma_0}{F_1} \right)^{\frac{1}{n_1 + m_1}} (t)^{\frac{m_1}{n_1 + m_1}} \quad \dots\dots(8)$$

式(8)において, ε と t の対数よりクリープ曲線は直線で表されるため, 温度・湿度履歴前後の直線の傾きより履歴によるクリープの減少率が求められる。表 2 に示した F , n , m 値を用い, 式(8)より計算した MD における KL, SCM のクリープ減少率を表 4 に示す。

Table 4 Decreasing rate of creep for MD of KL and SCM after cycling

Specimen	Decreasing rate of creep/%	
	Humidity cycling	Temperature cycling
KL	-4.7	0.3
SCM	4.2	3.8

温度・湿度履歴により SCM のクリープは約 4% 減少するのに対し, KL は温度履歴による変化はほとんどなく, 湿度履歴では逆に約 5% の増加を示す。

2.5 曲げ特性に及ぼす履歴効果

2.5.1 スプリングバック解析

スプリングバック測定装置の概念図を図 4 に示す。本測定では V 字形のダイスにポンチ（ポンチ先端の曲げ半径は 1 mm）を加工荷重 2 kN, 加圧時間 10 sec の条件で押しつけ、荷重を取り除いたときの試験片の曲がり量 φ_1 を測定した。試験片は幅 20 mm, 長さ 40, 80, 120, 160, 200 mm（図 4 の $l=20, 40, 60, 80, 100$ mm）の短冊状のものとした。曲がり量 φ_1 は各々 5 回の試験による平均値を用いた。スプリングバックは板状材料を曲げた後、弾性的効果により曲げた角度が復帰する現象を指し、曲げ角度に対して復帰する角度の比 $(\Delta\varphi/\varphi)$ で定義される^{19)~21)}。よって、図 4 より荷重除去後は φ_0 から φ_1 の状態になり、スプリングバックは次式により求めることができる。

$$\frac{\Delta\varphi}{\varphi} = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{180^\circ - \varphi_0} \quad \dots\dots(9)$$

スプリングバック解析を行うために、図 5 に示すような板紙の曲げモデルを考える。円柱座標 (r, φ, z) をとり、 φ 方向のひずみ $\varepsilon_\varphi = 0$ で伸縮のない面（中立

Fig. 4 Schematic diagram of the spring back tester **Fig. 5** Scheme of bending model and equilibrium for an infinitesimal element

面) の曲率半径を ρ とする。またモデルの内・外側半径を r_i, r_0 とし、任意の微小要素までの半径を r とする。中立軸から微小要素までの距離は η とし、板紙の厚さを t , 幅を b としてモデルに曲げモーメント M のみが作用しているものとする。

次に力学的関係について以下の仮定を設ける。

- (1) 中立面は板紙の中央面とし、横断面は平面を保持する。
- (2) 曲げの周方向のみの単軸応力状態とし、曲げ材料の引張り及び圧縮特性は対称とする。
- (3) 板紙の応力-ひずみ曲線は式(5)を用いる。ただし曲げ解析においては、ひずみ速度は一定とし、ひずみ速度依存性は考慮せず応力とひずみの関係にのみ着目する。

図 5 より曲げ断面の微小部分に働く要素を全域にわたり積分すると、曲げモーメント M と曲率 ρ の関係は次のように表せる。

$$M = 2\rho^2 b \int_0^{\varepsilon_0} \sigma_\varphi \varepsilon_\varphi d\varepsilon_\varphi \quad \dots\dots(10)$$

式(10)に式(5)を代入し、ひずみ速度一定の条件下で積分すると式(11)となる。

$$M = 2\rho^2 b \left\{ \left(\frac{F_1}{n_1 + 2} \right) \varepsilon_0^{n_1+2} \dot{\varepsilon}_0^{m_1} (1 - \sin \theta) + \left(\frac{F_2}{n_2 + 2} \right) \varepsilon_0^{n_2+2} \dot{\varepsilon}_0^{m_2} \sin \theta \right\} \quad \dots\dots(11)$$

同式で $\varepsilon_0 = t/2\rho$ の条件を用い、 $\Delta\varphi/\varphi = M_\rho/EI$ (E : 0.2% 耐力におけるヤング率, I : 断面 2 次モーメント), $I = bt^3/12$ であることを考慮すると、スプリングバックは次式で示される。

$$\frac{\Delta\varphi}{\varphi} = 3 \left\{ \frac{F_1}{E_1(n_1 + 2)} \left(\frac{2\rho}{t} \right)^{-n_1+1} \dot{\varepsilon}_0^{m_1} (1 - \sin \theta) \right.$$

$$+ \frac{F_2}{E_2(n_2+2)} \left(\frac{2\rho}{t} \right)^{-n_2+1} \epsilon_0^{m_2} \sin \theta \} \quad \dots\dots(12)$$

式(12)より、スプリングバック発生限界 ($\Delta\phi/\phi=1$) での厚さと曲率の比 ($t/2\rho$) は MD, CD で次式となる。

$$\left(\frac{t}{2\rho} \right)_{MD} = \left\{ \frac{3F_1}{E_1(n_1+2)} \right\}^{\frac{1}{-n_1+1}} \epsilon_0^{-\frac{m_1}{-n_1+1}} \quad \dots\dots(13)$$

$$\left(\frac{t}{2\rho} \right)_{CD} = \left\{ \frac{3F_2}{E_2(n_2+2)} \right\}^{\frac{1}{-n_2+1}} \epsilon_0^{-\frac{m_2}{-n_2+1}} \quad \dots\dots(14)$$

よって式(12)~(14)より、ひずみ速度 ϵ_0 が小さくなる (変形がゆっくり進行する) と、スプリングバック及びその発生限界は小さくなることが分かる。

温度・湿度履歴前後の KL, SCM の 3 方向について求めたスプリングバックの測定値と解析値の比較を図 6 に示す。スプリングバックの測定値は式(9)を用い、解析値は式(12)に表 3 の材料定数 (F , n , m 値) を代入し求めたものである。また、0.2% 耐力におけるヤング率については表 5 に示す。これより KL, SCM とともに測定値と解析値は良く一致しており、板紙の引張り特

