一様曲げ変形（モーメント軸が流れ方向）を受ける段ボールの応力解析 第4報 厚さ方向に非対称な強度をもつ両面段ボールの場合

愛媛大学工学部 松島 成夫, 矢野 忠
帝人製機㈱松山工場 松島 理

Elastic Strength of Corrugated Fiberboard under the Uniform Bending about the Moment Axis in the Machine Direction IV —SWCF of Asymmetric Strength for Thickness—

Shigeo Matsushima and Tadashi Yano
Faculty of Engineering, Ehime University

Satoru Matsushima
Teijin Seiki Corporation, Matsuyama

Analysis of the bending stress in single wall corrugated fiberboard (SWCF) with asymmetrical strength distribution for the thickness direction (normal to the kraft-liner (KL)) is performed, and relations between maximum of absolute stress σ_{smax} , σ_{k1max} and σ_{k2max} and shape for upper KL (KL₁), lower KL (KL₂) and SMP medium (CM, (thickness T_s : wavelength L : wave height h)) are discussed. Then relations between strength E_{fs} , E_{fk1} and E_{fk2} per mass and shape factor are obtained.

(1) Distance h_0 between neutral surface and thickness for SWCF moves to KL₁ side with the increase of Young's modulus E_{k1} and thickness T_{k1} of KL₁. h_0 decreases obviously with the increase of T_s and increases with the increase of h . And h_0 increases gradually with the increase of L .

(2) Positions of maximum stress for CM and KL move to KL₂ side with increase of Young's modulus E_{k1} and thickness T_{k1} of KL₁. Their maximum stresses for CM and KL are on the other outer surfaces.

(3) σ_{smax} , σ_{k1max} and σ_{k2max} decrease with the increase of the thickness T_s and wave height h for CM. σ_{smax} , σ_{k1max} and σ_{k2max} increase initially and then decrease with the increase of the wavelength L for CM. Then the maximum values appear with the increase of L .

(4) E_{fs} decreases with the increase of T_s , and increase with the increase of L and h . E_{fk1} and E_{fk2} increase with increase of T_s and h , and decrease with the increase of L .

Keywords : Strength of corrugated fiberboard, Elastic stress analysis, Structure strength

1. 緒 言

構成する素材の強度分布が厚さ方向に非対称となっている段ボールは、周知のように構造用包装材として盛んに用いられている。したがって、その使用変形の

一基本形態となる曲げ変形における強度状況を構造強度上非対称な両面段ボールについて明らかにすることは、その合理的利用及び工学的強度設計上の観点から重要なことである。また、曲げ応力ははりの構成素材の材料特性、形状及び構成状況によって大きく変わる

ことが知られている。したがって、強度が厚さ方向に非対称に分布する両面段ボール各部材内についての応力状態を議論し、全強度に対する各部材の役割を明らかにすることは非常に重要であると考えられる。

段ボールの強度の研究^{1)~3)}は余り多くない。特に基本的な研究は少ないが、筆者らの行った段ボールの引張り変形強度に関する実験的研究⁴⁾、正弦波形中芯^{5)~7)}及び凹波形中芯⁸⁾の面圧縮の弾性変形の解析的研究がある。そして、弾性曲げに関するものとして、薄い波板の弾性曲げ（こわさ及び断面2次モーメント）を議論したもの⁹⁾がある。曲げ変形に関する基礎的研究としては、筆者らが行った厚さ方向に対称な強度をもつ両面段ボール（構成素材の平均強度が厚さ方向に対称なもの¹⁰⁾及び複両面段ボール¹¹⁾ならびに非対称な強度を示す片面段ボール¹²⁾のよう曲げ（モーメント軸がフルートの流れ方向）に関する弾性応力解析がある。

そこで、本報ではこれら一連の段ボールの曲げ変形の研究の一環として、厚さ方向に非対称な強度分布をもつ両面段ボールのよう曲げ（モーメント軸がフルートの流れ方向）における素材各部の弾性応力解析を行い、段ボール各部の曲げ強度と各素材の形状寸法及び縦弾性係数との関係を議論することを試みた。ただし、前報の際と同様、各素材を一様な弾性体と見なし、容易でしかも比較的精度の高い近似で部材全体の変形の議論ができるよう、中芯の形状を正弦波形にした。

2. 解析方法

段ボールの中芯の形は波形をなす曲面状のものである（図1(a)参照）。そこで、前報^{10)~12)}に述べたように、中芯山谷部の糊付け部付近は段ボール加工の際に生じる形状及び材質等の複雑な変化があるものと考えられるが、簡便で近似度の高いものとして、Seydel⁹⁾にならない、中芯の形状（厚さ T_s 一定）を正弦波形

$$y_0 = (h/2) \sin(2\pi x/L) \quad \cdots \cdots (1)$$

で表す。ただし、 x は波状進行方向（フルートの流れ方向）の基準位置 O （波高の中央位置）からの距離、 y_0 はその x における中芯の O からの厚さ中心の高さであり、 L は波形の長さ（波長）、 h は中芯の波形の高さである（図1(a), (b)参照）。すると、中芯の着目位置（ $y_0=0$ からの垂直距離） y_{s0} は

$$\left. \begin{aligned} y_{s0} &= y_0 + t \cos \theta \\ \theta &= \tan^{-1}(dy_0/dx) \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots (2)$$

で表される。 t は y_0 から中芯の厚さ（ T_s ）方向に与った着目位置の距離、 θ は x 方向とその y_0 の接線とのなす角である（図1(b)参照）。

各素材の特性、形状の相違、波段形状の周期性及び対称性により、変形に関し基本的に考慮すべき段ボールの断面形状を図1(b)に示す。

1波長当り ML のモーメント（ M ＝一定：単位幅当たりのもの）が働く際、純曲げ（軸力 $N=0$ ）のほりの理論によると¹³⁾位置 x 、 y における応力 σ と M の関係は

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= My(x)/I_z \\ M &= \text{一定} \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots (3)$$

で表される。ただし、 $y(x)$ は中立軸からの着目位置までの高さ、 I_z は単位幅当りの平均断面2次モーメント（1波長当りの全断面2次モーメント/ L ）である。

複合材の軸力零の条件式

$$\Sigma \left(\int \sigma_i dA_i \right) = 0 \quad \cdots \cdots (4)$$

より¹³⁾、段ボール厚さ中央からの距離を y_c で示すと、段ボールの中立面の位置 h_0 （段ボールの厚さ中央の位置からの中立軸までの距離）は

$$h_0 = \Sigma \left(E_i \int y_c dA_i \right) / \Sigma (E_i A_i) \quad \cdots \cdots (5)$$

で表せる。 A_i は1波長間の注目構成素材 i の断面積、 E_i は素材 i の縦弾性係数である。

素材 i の段ボールの中立面からの着目位置の距離を y_i とすると、単位幅当りの平均断面2次モーメント I_i は

$$I_i = \int_{A_i} y_i^2 dA_i / L \quad \cdots \cdots (6)$$

で表され、各素材 i についての变形条件

$$(1/\rho) = \sigma_i / (E_i y_i) \quad \cdots \cdots (7)$$

及びモーメントの釣合条件

$$M = \Sigma \left(\int \sigma_i y_i dA_i \right) / L \quad \cdots \cdots (8)$$

により、各素材 i の曲げ応力 σ_i は

$$\sigma_i = (ME_i y_i) / \Sigma (E_i I_i) \quad \cdots \cdots (9)$$

で表される¹³⁾。ただし、 ρ は中立面の曲率半径である。

両面段ボールの中芯の位置 y_s （中立面からの距離）の曲げ応力は(9)にならって

$$\sigma_s = ME_s y_s / R_s \quad \cdots \cdots (10)$$

$$R_s = (E_s I_s + E_{k1} I_{k1} + E_{k2} I_{k2}) \quad \cdots \cdots (11)$$

段ボールの上下表面のクラフトライナー（ KL_1 , KL_2 ）の位置 y_{k1} 及び y_{k2} （中立面からの距離）の曲げ応力は各々

$$\sigma_{k1} = ME_{k1} y_{k1} / R_s \quad \cdots \cdots (12)$$

$$\sigma_{k2} = ME_{k2} y_{k2} / R_s \quad \cdots \cdots (13)$$

で表される。ただし、 E_s , E_{k1} , E_{k2} は各々中芯、 KL_1 , KL_2 の縦弾性係数であり、 I_s , I_{k1} , I_{k2} は中芯、 KL_1 , KL_2 の単位幅当りの平均断面2次モーメントである。

Fig.1 Bending pattern and a fundamental element of double faced corrugated fiberboard (CF).

(a) Uniform bending along corrugation. The rotation axis of the bending moment (per unit wavelength) ML is along the machine direction.

(b) Position (x, y_0, t) of SCP medium (CM). Here T_s, L and h represent thickness, wavelength and waveheight, respectively. The notation h_0 is distance from position Ox to the neutral surface of CF.

I_s, I_{k1}, I_{k2} は前報^{10)~12)}のように、断面 2 次モーメントの定義(6)より

$$\left. \begin{aligned} I_s &= h_0^2 A_s^* + I_{s0} \\ A_s^* &= \int dA_s / L \\ I_{s0} &= \left[\int y_{s0}^2 dA_s \right] / L \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(14)$$

$$I_{k1} = (h_{0k1} - h_0)^2 T_{k1} + (T_{k1}^3 / 12) \quad \dots\dots(15)$$

$$I_{k2} = (h_{0k2} + h_0)^2 T_{k2} + (T_{k2}^3 / 12) \quad \dots\dots(16)$$

で表される。ただし、 A_s は中芯 1 波長域の断面積である。 T_{k1}, T_{k2} は KL_1, KL_2 の各厚さであり、 h_{0k1} 及び h_{0k2} は KL_1, KL_2 の各断面図心と段ボールの厚さ中心との距離

$$h_{0k1} = (T_{k1} + T_s + h) / 2$$

$$h_{0k2} = (T_{k2} + T_s + h) / 2$$

で表されるものである。

したがって、(10)～(13)によって、モーメントMのみが働く曲げ、すなわち、一様曲げが働く際の両面段ボール（厚さ方向に非対称に強度分布をもつもの）各部材内の応力を求めることができる。