性の解析に用いた式(5)の力学モデルは、応力とひずみの関係にのみ着目すれば、曲げ特性の解析にも十分適用できる。

図 6 より KL, SCM とともに温度・湿度履歴で安定な繊維形態となることにより、スプリングバックの勾配は履歴前より大きくなり、その量は温度履歴より湿度履歴を与えた方が大きいことが分かる。この勾配より求めた温度・湿度履歴によるスプリングバックの増加率を表 6 に示す。KL は MD で 5~7%, 45° D と CD で 7~15% スプリングバックが増加するのに対し、SCM では MD で 28~36%, 45° D と CD では 45~50% の増加率を示す。これより履歴により硬い紙質となった SCM は、軟らかい紙質となった KL よりスプリングバックの増加率は大きくなり、MD を折り目として曲げた方が、CD を折り目とした場合に比べ履歴によるスプリングバックは大きくなるといえる。

また式(12)より、温度・湿度履歴前後の KL, SCM におけるスプリングバックの発生限界 ($\Delta\phi/\phi=1$) を与える $t/2\rho$ を求めたものを表 7 に示す。履歴前のスプ

Fig. 6 Relation between spring back and curvature of KL and SCM before and after humidity and temperature cycling (measured value and calculated value)

Table 5 Young's modulus E of KL and SCM

Cycling	Direction	Young's modulus E/GPa	
		KL	SCM
Before	MD	14.3	10.0
	CD	5.9	1.4
Humidity	MD	11.1	14.8
	CD	4.0	8.5
Temperature	MD	17.5	15.3
	CD	4.7	10.1

Table 6 Increasing rate of spring back of KL and SCM after humidity and temperature cycling

(a) KL

Direction	Increasing rate of spring back/%	
	Humidity cycling	Temperature cycling
MD	6.5	5.3
45°D	10.9	6.9
CD	15.1	8.2

(b) SCM

Direction	Increasing rate of spring back/%	
	Humidity cycling	Temperature cycling
MD	36.2	27.5
45°D	46.6	44.8
CD	49.8	48.4

リングバック発生限界は、KLで $4.1 \times 10^{-5} \sim 1.5 \times 10^{-4}$ 、SCMで $1.6 \sim 4.2 \times 10^{-5}$ であり、SCMの方が発生限界の範囲は広い。しかし、湿度履歴を与えた場合の発生限界はKL、SCMとも $9 \times 10^{-5} \sim 3 \times 10^{-4}$ となり、温度履歴の場合はKL、SCMとも $4.4 \times 10^{-5} \sim 2 \times 10^{-4}$ となる。よって温度・湿度履歴によりスプリングバックは増加し、その発生限界は狭くなるがKL、SCMとも温度履歴と湿度履歴でスプリングバック発生限界は一定範囲の値を示す。

2.5.2 残留応力解析

板厚内部の応力分布を解析する場合、曲率が小さい

Table 7 Generation limit of spring back of KL and SCM before and after humidity and temperature cycling

(a) KL

Direction	Generation limit of spring back		
	Before cycling	Humidity cycling	Temperature cycling
MD	4.1×10^{-5}	9.0×10^{-5}	4.4×10^{-5}
45°D	1.1×10^{-4}	2.0×10^{-4}	1.4×10^{-4}
CD	1.5×10^{-4}	3.0×10^{-4}	2.0×10^{-4}

(b) SCM

Direction	Generation limit of spring back		
	Before cycling	Humidity cycling	Temperature cycling
MD	1.6×10^{-5}	1.1×10^{-4}	6.0×10^{-5}
45°D	3.3×10^{-5}	2.0×10^{-4}	1.4×10^{-4}
CD	4.2×10^{-5}	2.3×10^{-4}	2.0×10^{-4}

間では単純理論、ひずみ増分理論、全ひずみ理論のどの曲げ理論でも大差はない²²⁾。2.5.1で式(5)の力学モデルは応力とひずみの関係にのみ着目すれば、板紙の曲げ特性解析にも十分適用できることが確認された。ここでは仮定(3)を用い、力学モデルを平面ひずみ曲げ解析に適用し、全ひずみ理論を用い曲げによる円周方向(φ 方向)の残留応力分布解析^{23)~25)}を行った。

図5の板紙の曲げモデルにおいて、任意の半径位置 r における半径方向(r 方向)の対数ひずみを ε_r 、円周方向(φ 方向)の対数ひずみを ε_φ 、幅方向(z 方向)の対数ひずみを ε_z とすると ε_φ は次式で表せる。

$$\varepsilon_\varphi = \ln \frac{r}{\rho} \quad \dots\dots(15)$$

平面ひずみの仮定から幅方向ひずみ ε_z を0とすると、体積一定則($\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z = 0$)より式(15)は次のようになる。

$$\varepsilon_\varphi = -\varepsilon_r = \ln \frac{r}{\rho} \quad \dots\dots(16)$$

Henckyの応力—ひずみ方程式²⁶⁾に $\varepsilon_z = 0$ を代入すると σ_z は次式となる。

$$\sigma_z = \frac{\sigma_r + \sigma_\varphi}{2} \quad \dots\dots(17)$$

式(16)、(17)のひずみ及び応力の関係を、Misesの降伏条件から定義された相当応力と相当ひずみの表示式²⁷⁾へ

代入すると以下ようになる。

$$\sigma = \frac{\sqrt{3}}{2} |\sigma_\varphi - \sigma_r| \quad \dots\dots(18)$$

$$\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{3}} |\varepsilon_\varphi| \quad \dots\dots(19)$$

仮定(3)より, 式(16), (18), (19)の関係を整理すると式(20)のようになる。ただし複号“ $\pm$ ”は $r > \rho$ の場合に“ $+$ ”, $r < \rho$ の場合に“ $-$ ”となる。