3. 結果と考察

中芯の横方向（フルートの流れの向きに直角な方向）の縦弾性係数は $1.1 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$ （坪量 140 g/m^2 ）、引張り強さは 39.2 N の値及び中芯の適切な厚さは $0.20 \sim 0.30 \text{ mm}$ であることが示されている¹⁴⁾。KLの横方向の縦弾性係数は $2.15 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$ （坪量 140 g/m^2 ）であり¹⁵⁾、その厚さは 0.30 mm （坪量 242 g/m^2 ）、引張り強さは 98 N であることが示されている¹⁶⁾。これらの値より、KLの縦弾性係数は中芯の2倍程度であり、また中芯のKLに対する厚さの比は2/3程度で、面積当りの引張り強さはKLの方が中芯より2倍程度大きいものと考えられる。そこで、議論を容易にするために、便宜上、前報^{5)～7)}と同様、 E_s を単位化して $E_s = 1$ 、 $E_{k1} = 2$ 、 $E_{k2} = 2$ にとり、厚さについては $T_s = 0.24 \text{ mm}$ 、 $T_{k1} = 0.30 \text{ mm}$ 、 $T_{k2} = 0.30 \text{ mm}$ のものを中心として議論を進める。また、一般に使われている段ボール（Aフルートの場合）は $L = 8.8 \sim 9.2 \text{ mm}$ 、 $h = 4.3 \sim 4.8 \text{ mm}$ である¹⁷⁾。このことより、前報^{5)～7)}と同様に便宜上 $L = 9.2 \text{ mm}$ 、 $h = 4.6 \text{ mm}$ （ $= L/2$ ）のものを中心として議論する。そして、単位幅当りのモーメントを $M = 1 \mu\text{N}$ とする。

3.1 h_0 と形状

材料の応力は(3)より中立面位置 h_0 からの距離によって決まる。したがって、 h_0 と段ボールの形状及び縦弾性係数との関係を議論することは重要であると考えられる。そこで、それらの関係を議論するために、 h_0 と中芯の厚さ T_s 、波長 L 、波高の h 、ならびに E_{k1} 、 T_{k1} との関係を求めた。それを図2(a), (b)、図3、図4(a), (b)に示す。但し、 E_{k1} の変化の議論を容易にするため、図4(a)については $E_{k2} = 4$ とした。そして、図心の特性に基づくものではあるが、 $T_{k1} > T_{k2}$ の際、中立面は段ボールの厚さ中央より KL_1 側にあり、 h_0 は正となることが認められ、 $T_{k1} < T_{k2}$ の際、中立面は逆に KL_2 側にあり、 h_0 は負であることが認められた。

図2(a), (b)より、 $|h_0|$ は T_s の増加によって減少し、 L の増加によつてはじめは増加するが、その後、一定値に近づくことが分かり、図3より $|h_0|$ は h の増加によって増加することが分かる。図4(a), (b)より、

Fig. 2 (a) Relation between $|h_0|$ and thickness T_s of CM. Here we take $L = 9.2 \text{ mm}$, $h = 4.6 \text{ mm}$, $T_{k2} = 0.30 \text{ mm}$, and $E_s = 1$.
(b) Relation between $|h_0|$ and wavelength L of CM. Here we take $h = 4.6 \text{ mm}$, $T_{k2} = 0.30 \text{ mm}$, $E_s = 1$ and $E_{k1} = E_{k2} = 2$.

$E_{k1} < E_{k2}$ 又は $T_{k1} < T_{k2}$ では h_0 は負となり、 E_{k1} 又は T_{k1} の増加によって増加し、 $E_{k1} = E_{k2}$ 又は $T_{k1} = T_{k2}$ で $h_0 = 0$ となり、それを越えると h_0 は正となることが分かる。そして、その値はそのまま増加をつづけることが分かる。

(5)より、 T_s による h_0 の減少は、 T_s の増加によって段ボールの中央部にある中芯の強度が増加した為であると考えられ、 L による h_0 の増加は L の増加によって中芯の単位長さ当りの材料の密度が減少し、中芯の段ボールの強度への寄与が減少するものと考えられる。また、(5)より h による h_0 の増加は h の増加による段ボール表面間の距離の増加に基づくものと考えられよう。そして E_{k1} 、 T_{k1} の増加による h_0 の増加は KL_1 の強度の増加によって生じたものと考えられる。

Fig. 3 Relation between $|h_0|$ and waveheight h of CM. Here we take $L=9.2$ mm, $T_{k2}=0.30$ mm, $E_s=1$ and $E_{k1}=E_{k2}=2$.

3.2 応力の分布状況

厚さ方向に非対称な強度分布をなす両面段ボールの応力(曲げ応力)状況を明らかにするために、中芯及び両表面KLの応力と位置 x および各部材の厚さ中心からの距離 t との関係を求めた。それを図5(a), (b)に示す。図5(a)は中芯及びKLの $|t|$ の最大値(厚さ表面の位置), すなわち, $t=\pm T_s/2$ 及び $t=\pm T_{k1}/2$, $t=\pm T_{k2}/2$ の応力の値を示したものであり、中芯の応力は x の増加によって大きく増加するが、中芯をはさむ上下KLの応力は x によらず一定な値を示すことが分かる。

また、図5(b)は中芯及びKLについての所定の x ($x=0$, $x=L/8$, $x=L/4$)における応力と t との関係を示したものであり、図より t による中芯及びKLの応力 σ の変化域は小さいが、応力の変化 $|\Delta\sigma|$ は t の変化 Δt に比例して増加することが分かる。

当然のことではあるが、図5(a)及び(1)~(3)より、 x による中芯の応力の変化は中芯の波形形状によるものであることが分かり、 x によるKLの応力の変化がないのはKLの平板の形状によるものであることが分かる。同様に、(1)~(3)より、中芯及び両KLの t による応力の変化は素材の厚さ内の位置と中立面との距離の変化によるものであることが分かる。

応力絶対値の最大値はKLについては外表面に、中芯についてはそのKL接触部に生じることが分かる。そして、中芯の応力は $h_0 \neq 0$ であるために、片面段ボールの際と同様、対称な両面段ボールの場合とは異なり、大きくなることが分かる。

Fig. 4 (a) Relation between h_0 and longitudinal elastic modulus E_{k1} of KL_1 (upper kraftliner). Here we take $L=9.2$ mm, $h=4.6$ mm, $E_s=1$ and $E_{k2}=4$.

(b) Relation between h_0 and thickness T_{k1} of KL_1 . Here we take $L=9.2$ mm, $h=4.6$ mm, $T_{k2}=0.30$ mm and $E_s=1$.

3.3 最大応力と形状

材料の破壊は、応力が最も大きいところからおこるものと考えられる。そこで、中芯及び KL_1 , KL_2 の $|\sigma|$ の最大値 σ_{smax} 及び σ_{k1max} , σ_{k2max} と T_s , L , h , E_{k1} , T_{k1} との関係を議論する。

σ_{smax} と T_s との関係を図6(a)に示す。図より片面段ボールの際と同様に σ_{smax} は T_s の増加に伴って減少することが分かる。(14)より T_s によって I_s が増加し、(10)及び(11)より I_s の増加によって各素材の応力が減少することが分かる。このことより、片面段ボールの際と同様に、 T_s の増加による両面段ボールの σ_{smax} の減少は T_s の増加による I_s の増加に基づくものであると考えられる。

Fig. 5 Stress σ distribution of CF. Here we take $L = 9.2\text{ mm}$, $h = 4.6\text{ mm}$ and $E_{k1} = E_{k2} = 2$.
 (a) Relation between $|\sigma|$ and position x along machine direction.
 (b) Relation between $|\sigma|$ and distance t from centroid of the thickness for CM, KL_1 and KL_2 .

$\sigma_{k1\text{max}}$ 及び $\sigma_{k2\text{max}}$ と T_s との関係を図 6 (b) に示す。図より片面段ボールの際と同様に、 $\sigma_{k1\text{max}}$ 及び $\sigma_{k2\text{max}}$ は T_s の増加によって減少することが分かる。(12) 及び (13) より、この減少は σ_{smax} の際と同様に、上述の T_s の増加に伴う R_s の増加によって生じたものと考えられる。

σ_{smax} と L との関係を図 7 (a) に示す。図より σ_{smax} は L の増加によってはじめは強く増加し、やがて緩やかに減少することが分かる。そして、その間に σ_{smax} の最大値が生じることが分かる。この L による σ_{smax} の増加は、(14) の L の増加による断面積減少に基づく I_{s0} の減少¹⁰⁾ 及び I_s の減少、(10)、(11) により、 I_s の減少による R_s の減少に基づくものと考えられる。

Fig. 6 (a) Relation between absolute maximum stress σ_{smax} (side KL_1 and KL_2) of CM and T_s .
 (b) Relations between absolute maximum stress $\sigma_{k\text{max}}$ (side KL_1 and KL_2) and T_s .
 Here we take $L = 9.2\text{ mm}$, $h = 4.6\text{ mm}$, $T_{k2} = 0.30\text{ mm}$, $E_s = 1$ and $E_{k1} = E_{k2} = 2$.

$\sigma_{k1\text{max}}$ 及び $\sigma_{k2\text{max}}$ と L との関係を図 7 (b) に示す。図より片面段ボールの際と同様に、 $\sigma_{k1\text{max}}$ 及び $\sigma_{k2\text{max}}$ は L の増加によってはじめは強く増加し、その後 L の広い領域にわたってほぼ一定となることが分かる。また、上述の L による R_s の減少及び (12)、(13) により、 L による $\sigma_{k1\text{max}}$ 及び $\sigma_{k2\text{max}}$ の増加は R_s の減少によるものと考えられる。

σ_{smax} と h との関係を図 8 (a) より、 σ_{smax} は h の増加によって顕著に低下することが分かる。図 3 及び (14)~(16) より、 h の増加によって I_s 及び I_{k1} , I_{k2} が顕著に増加することが分かる。このことと (10) 及び (11) とにより、上記の h の増加による σ_{smax} の減少は R_s の増

Fig. 7 (a) Relations between σ_{smax} (side KL₁ and KL₂) and L .
 (b) Relations between σ_{kmax} (side KL₁ and KL₂) and L .
 Here we take $h=4.6$ mm, $T_s=0.24$ mm, $T_{k2}=0.30$ mm, $E_s=1$ and $E_{k1}=E_{k2}=2$.