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi - \sigma_r = & \pm \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1+n_1} F_1 \left(\pm \ln \frac{r}{\rho} \right)^{n_1} \varepsilon^{m_1} \\ & - \left[\pm \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1+n_1} F_1 \left(\pm \ln \frac{r}{\rho} \right)^{n_1} \varepsilon^{m_1} \right. \\ & \left. - \left\{ \pm \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1+n_2} F_2 \left(\pm \ln \frac{r}{\rho} \right)^{n_2} \varepsilon^{m_2} \right\} \right] \sin \theta \end{aligned} \quad \dots\dots(20)$$

図5に示す扇形微小要素に関する r 方向つりあい式は式(21)となる。

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{\sigma_\varphi - \sigma_r}{r} \quad \dots\dots(21)$$

これに式(20)の関係を代入して積分すると, σ_r は次式で表される。

$$\begin{aligned} \sigma_r = & \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1+n_1} \frac{F_1}{1+n_1} \left(\pm \ln \frac{r}{\rho} \right)^{1+n_1} \varepsilon^{m_1} \\ & - \left\{ \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1+n_1} \frac{F_1}{1+n_1} \left(\pm \ln \frac{r}{\rho} \right)^{1+n_1} \varepsilon^{m_1} \right. \\ & \left. - \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1+n_2} \frac{F_2}{1+n_2} \left(\pm \ln \frac{r}{\rho} \right)^{1+n_2} \varepsilon^{m_2} \right\} \sin \theta + c \end{aligned} \quad \dots\dots(22)$$

式(23)の境界条件より, $r > \rho$ 及び $r < \rho$ における積分定数 c_o と c_i が定まる。

$$\left. \begin{aligned} \text{外表面 } r=r_o \text{ において } \sigma_r &= 0 \\ \text{内表面 } r=r_i \text{ において } \sigma_r &= 0 \\ \text{中立面 } r=\rho \text{ において } \sigma_r &\text{は連続} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(23)$$

これらの積分定数を式(22)に代入して σ_r が得られ, これを式(20)へ代入することにより, φ 方向の応力 σ_φ は最終的に次式となる。

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi = & \pm \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1+n_1} F_1 \left(\pm \ln \frac{r}{\rho} \right)^{n_1} \varepsilon^{m_1} \\ & - \left[\pm \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1+n_1} F_1 \left(\pm \ln \frac{r}{\rho} \right)^{n_1} \varepsilon^{m_1} \right. \\ & \left. - \left\{ \pm \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1+n_2} F_2 \left(\pm \ln \frac{r}{\rho} \right)^{n_2} \varepsilon^{m_2} \right\} \right] \sin \theta \\ & + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1+n_1} \frac{F_1}{1+n_1} \left(\pm \ln \frac{r}{\rho} \right)^{1+n_1} \varepsilon^{m_1} \\ & - \left\{ \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1+n_1} \frac{F_1}{1+n_1} \left(\pm \ln \frac{r}{\rho} \right)^{1+n_1} \varepsilon^{m_1} \right. \\ & \left. - \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1+n_2} \frac{F_2}{1+n_2} \left(\pm \ln \frac{r}{\rho} \right)^{1+n_2} \varepsilon^{m_2} \right\} \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1+n_1} \frac{F_1}{1+n_1} \left(-\ln \frac{r_i}{\rho} \right)^{1+n_1} \varepsilon^{m_1} \\ & + \left\{ \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1+n_1} \frac{F_1}{1+n_1} \left(-\ln \frac{r_i}{\rho} \right)^{1+n_1} \varepsilon^{m_1} \right. \\ & \left. - \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1+n_2} \frac{F_2}{1+n_2} \left(-\ln \frac{r_i}{\rho} \right)^{1+n_2} \varepsilon^{m_2} \right\} \sin \theta \end{aligned} \quad \dots\dots(24)$$

スプリングバックは弾性変形と考え, 負荷状態 (M, σ_φ) から除荷状態 ($M=0, \sigma_\varphi^*$) までの応力変化を $\Delta\sigma_\varphi$ とすると, 残留応力 σ_φ^* は重ね合わせの原理を用いて次のように表せる。

$$\sigma_\varphi^* = \sigma_\varphi + \Delta\sigma_\varphi \quad \dots\dots(25)$$

また曲げモーメント M を除荷する過程は, $-M$ を加えた弾性変形過程と解釈できるため, 弾性曲げの式²⁸⁾から次式となる。

$$\Delta\sigma_\varphi = -\frac{M\eta}{I} \quad \dots\dots(26)$$

よって式(24)~(26)を用い, 温度・湿度履歴前後の KL, SCM の3方向における板厚内部 (φ 方向) の残留応力分布を求めたものを図7に示す。ただし式(24)における材料定数 (F, n, m 値) は, スプリングバックの解析に用いたものと同様のものを用いた。また, 負荷時の曲率は $1/\rho = 0.05 \text{ mm}$ とした。

図7より KL は各方向とも温度・湿度履歴による残留応力分布の変化はほとんどないが, SCM は MD, CD とも履歴前に比べ残留応力は増加する。SCM の 45° D については, 中立面より内側の残留応力は履歴により増加するが外側は減少する傾向を示す。

KL, SCM の温度・湿度履歴による残留応力分布の変化については, 式(24)~(26)より次のように考えられる。KL は履歴により軟らかい紙質になるため, 履歴前後で σ_φ の変化はほとんどなく, スプリングバックも SCM ほど増加しないため応力変化 $\Delta\sigma_\varphi$ の増加も小さく, 残留応力はほとんど変わらない。KL は履歴により硬い紙質となり, スプリングバックの増加により $\Delta\sigma_\varphi$ は増加するが, σ_φ の増加率の方が $\Delta\sigma_\varphi$ に比べ大きいため残留応力は増加する。

3. 段ボールの反り変形解析

3.1 供試材

本研究に用いた3層段ボールの構成と寸法を図8に示す。本研究では JIS P 3902, JIS P 3904 に準拠し, 表・裏ライナに K 6, 中芯に 120 の B フルートをを使用した。また以後, 抄造方向を MD, その垂直方向を CD として示す。

Fig. 7 Residual stress distribution of ϕ direction of KL and SCM before and after humidity and temperature cycling calculated by deformation theory

Fig. 8 Composition and size of three-ply corrugated fiberboard

3.2 力学モデルの導出

簡易的に3層段ボールの反りを評価できる力学モデルの導出を試みる。図のように3層段ボールは平板状の表・裏ライナと波板状の中芯から構成される構造体

である。このため、単体の段ボール原紙のように非線形性を考慮した力学モデルを用いようとする解析が困難となる。また、反り変形は引張り、曲げ変形に比べ微小変形であるため、弾性問題として考えても差し支えない。よって中芯に林の波板理論²⁹⁾を適用し、引張り及び曲げ剛性において等価な平板に置換し、図9に示すような直交異方性平板が3層に構成された弾性体の多層構造モデルとして取り扱った。林の波板理論より、 x 方向(CD)についての引張り及び曲げ剛性の等価式は次式となる。

$$\frac{E_x h}{(1-\nu_x^2)} = \frac{b_w}{b} \frac{E_{CD} h_c}{(1-\nu_{CD}^2)} \quad \dots\dots(27)$$

$$\frac{E_x h^3}{12(1-\nu_x^2)} = \frac{I}{bh_c} \frac{E_{CD} h_c^3}{(1-\nu_{CD}^2)} \quad \dots\dots(28)$$

同様に y 方向(MD)については次式となる。

$$\frac{E_y h}{(1-\nu_y^2)} = \frac{bh_c}{I} \frac{E_{MD} h_c^3}{12(1-\nu_{MD}^2)} \quad \dots\dots(29)$$

$$\frac{E_y h^3}{12(1-\nu_y^2)} = \frac{b}{b_w} \frac{E_{MD} h_c^3}{12(1-\nu_{MD}^2)} \quad \dots\dots(30)$$

ここで E_x , E_y : x , y 方向の中芯の等価縦弾性係数, ν_x , ν_y : x , y 方向の中芯の等価ポアソン比,

Fig. 9 Multiply structure model of three-ply corrugated fiberboard

E_{CD} , E_{MD} : x , y 方向の中芯の縦弾性係数, ν_{CD} , ν_{MD} : x , y 方向の中芯のポアソン比, h : 中芯の高さ, h_c : 中芯の長さ, b : 中芯の1ピッチ, b_w : 中芯1ピッチの実質長さ, I : 中芯1ピッチの断面2次モーメントである。式(27), (28)より E_x を式(29), (30)より E_y を求め各々の平均により中芯の等価縦弾性係数を決定した。

次に複合材料力学の Lamination theory^{(12)~(14)} を適用し曲げ曲率 K_x , K_y とねじれ曲率 K_{xy} の3つの曲率成分により, 3層段ボールの反りの評価を行うことを試みる。ここで曲げ曲率 K_x , K_y は曲面を x 軸あるいは y 軸に平行で, 曲面上の点の法線を含む平面で切ったときの交線の曲率であり, 表ライナ側を内側にした曲げを“+”とする。またねじれ曲率 K_{xy} は曲面の x 方向傾き (y 方向傾き) の y 軸 (x 軸) に沿った方向での変化率を表すものであり, 時計回りのねじれを“+”とする。よって曲げ反りは曲げ曲率により, ねじれ反りはねじれ曲率により表すことができる。

図9より各層の応力—ひずみ関係を表す構成式において, ポアソン効果がないものとする次式となる。

$$\sigma'_i = E'_i (\epsilon'_i - e'_i) \quad (i = x, y, xy) \quad \dots\dots(31)$$

$$e'_i = H\beta'_i \quad (i = x, y, xy) \quad \dots\dots(32)$$

ここで, σ'_i : 応力ベクトル, E'_i : 弾性係数マトリックス, ϵ'_i : ひずみベクトル, e'_i : 水分変化によるひずみベクトル, β'_i : 伸縮率ベクトル, H : 水分変化を示す。また“ i ”は基準座標 (x , y 座標) からみた成分を, 添字“ $i = x, y, xy$ ”は各層の x , y 方向の成分, 及び x , y 方向に関するせん断成分を示す。

また構造体の厚さ方向のひずみ分布を線形とすると次式となる。

$$\epsilon'_i = (\epsilon'_0)_i + z\kappa'_i \quad (i = x, y, xy) \quad \dots\dots(33)$$

ここで, $(\epsilon'_0)_i$: 構造体中心部の全ひずみベクトル, κ'_i : 構造体中心部の曲率ベクトル, z : 構造体の厚さ変化を示す。

構造体全体の合力とモーメントの構成式は次のようになる。

$$N_i = \sum_{k=1}^3 \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\sigma'_i)_k dz \quad \dots\dots(34)$$

$$M_i = \sum_{k=1}^3 \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\sigma'_i)_k z dz \quad \dots\dots(35)$$

ここで, N_i : 単位幅当りの合力ベクトル, M_i : 単位幅当りのモーメントベクトルを示す。式(31)~(33)を式(34), (35)に代入すると次式となる。

$$N_i = A_i (\epsilon'_0)_i + B_i \kappa'_i - F_i \quad \dots\dots(36)$$

$$M_i = B_i (\epsilon'_0)_i + D_i \kappa'_i - G_i \quad \dots\dots(37)$$

A_i , B_i , D_i , F_i , G_i は以下のように示される。

$$A_i = \frac{t}{3} \{ (E'_i)_1 + (E'_i)_2 + (E'_i)_3 \} \quad \dots\dots(38)$$

$$B_i = \frac{t^2}{9} \{ (E'_i)_3 - (E'_i)_1 \} \quad \dots\dots(39)$$

$$D_i = \frac{t^3}{324} \{ 13(E'_i)_1 + (E'_i)_2 + 13(E'_i)_3 \} \quad \dots\dots(40)$$

$$F_i = \frac{t}{3} \{ H_1 (E'_i)_1 (\beta'_i)_1 + H_2 (E'_i)_2 (\beta'_i)_2 + H_3 (E'_i)_3 (\beta'_i)_3 \} \quad \dots\dots(41)$$

$$G_i = \frac{t^2}{9} \{ H_3 (E'_i)_3 (\beta'_i)_3 - H_1 (E'_i)_1 (\beta'_i)_1 \} \quad \dots\dots(42)$$