加によって生じたものと考えられる。

σ_{k1max} 及び σ_{k2max} と h との関係を示す図 8(b)より, σ_{k1max} 及び σ_{k2max} は h の増加によって減少することが分かる。(12)及び(13)より, この σ_{k1max} 及び σ_{k2max} の減少は, 上述の h による R_s の増加によって生じたものと考えられる。

σ_{smax} 及び σ_{k1max} , σ_{k2max} と E_{k1} との関係を図 9(a), (b)に示す。図 9(a)より KL₁ 側の σ_{smax} は $T_{k1} \leq T_{k2}$ のとき E_{k1} の増加によって減少し, $T_{k1} > T_{k2}$ のときはじめ緩やかに増加し, 一定値に近づくことが分かる。また, KL₂ 側の σ_{smax} は E_{k1} の増加によって減少する。図 9(b)より E_{k1} の増加によって σ_{k1max} は減少し, σ_{k2max} は増加することが分かる。

Fig. 8 (a) Relations between σ_{smax} (side KL₁ and KL₂) and h .
 (b) Relations between σ_{kmax} (side KL₁ and KL₂) and h .
 Here we take $L=9.2$ mm, $T_s=0.24$ mm, $E_s=1$ and $E_{k1}=E_{k2}=2$.

図 4(a)の E_{k1} による h_0 の増加及び図 1(b)により, KL₂ 側の位置の中立面からの距離 $|y_s|$ は E_{k1} の増加によって増加, 逆に KL₁ 側の $|y_s|$ は減少するものと考えられ, また, (11)及び(14)~(15)より, E_{k1} の増加による R_s の増加が考えられよう。したがって, (10)及び(11)より, E_{k1} の増加による KL₂ 側の σ_{smax} の減少は, E_{k1} の増加に伴う強い R_s の増加によるものと考えられる。 $T_{k1} \leq T_{k2}$ の際の E_{k1} の増加による KL₁ 側の σ_{smax} の減少は E_{k1} の増加に伴う R_s の増加及び $|y_s|$ の減少によって生じたものと考えられ, $T_{k1} > T_{k2}$ の際の E_{k1} の増加による KL₁ 側の σ_{smax} の増加は E_{k1} の増加に伴う R_s の増加の寄与よりも E_{k1} 増加の寄与が E_{k1} の小さい領域では強く働くために生じたもの

Fig. 9 (a) Relations between σ_{smax} (side KL₁ and KL₂) and E_{k1} .

(b) Relations between σ_{kmax} (side KL₁ and KL₂) and E_{k1} .

Here we take $L=9.2\text{ mm}$, $h=4.6\text{ mm}$, $T_s=0.24\text{ mm}$, $T_{k2}=0.30\text{ mm}$, $E_s=1$ and $E_{k2}=2$.

考えられる。

図4(a)及び(11)~(16)より, E_{k1} の増加による σ_{k1max} の減少は R_s の増加及び $|y_s|$ によって生じたものと考えられ, E_{k1} の増加による σ_{k2max} の増加は h_0 の増加に基づく y_{k2} の増加が R_s の増加の寄与よりも強く生じたことによるものと考えられる。

σ_{smax} 及び σ_{k1max} , σ_{k2max} と T_{k1} との関係を示す図10(a), (b)より, $T_{k2}>0.30\text{ mm}$ の際のKL₂側の σ_{smax} を除いては, 全ての最大応力は T_{k1} の増加によって減少することが分かる。そして, $T_{k2}>0.30\text{ mm}$ の際のKL₂側の σ_{smax} は T_{k1} の増加によって緩やかに増加し, やがて減少することが分かる。

(15)の T_{k1} の増加による I_{k1} の増加, 及びそれに伴う

Fig. 10 (a) Relations between σ_{smax} (side KL₁ and KL₂) and T_{k1} .

(b) Relations between σ_{kmax} (side KL₁ and KL₂) and T_{k1} .

Here we take $L=9.2\text{ mm}$, $h=4.6\text{ mm}$, $T_s=0.24\text{ mm}$, $E_s=1$ and $E_{k1}=E_{k2}=2$.

(11)の R_s の増加と(12)及び(13)とにより, T_{k1} による σ_{smax} 及び σ_{k1max} , σ_{k2max} の減少は I_{k1} の増加によるものと考えられる。なお, 図10(a)に見られる $T_{k2}>0.30\text{ mm}$ の際に生じる T_{k1} の増加によるKL₂側の σ_{smax} の緩やかな増加は, (10)及び(11)より, T_{k1} の増加による図4(b)の h_0 の増加に伴う $|y_s|$ の増加が R_s の増加の寄与より強く働いたことによるものと考えられる。

以上述べたことより, 両面段ボールの強度について力学的な観点から見ると, T_{k1} の値は可能な限り大きくとる程, 素材の最大応力は減少し, 妥当な状態を示すが, 特に h は大きな値をとることが望ましく重要なことである。

そして実用の中芯形状(例えば $T_s=0.24\sim 0.36\text{ mm}$, $h=4.6\text{ mm}$)は一応妥当なものとも見させるが, よ