ここで, 添字“1~3”は構造体の層番号を, t は厚さを示す。

式(36), (37)を κ'_i について解くと次式となる。

$$\kappa'_i = \frac{A_i (G_i + M_i) - B_i (F_i + N_i)}{A_i D_i - B_i B_i} \quad \dots\dots(43)$$

式(43)について以下の仮定を設ける。

$$\bar{E}'_i = \frac{1}{3} \{ (E'_i)_1 + (E'_i)_2 + (E'_i)_3 \} \quad \dots\dots(44)$$

$$\Delta E'_i = (E'_i)_3 - (E'_i)_1 \quad \dots\dots(45)$$

$$\Delta E'_i \bar{E}'_i^{-1} \div 0 \quad \dots\dots(46)$$

よって式(43)は次のようになる。

$$\kappa'_i = \left(\frac{36}{t} \right) \frac{H_3 (E'_i)_3 (\beta'_i)_3 - H_1 (E'_i)_1 (\beta'_i)_1 + \frac{9}{t^3} M_i}{13(E'_i)_1 + (E'_i)_2 + 13(E'_i)_3} \quad \dots\dots(47)$$

ここで, E'_i , β'_i は基準座標からみた成分であるた

め、そこから繊維配向角 θ ずれたときの E_i , β_i とはテンソルの座標変換則³⁰⁾に従った以下の関係がある。

$$\begin{aligned} E'_i &= TE_i, \quad \beta'_i = T\beta_i, \quad \dots\dots(48) \\ T &= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta \\ -2 \cos \theta \sin \theta & 2 \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \\ &\dots\dots(49) \end{aligned}$$

式(48), (49)を式(47)に代入し, θ は微小であると仮定し, $\beta_{xy}=0$, $\sin^2 \theta \doteq 0$, $\cos^2 \theta \doteq 1$ とすると式(47)は次のようになる。

$$\begin{aligned} \kappa'_x &= \left(\frac{36}{t} \right) \\ & \frac{H_3 \{ (E_x)_3 + (E_y)_3 \Theta_3^2 + (G_{xy})_3 \Theta_3 \} \{ (\beta_x)_3 + (\beta_y)_3 \Theta_3^2 \} - H_1 \{ (E_x)_1 + (E_y)_1 \Theta_1^2 + (G_{xy})_1 \Theta_1 \} \{ (\beta_x)_1 + (\beta_y)_1 \Theta_1^2 \} + \frac{9M_x}{t^3}}{13 \{ (E_x)_1 + (E_y)_1 \Theta_1^2 + 2(G_{xy})_1 \Theta_1 \} + \{ (E_x)_2 + (E_y)_2 \Theta_2^2 + 2(G_{xy})_2 \Theta_2 \} + 13 \{ (E_x)_3 + (E_y)_3 \Theta_3^2 + 2(G_{xy})_3 \Theta_3 \}} \\ &\dots\dots(50) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa'_y &= \left(\frac{36}{t} \right) \\ & \frac{H_3 \{ (E_x)_3 \Theta_3^2 + (E_y)_3 - (G_{xy})_3 \Theta_3 \} \{ (\beta_x)_3 \Theta_3^2 + (\beta_y)_3 \} - H_1 \{ (E_x)_1 \Theta_1^2 + (E_y)_1 - (G_{xy})_1 \Theta_1 \} \{ (\beta_x)_1 \Theta_1^2 + (\beta_y)_1 \} + \frac{9M_y}{t^3}}{13 \{ (E_x)_1 \Theta_1^2 + (E_y)_1 - 2(G_{xy})_1 \Theta_1 \} + \{ (E_x)_2 \Theta_2^2 + (E_y)_2 - 2(G_{xy})_2 \Theta_2 \} + 13 \{ (E_x)_3 \Theta_3^2 + (E_y)_3 - 2(G_{xy})_3 \Theta_3 \}} \\ &\dots\dots(51) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa'_{xy} &= \left(\frac{36}{t} \right) \\ & \frac{2H_3 \{ 2 \{ (E_y)_3 - (E_x)_3 \} \Theta_3 + (G_{xy})_3 \} \{ (\beta_y)_3 - (\beta_x)_3 \} \Theta_3 - 2H_1 \{ 2 \{ (E_y)_1 - (E_x)_1 \} \Theta_1 + (G_{xy})_1 \} \{ (\beta_y)_1 - (\beta_x)_1 \} \Theta_1 + \frac{9M_{xy}}{t^3}}{13 \{ \{ (E_y)_1 - (E_x)_1 \} \Theta_1 + (G_{xy})_1 \} + \{ \{ (E_y)_2 - (E_x)_2 \} \Theta_2 + (G_{xy})_2 \} + 13 \{ \{ (E_y)_3 - (E_x)_3 \} \Theta_3 + (G_{xy})_3 \}} \\ &\dots\dots(52) \end{aligned}$$

ここで, G_{xy} :せん断弾性係数, M_{xy} :ねじれモーメント,

$\Theta_j = \sin \theta_j$ (添字“j”は構造体の層番号1~3を示す)を表す。よって反りを評価する力学モデルは式(50)~(52)となり, これらの3つの曲率成分を求めることにより, 3層段ボールの反り予測が可能となる。以後このモデルのことを反り予測モデルという。

3.3 力学モデル適用性の検討

3.3.1 測定による比較

測定に用いた供試材の機械的性質を表8に示す。縦弾性係数及びポアソン比は万能試験機(島津製作所, AG 10 TA)を用い JIS P 8113 に準拠した引張り試験により求めた。中芯については式(27)~(30)より求めた等価縦弾性係数も示した。せん断弾性係数は Campbell の式³¹⁾を引用した。

測定試料の作成及び測定は恒温・恒湿(温度 $20 \pm 2^\circ\text{C}$, 湿度 $65 \pm 2\%$) 状態で行った。中芯と裏ライナの繊維配向角を 0° として MD に $200 \text{ mm} \times \text{CD}$ に 120 mm の大きさに切り出し, 澱粉糊で接着し 24 時間放置した後, 水分を $10 \pm 2\%$ とした(片面段ボール)。さらに表ライナの繊維配向角を $-40 \sim 40^\circ$ (MD 方向に対して時計回りを“+”とする)まで 10° ずつ変化させて同様に切り出し, 水分を $30 \pm 2\%$ にしたものを澱粉糊により片面段ボールに貼り付け, 24 時間放置し測定に用いた。ここで中芯の波段はテストフルーター(日本 TMC, TMC-1-W)により作成した。また繊維配向角は超音波式配向測定機(野村商事, SST-110)により, 水分は赤外線水分計(CHINO, IR-M 100)により測定した。

図10-(a)に測定試料の測定点と反り測定式^{11),32)}を, 図10-(b)に装置構成を示す。供試材の測定点はA~Hの8点とし, 各点の厚さ方向変位をレーザー変位計(KEYENCE, LB 60)により測定した。測定値は5回の測定による平均とし, 図10-(a)に示した測定式より曲率を求めた。

表8の条件を用い $\theta_2 = \theta_3 = 0^\circ$, $H_2 = H_3 = 1\%$, $H_1 = 13\%$, $t = 4.357 \text{ mm}$ として反り予測モデルの式(50)~(52)より求めた計算結果と測定結果の比較を図11に示す。曲げ曲率 κ'_x は繊維配向角が $\pm 40^\circ$ になると, 計算値と

Table 8 Mechanical properties of specimens at $20 \pm 2^\circ\text{C}$ and $65 \pm 2\%$ RH

Specimen	Young's modulus/MPa		Poissons' ratio		Modulus of rigidity/MPa	Expansivity (1/moisture content 1%)	
	E_x	E_y	ν_x	ν_y	G_{xy}	β_x	β_y
Liner	997.9	4,785.7	0.06	0.10	773.9	1.5×10^{-4}	4.0×10^{-4}
Medium (equivalent flat plate)	748.0 (59.0)	1,742.1 (0.2)	0.03	0.05	505.0	2.0×10^{-4}	4.0×10^{-4}

(a) Specimen and warping measurement formula

(b) Block diagram of measurement set-up for warping deformation

Fig. 10 Measurement sample and block diagram of measurement set up

Fig. 11 Comparison of prediction equation and measured results

測定値のずれは大きくなる。これは κ_x' が κ_y', κ_{xy}' よりもライナと中芯の接着部での糊の剛性の影響を受けるのに、予測モデルではこれを考慮していないためと考えられる。しかし κ_y' は概ね両者の傾向は一致しており、ねじれ曲率 κ_{xy}' についてはよく一致しているといえる。

3.3.2 シミュレーションによる比較

有限要素法解析プログラム MARC-K 4 を用い、曲げモーメント M_x を加えたときの曲げ曲率 κ_x' の変化をシミュレーションし、外力が加わった場合の反り予測モデルの妥当性を検討した。3 層段ボールの FEM モデルを図 12 に示す。段ボールの寸法は図 8 の通りであり、8 節点ソリッド要素を用い、 y 方向 (MD) と x 方向 (CD) にそれぞれ 1/2 ピッチの要素分割を行った。また応力が高くなるライナと中芯の接合部のメッシュは細分割とした。物性値は表 8 を用い、単位長さ

Fig. 12 Finite element method model of corrugated fiberboard

Fig. 13 Comparison of prediction equation and simulated results

当り 1 Nmm の曲げモーメント M_x を加えたときの直交異方性弾性解析を行った。そして表ライナのエッジ部分での変位を求め、図 10-(a) に示した反り測定式より曲げ曲率 κ'_x を求めた。

表 8 の条件を用い、反り予測モデルの式(50)より、 $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0^\circ$, $H_1 = H_2 = H_3 = 0\%$, $t = 4.357$ mm として求めた計算結果とシミュレーション結果の比較を図 13 に示す。これより予測モデルによる計算値とシミュレーション値はよく一致している。よって測定とシミュレーションによる比較から、本研究で導出した反りの簡易予測モデルの妥当性が明らかとなり、本力学モデルより 3 層段ボールの反りの評価が可能となった。

3.4 反り変形解析

3.4.1 反りに影響を及ぼすパラメータ

導出した反り予測モデルにおいて表・裏ライナの水分変化を一定とし、表・裏ライナに繊維配向角差、伸縮率差がある場合とない場合について、反りに影響を及ぼす要因を考える。

はじめに表・裏ライナの繊維配向角差がなく、伸縮率差がある場合は式(50)~(52)において $H_1 = H_3 = H$, $\theta_1 = \theta_3 = 0$ より次式となる。

$$\begin{aligned} \kappa'_x &= \left(\frac{36}{t} \right) \cdot \frac{H\{(E_x)_3(\beta_x)_3 - (E_x)_1(\beta_x)_1\} + \frac{9M_x}{t^3}}{13(E_x)_1 + \{(E_x)_2 + (E_y)_2\Theta_2^2 + 2(G_{xy})_2\Theta_2\} + 13(E_x)_3} \quad \dots\dots(53) \\ \kappa'_y &= \left(\frac{36}{t} \right) \cdot \frac{H\{(E_y)_3(\beta_y)_3 - (E_y)_1(\beta_y)_1\} + \frac{9M_y}{t^3}}{13(E_y)_1 + \{(E_x)_2\Theta_2^2 + (E_y)_2 - 2(G_{xy})_2\Theta_2\} + 13(E_x)_3} \quad \dots\dots(54) \\ \kappa'_{xy} &= \left(\frac{36}{t} \right) \cdot \frac{\frac{9M_{xy}}{t^3}}{13(G_{xy})_1 + [\{(E_y)_2 - (E_x)_2\}\Theta_2 + (G_{xy})_2] + 13(E_{xy})_3} \quad \dots\dots(55) \end{aligned}$$

よって式(53)~(55)より曲げ曲率 κ'_x , κ'_y は伸縮率及び縦弾性係数の表・裏差に影響し、これらが大きいほど反りは増加する。しかし、ねじれ曲率 κ'_{xy} はこれらの影響を受けない。