り妥当な形状設定が可能であることが分かる。

3.4 E_{fs} , E_{fk} と形状

材料量当りの強度（強度基準）と段ボール形状との関係を議論する。中芯材の量は T_s と長さ S とに比例する。また、単位長さ当りの段数 $1/L$ に比例し、段当りの材料量は T_s とその部分の長さに比例するものと考えられる。そこで、前報⁽¹⁾⁽¹²⁾にならい、 $T_s=0.24$ mm ($=T_s^*$)、 $L=9.2$ mm ($=L^*$)、 $h=4.6$ mm ($=h^*$)、 $T_{k1}=T_{k2}=0.30$ mm ($=T_k^*$) の σ_{smax} ($=\sigma_{s0}$) 及び σ_{k1max} ($=\sigma_{k0}$) を基準とした中芯及び KL_1 , KL_2 の材量当りの強度基準を E_{fs} 及び E_{fk1} , E_{fk2} で示す。すなわち、 E_{fs} を

$$E_{fs} = F_s / F_{s0} \quad \cdots \cdots (17)$$

で表す。ただし、 F_s 及び F_{s0} は

$$F_s = [1 / (L^2 + h^2)^{1/2}] \times [L / (T_s \sigma_{smax})]$$

$$F_{s0} = [1 / (L^{*2} + h^{*2})^{1/2}] \times [L^* / (T_s^* \sigma_{s0})]$$

である。同様にして E_{fk1} 及び E_{fk2} をそれぞれ

$$E_{fk1} = F_{fk1} / F_{fk10} \quad \cdots \cdots (18-1)$$

$$E_{fk2} = F_{fk2} / F_{fk20} \quad \cdots \cdots (18-2)$$

で表す。ただし、 F_{fk1} 及び F_{fk10} は

$$F_{fk1} = 1 / [T_{k1} \sigma_{k1max}], \quad F_{fk10} = 1 / [T_k^* \sigma_{k0}]$$

F_{fk2} 及び F_{fk20} は

$$F_{fk2} = 1 / [T_{k2} \sigma_{k2max}], \quad F_{fk20} = 1 / [T_k^* \sigma_{k0}]$$

である。順次、強度基準 E_{fs} 及び E_{fk1} , E_{fk2} と段ボールの形状及び材質 T_s , L , h , E_{k1} 及び T_{k1} との関係を述べる。

E_{fs} 及び E_{fk1} , E_{fk2} と T_s との関係を示す図 11(a), (b)より、 E_{fs} は T_s の増加によつてはじめは顕著に減少するが、やがてその減少の傾向は緩やかになることが分かる。また、 E_{fk1} 及び E_{fk2} は T_s の増加によつてほぼ 1 次的に増加することが分かる。

E_{fs} 及び E_{fk1} , E_{fk2} と L との関係を示す図 12(a), (b)より、 L の増加によつて、 E_{fs} ははじめ増加し、やがてほぼ一定になる。 E_{fk1} 及び E_{fk2} は緩やかに減少し、やがてこれも一定値に近づくことが分かる。

E_{fs} 及び E_{fk1} , E_{fk2} と h との関係を示す図 13(a), (b)より、 h の増加によつて、 E_{fs} 及び E_{fk1} , E_{fk2} は増加することが分かる。しかし、その増加の仕方は E_{fs} と E_{fk1} , E_{fk2} とで異なっており、 h の増加によつて、 E_{fs} の傾きは次第に減少し、他方 E_{fk1} 及び E_{fk2} の傾きは共に次第に増加する。

E_{fs} 及び E_{fk1} , E_{fk2} と E_{k1} との関係を示す図 14(a), (b)より、 E_{k1} の増加によつて、 KL_1 側の E_{fs} 及び E_{fk1} は変化せず、ほぼ一定となることが分かる。 KL_2 側の E_{fs} はほぼ E_{k1} の増加に比例して増加するが、 E_{fk2} は反比例的に減少する。

Fig.11 (a) Relations between E_{fs} (side KL_1 and KL_2) and T_s .

(b) Relations between E_{fk1} , E_{fk2} and T_s .

Here we take $L=9.2$ mm, $h=4.6$ mm, $T_s=0.24$ mm, $E_s=1$ and $E_{k1}=E_{k2}=2$.

E_{fs} 及び E_{fk1} , E_{fk2} と T_{k1} との関係を示す図 15(a), (b)より、 T_{k1} が増加すると、 KL_2 側の E_{fs} は大きく増加することが、 KL_2 側の E_{fs} は $T_{k2} > 0.30$ mm ではほぼ一定とみられる緩やかな増加を示し、 $T_{k2} > 0.30$ mm では減少後、緩やかな増加を示すことが分かる。また、 T_{k1} の増加によつて、 E_{fk1} は減少するが、 E_{fk2} は増加することが分かる。

図 6(a)及び(17)より、 T_s の増加による KL_1 及び KL_2 側の E_{fs} の減少は、(17)の T_s による σ_{smax} の減少よりも強い(17)の $1/T_s$ の因子の寄与が生じたことによるものと考えられる。図 7(a), 図 8(a)及び(17)より、 E_{fs} の L 及び h の増加による増加は(17)の $L / [\sigma_{smax} (L^2 + h^2)^{1/2}]$ の因子から決定されるが、 L による E_{fs} の増加については $L / (L^2 + h^2)^{1/2}$ の因子が、 h による増加に

Fig.12 (a) Relations between E_{fs} (side KL_1 and KL_2) and L .