次に表・裏ライナの繊維配向角が同じであり、伸縮率差がない場合は式(50)~(52)において $H_1 = H_3 = H$, $\theta_1 = \theta_3 = \theta$, $\beta_{1x} = \beta_{3x} = \beta_x$, $\beta_{1y} = \beta_{3y} = \beta_y$ より次式となる。

$$\begin{aligned} \kappa'_x &= \left(\frac{36}{t} \right) \cdot \frac{H(\beta_x + \beta_y\Theta^2)[\{(E_x)_3 + (E_y)_3\Theta^2 + (G_{xy})_3\Theta\} - \{(E_x)_1 + (E_y)_1\Theta^2 + (G_{xy})_1\Theta\}] + \frac{9M_x}{t^3}}{13\{(E_x)_1 + (E_y)_1\Theta^2 + 2(G_{xy})_1\Theta\} + \{(E_x)_2 + (E_y)_2\Theta_2^2 + 2(G_{xy})_2\Theta_2\} + 13\{(E_x)_3 + (E_y)_3\Theta^2 + 2(G_{xy})_3\Theta\}} \quad \dots\dots(56) \\ \kappa'_y &= \left(\frac{36}{t} \right) \cdot \frac{H(\beta_x\Theta^2 + \beta_y)[\{(E_x)_3\Theta^2 + (E_y)_3 - (G_{xy})_3\Theta\} - \{(E_x)_1\Theta^2 + (E_y)_1 - (G_{xy})_1\Theta\}] + \frac{9M_y}{t^3}}{13\{(E_x)_1\Theta^2 + (E_y)_1 - 2(G_{xy})_1\Theta\} + \{(E_x)_2\Theta_2^2 + (E_y)_2 - 2(G_{xy})_2\Theta_2\} + 13\{(E_x)_3\Theta^2 + (E_y)_3 - 2(G_{xy})_3\Theta\}} \quad \dots\dots(57) \\ \kappa'_{xy} &= \left(\frac{36}{t} \right) \cdot \frac{2H(\beta_y - \beta_x)\Theta[2\{(E_y)_3 - (E_x)_3\}\Theta + (G_{xy})_3] - [2\{(E_y)_1 - (E_x)_1\}\Theta + (G_{xy})_1] + \frac{9M_{xy}}{t^3}}{13[\{(E_y)_1 - (E_x)_1\}\Theta + (G_{xy})_1] + [\{(E_y)_2 - (E_x)_2\}\Theta_2 + (G_{xy})_2] + 13[\{(E_y)_3 - (E_x)_3\}\Theta + (G_{xy})_3]} \quad \dots\dots(58) \end{aligned}$$

よって式(56)~(58)より、 κ'_x , κ'_y は弾性係数の表・裏差に影響し、これらが大きいほど反りは大きい。 κ'_{xy} は伸縮率の異方性、縦弾性係数の異方性の表・裏差及びせん断弾性係数の表・裏差に影響し、これらが大きいほど反りは増加する。また繊維配向角差、伸縮率差がある場合もない場合も、厚さ t が増せば反りは減少し、モーメント M が増せば反りの増加を招く。

3.4.2 反り変形予測

反り予測モデルの式(50)~(52)を用い、反り変形の予測を試みる。ただし物性値は表 8 を用い、 $H_1 = H_3 = 1\%$, $M_x = M_y = M_{xy} = 0$ Nmm, $t = 4.357$ mm として計算を行った。図 14 は表・裏ライナの繊維配向角差 $\Delta\theta$ を $0 \sim 40^\circ$ (MD に対し時計回りを“+”とする) つけた場合の曲率変化を示したものである。ここで $\Delta\theta = \theta_3 - \theta_1$, $\theta_2 = 0^\circ$ とおいた。(a)は表・裏ライナの繊維配向を“+”方向にとったものであり、(b)は表ライナの繊維配向を“−”方向、裏ライナの繊維配向を“+”方向にとったものである。(a)において、曲率は $\Delta\theta$ が大きくなるに伴いほぼ直線的に増加する。(b)では κ'_x , κ'_{xy} は $\Delta\theta = 13 \sim 14^\circ$ で、 κ'_y は 20° で曲率は逆転し、その後は $\Delta\theta$ が増すにつれほぼ直線的に増加する。また(a), (b)より $\Delta\theta$ の増加に伴う曲率変化が大きいのは、曲げ曲率よりもねじれ曲率であることが分かる。そして表・裏

(a) θ_1, θ_3 : same direction ($\theta_1=10^\circ$) (b) θ_1, θ_3 : revers direction ($\theta_1=-10^\circ$)

Fig. 14 Warping deformation by difference of fiber orientation angle

Fig. 15 Change ratio of warping by anisotropy of Young's modulus

ライナの繊維配向を逆にとれば、同じ方向にとった場合に比べ曲率変化は減少し、特に κ'_y の変化はほとんどなくなる。

縦弾性係数の異方性 E_y/E_x を 1~10 まで変化させたときの曲率変化 $\Delta\kappa$ を求めたものを図 15 に示す。ここで $\theta_1=5^\circ$, $\theta_2=0^\circ$, $\theta_3=10^\circ$ とし、 $\Delta\kappa$ は $E_y/E_x=1$ の曲率に対する曲率の変化量を示す。 κ'_x の場合は E_y/E_x が増すにつれ $\Delta\kappa$ はほぼ直線的に増加する。また

Fig. 16 Change ratio of warping by anisotropy of expansivity

κ'_{xy} では $E_y/E_x \div 10$ までは κ'_x よりも $\Delta\kappa$ は大きい。 κ'_y については $E_y/E_x \div 5$ までは κ'_x , κ'_{xy} よりも $\Delta\kappa$ は大きい。また、 $E_y/E_x \div 7$ 以後では $\Delta\kappa \div 2.3$ となりほぼ一定となる。