(b) Relations between E_{fk1} , E_{fk2} and L .

Here we take $L=9.2$ mm, $h=4.6$ mm, $T_s=0.24$ mm, $E_s=1$ and $E_{k1}=E_{k2}=2$.

については $1/\sigma_{smax}$ の因子がより重要な役割を果たしたことになるものと考えられる。

また、図9(a)、図10(a)及び(17)より、 E_{k1} の増加による KL_2 側及び T_{k1} の増加による KL_1 側の E_{fs} の増加は、各々(17)の E_{k1} 及び T_{k1} の増加に基づく σ_{smax} の減少によるものであると考えられ、 E_{k1} の増加に対する KL_1 側及び T_{k1} (>0.1 mm) の増加に対する KL_2 側の E_{fs} の近似的な一定性は(17)の E_{k1} 及び T_{k1} の増加による σ_{smax} の近似的な一定性に基づくものと考えられる。

図6(b)、図8(b)及び(18-1)、(18-2)より、この T_s 及び h の増加による E_{fk1} 及び E_{fk2} の増加は T_s 及び h の増加による σ_{k1max} 及び σ_{k2max} の減少によって各々生じたものと考えられる。

図7(b)及び(18-1)、(18-2)より、 L の増加による E_{fk1} 及び E_{fk2} の減少は L の増加に基づく σ_{k1max} 及び

Fig.13 (a) Relations between E_{fs} (side KL_1 and KL_2) and h .

(b) Relations between E_{fk1} , E_{fk2} and h .

Here we take $L=9.2$ mm, $h=4.6$ mm, $T_s=0.24$ mm, and $E_s=1$.

σ_{k2max} の増加によって各々生じたものと考えられる。

図9(b)、図10(b)及び(18-1)より、 E_{k1} の増加による E_{fk1} が近似的に一定とみられる緩やかな増加は σ_{k1max} の緩やかな減少によるものと考えられ、 T_{k1} の増加による E_{fk1} の減少は σ_{k1max} の減少よりも T_{k1} の寄与が強く生じたためと考えられる。また、図9(b)、図10(b)及び(18-2)より、 E_{k1} の増加による E_{fk2} の減少は E_{k1} の増加による σ_{k2max} の増加によって生じたものと考えられ、 T_{k1} 増加による E_{fk2} の増加は T_{k1} の増加による σ_{k2max} の減少によって生じたものと考えられる。

したがって、材料強化 (E_{k1} 及び T_{k1} の増加) による材料量当りの強度基準の低下は使用形状に対する要望からでてくるものであるが、このことを検討し、明

Fig.14 (a) Relations between E_{fs} (side KL₁ and KL₂) and E_{kl} .
 (b) Relations between E_{fk1} , E_{fk2} and E_{kl} .
 Here we take $L=9.2$ mm, $h=4.6$ mm, $T_s=0.24$ mm, $E_s=1$ and $E_{k1}=E_{k2}=2$.

らかにすることは部材強化に関する重要な事項であると考えられる。

以上述べたことより、要望する素材の E_{fs} 及び E_{fk1} , E_{fk2} の値が可能な限り大きくなるよう形状を設定することは曲げを受ける段ボールに対し重要なことであるが、実際用いられている段ボールの形状寸法は必ずしもこのようなものにはなっていない。したがって、材料量を考慮した強度に対して段ボールの中芯の形状寸法を最適となるよう決定することは、工学的観点から段ボールを考えると重要なことである。

厚さ方向に非対称な強度分布を示す両面段ボールの曲げ強度の挙動は、片面段ボールのときとは非常に異なっている。両面段ボールにおける中芯の形状変化の曲げ強度への影響は片面段ボールのように強くない。また、KL の形状及び特性の変化は強く現れるが、3

Fig.15 (a) Relations between E_{fs} (side KL₁ and KL₂) and T_{kl} .
 (b) Relations between E_{fk1} , E_{fk2} and T_{kl} .
 Here we take $L=9.2$ mm, $h=4.6$ mm, $T_s=0.24$ mm, $E_s=1$ and $E_{k1}=E_{k2}=2$.

素材構成になっているために2素材構成の片面段ボールの場合ほど強くない。このことが両面段ボールの大きな特徴である。

本報告は、曲げを受ける段ボールのKL及び中芯の形状寸法及び材質を強度的観点から設定するための一つの基礎的資料となるものであろう。しかし、段ボールは強度的観点からのみではなく、加工生産面、利用上及び経済性からも論ずることが必要なことは言うまでもない。

4. 結 言

強度が厚さ方向に非対称に分布する両面段ボールの一樣曲げ（モーメント軸がフルートの流れ方向）について弾性曲げ応力解析を行い、中芯及びクラフトライナー（上面KL₁、下面KL₂）の曲げ強度と形状及び

縦弾性係数との関係を議論した。そして、材料量当りの中芯及び KL_1 , KL_2 の曲げ強度 E_{fs} 及び E_{fk1} , E_{fk2} を評価した。その結果、次のようなことが分かった。