図 16 は伸縮率の異方性 β_x/β_y を 1~10 まで変化させたときの曲率変化 $\Delta\kappa$ を求めたものである。ここで $\theta_1=5^\circ$, $\theta_2=0^\circ$, $\theta_3=10^\circ$ とし、 $\Delta\kappa$ は $\beta_x/\beta_y=1$ の曲率に対する曲率の変化量を示す。 κ'_x , κ'_y ともに β_x/β_y が増すにつれ $\Delta\kappa$ は直線的に増加し、 κ'_y は κ'_x の約 3 倍 $\Delta\kappa$ が増加する。

4. 結 言

段ボール原紙と 3 層段ボールについて、それぞれの力学モデルを提案し変形解析を行った。段ボール原紙については、従来の 3 要素モデルや多要素モデルにかわり、非線形性を考慮した力学モデルにより、温度・湿度履歴を与えた原紙の引張り・曲げ特性の解析を行った。また 3 層段ボールについては、Lamination theory により簡易的反り予測モデルを導出し、反り変形解析を行った結果、以下の結論を得た。

(1) MD において SCM は温度・湿度履歴によりクリープは約 4% 減少するが、KL は湿度履歴により約 5% 増加する。

(2) 温度・湿度履歴により KL, SCM のスプリングバックは増加し、その増加率は湿度履歴を与えた方が大きい。また KL より SCM の方が、CD より MD を折り目として曲げた方が履歴によるスプリングバックは大きくなる。

KL, SCM のスプリングバック発生限界は、湿度履歴を与えた場合 $9 \times 10^{-5} \sim 3 \times 10^{-4}$ 、温度履歴の場合は $4.4 \times 10^{-5} \sim 2 \times 10^{-4}$ となり、履歴により一定範囲の値を示す。

(3) KL は各方向で温度・湿度履歴による板厚内部 (P) 周方向) の残留応力の変化はほとんどない。SCM の MD, CD は履歴により残留応力は増加するが, 45° D では中立面より内側の残留応力は増加し, 外側は減少する。

(4) 表・裏ライナの水分変化が一定で繊維配向角差がない場合, 曲げ反りは伸縮率及び縦弾性係数の表・裏差に影響し, ねじれ反りはこれらの影響を受けない。また伸縮率差がない場合, 曲げ反りは弾性係数の表・裏差に影響し, ねじれ反りは伸縮率の異方性, 縦弾性係数の異方性の表・裏差及びせん断弾性係数の表・裏差に影響する。そしてこれらが大きいほど反りは増加する。

(5) 表・裏ライナの繊維配向角差に伴う反りで問題となるのは, 曲げ反りよりねじれ反りである。また表・裏ライナの繊維配向方向を逆にとれば, 同じ方向にとった場合に比べ反りは減少する。

(6) 縦弾性係数及び伸縮率の異方性が増すにつれ反りは増加する。特に伸縮率の異方性が増せば曲げ反りは直線的に増加する。そして $E_y/E_x \div 5$ までと β_x/β_y 全般にわたり問題となる反りは, CD よりも MD に沿った曲げ反りである。

文 献

- 1) 松島成夫, 奥田隆宏, 宮内 治, 野沢光治: 紙パ技協誌, 36-3 (1982), 31.
- 2) 松島成夫, 矢野 忠, 松島 晟: 紙パ技協誌, 42-5 (1988), 56.
- 3) 松島成夫, 矢野 忠, 松島 晟, 横田俊昭: 紙パ技協誌, 45-4 (1991), 62.
- 4) 松島成夫, 矢野 忠, 松島 晟, 横田俊昭: 紙パ技協誌, 46-5 (1992), 80.
- 5) 木島常明, 山川 功, 新居秀彦: 紙パ技協誌, 33-10 (1979), 60.
- 6) Anderson, O.: Svensk Papperstidning, 43-6 (1965), 105.
- 7) 野村芳禾: 紙パ技協誌, 23-8 (1969), 319.
- 8) Brezinski, J. P.: TAPPI, 39-2 (1956), 116.
- 9) Rance, H. F.: TAPPI, 39-2 (1956), 104.
- 10) 井関義孝: 紙パルプの技術, 29-2 (1978), 50.
- 11) 竹中裕幸, 河野和清, 加藤利英: 三菱重工技報, 27-2 (1990), 1.
- 12) Carlsson, L.: Fiber Science and Technology, 14 (1981), 201.
- 13) Ashton, J. E., Halpin, J. C. and Petit, P. H.: Technomic (1969), 6.
- 14) Carlsson, L., Fellers, C. and Htun, M.: Svensk Papperstidning, 7 (1980), 194.
- 15) 上野桂助: 紙の強度, (1972), 199, 丸善.
- 16) 門屋 卓, 角祐一郎, 吉野 勇: 紙の科学, (1978), 199, 中外産業.
- 17) レンゴー: 段ボール技術, (1971), 51, 包装新聞社.
- 18) 東洋経済: 紙・パルプの実際知識, (1978), 84, 東洋経済.
- 19) 日本塑性加工学会編: プレス加工便覧, (1975), 227, 丸善.
- 20) 鎌田 弘: 塑性と加工, 27-310 (1986), 1241.
- 21) 日本材料学会編: 塑性加工学, (1980), 121, 養賢堂.
- 22) 永井康友: 塑性と加工, 27-300 (1986), 176.
- 23) 鈴木 弘: 塑性加工, (1961), 245, 裳華房.
- 24) 加藤健三: 金属塑性加工学, (1971), 292, 丸善.
- 25) 石渕 浩, 王 金蘭, 佐久田博司, 吉谷 豊: 41 回塑加連論, (1990), 5.
- 26) 河合 望: 新版塑性加工学, (1988), 49, 朝倉書店.
- 27) 河合 望: 新版塑性加工学, (1988), 171, 朝倉書店.
- 28) 鈴木 弘: 塑性加工, (1961), 248, 裳華房.
- 29) 林 毅: 航空学会誌, 8-79 (1941), 601.
- 30) 伊理正夫, 韓太 舜: ベクトルとテンソル, (1973), 23, 教育出版.
- 31) Campbell: J. G., Australian J. Appl. Sci, 12-3 (1961), 356.
- 32) Stevenson, J. F.: Boxboard Containers, 3 (1983), 34.

(受理: '92.10.27)