(1) 中立面の位置（段ボール厚さ中央位置からの距離） h_0 は KL_1 の縦弾性係数 E_{k1} 及び厚さ T_{k1} の増加によって厚さ中央位置から KL_1 側へ大きく移動する。 $|h_0|$ は中芯の厚さ T_s の増加に伴って減少し、中芯の波長 L の増加に伴ってははじめは急激な、やがて緩やかな増加を示し、一定値に近づく。また、 $|h_0|$ は中芯の波高 h の増加によって増加する。

(2) 中芯の応力の絶対値の最大値 σ_{smax} は縦弾性係数及び厚さの小さい KL 側の中芯接合部の外表面に生じる。また、 KL の応力の絶対値の最大値についても同様の側の KL 外表面に生じる。そして、縦弾性係数及び厚さの増加に伴い、 σ_{smax} 及びその KL の応力最大値は、強度分布が対称な段ボールのものに比べ非常に大きくなる。

(3) σ_{smax} 及び KL_1 側、 KL_2 側の応力の絶対値の最大値 σ_{k1max} , σ_{k2max} は T_s 及び h の増加に伴って各々減少する。また、これらの値は L の増加に伴いはじめ急激に増加するが、やがてほぼ一定になる。

(4) $T_{k1} > T_{k2}$ (KL_2 の厚さ) の際の KL_1 側の σ_{smax} を除く全ての σ_{smax} 及び σ_{k1max} は E_{k1} の増加によって減少するが、 $T_{k1} > T_{k2}$ の際の KL_1 側の σ_{smax} は E_{k1} の増加によって緩やかに増加する。そして、 σ_{k2max} は E_{k2} の増加によって増加する。

$T_{k2} > 0.30$ mm の際の KL_2 側の σ_{smax} を除く全ての σ_{smax} , σ_{k1max} , σ_{k2max} は T_{k1} の増加によって減少する。そして、 $T_{k2} > 0.30$ mm の際 KL_2 側の σ_{smax} は T_{k1} の増加によって緩やかに増加の後、減少する。

(5) KL_1 側及び KL_2 側の E_{fs} は T_s の増加によって共に減少し、 L 及び h の増加によってはじめ顕著に増加し、ほぼ一定になる。 E_{fk1} 及び E_{fk2} は、 T_s 及び h の増加によって顕著に増加し、 L の増加によって緩やかに減少する。

(6) T_{k1} を大きくとり、 E_{fk1} を大きくなるようにすれば、それに応じた E_{fk2} の値は小さくなる。 E_{k1} の増加によって KL_1 側、また T_{k1} (> 0.1 mm) の増加によって KL_2 側の E_{fs} は共にほぼ一定な値を示し、他の側の E_{fs} は各々増加する。

以上のことより、中芯の波高は可能な限り大きくとることが強度の設定上望ましい。なお、 E_{fk1} を大きくとれば、 E_{fk2} が小さくなる傾向を示すので、この状態を巧みに配慮し、形状設定に当たることが必要であると思われる。

本報告は段ボールの生産性への配慮を無視したものではあるが、強度に関する段ボールの形状の設定をより合理的に行うに当たっての意義ある基礎資料となるであろう。

謝 辞

本報告をまとめる際、図の製作について全面的なご協力を頂いた物性基礎工学講座技官 大塚昌司氏に感謝する。

参考文献

- 1) たとえば、段ボール実用百科編集委員会：段ボール実用百科，一律書房，21（1970）；レンゴー株式会社：段ボール技術，包装新聞社，16（1971）
- 2) J. W. Koning Jr. and R. Stern : Tappi, 60 (12), 128 (1977)
- 3) G. G. Maltenfort : Tappi, 53 (11), 1076 (1970)
P. Grartaganis : Tappi, 58 (11), 102 (1975)
R. M. Morris Jr. and G. P. Vallow : Tappi, 58 (11), 110 (1975)
- 4) 松島成夫，奥田隆宏，宮内治，野沢光治：紙パ技協誌，36 (3), 37 (1982)
- 5) 松島成夫，矢野忠，松島晟：紙パ技協誌，42 (5), 480 (1988)
- 6) 松島成夫，矢野忠，松島晟：紙パ技協誌，43 (5), 602 (1989)
- 7) 松島成夫，矢野忠，松島晟：紙パ技協誌，44 (5), 605 (1990)
- 8) 松島成夫，矢野忠，上田康，松島理：紙パ技協誌，47 (10), 1263 (1993)
- 9) S. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger : Theory of Plates and Shells, (McGraw-Hill), 366 (1959)
- 10) 松島成夫，矢野忠，松島晟，横田俊昭：紙パ技協誌，45 (4), 480 (1991)
- 11) 松島成夫，矢野忠，松島晟，横田俊昭：紙パ技協誌，46 (5), 668 (1992)
- 12) 松島成夫，矢野忠，松島理，横田俊昭：紙パ技協誌，47 (4), 517 (1993)
- 13) たとえば，黒木剛司郎：材料力学，森北出版，130 (1967)
- 14) 段ボール実用百科編集委員会：段ボール実用百科，一律書房，126 (1970)
- 15) 14) の P. 476
- 16) 上野桂助：紙の強度，丸善，240 (1973)
- 17) レンゴー株式会社：段ボール技術，包装新聞社，264 (1971)

(受理：'93.10.14)