一様曲げ変形（モーメント軸が流れ方向）を受ける段ボールの応力解析 第5報 厚さ方向に非対称な強度をもつ複両面段ボールの場合

愛媛大学工学部 松島 成夫, 矢野 忠
帝人製機(株)松山工場 松島 理

Elastic Strength of Corrugated Fiberboard under the Uniform Bending about the Moment Axis in the Machine Direction V —DWCF of Asymmetric Strength for Thickness—

Shigeo Matsushima and Tadashi Yano
Faculty of Engineering, Ehime, University
Satoru Matsushima
Teijin Seiki Corporation, Matsuyama

松島成夫

矢野 忠

松島 理

Analysis of the bending stress is performed for double wall corrugated fiberboard (DWFC) with asymmetrical strength distribution along the direction of thickness of the kraft-liner (KL). Relations are investigated between maximum absolute stresses of elements for DWCF (σ_{s1max} , σ_{s2max} , σ_{k1max} , σ_{k2max} and σ_{komax}) and shapes for upper KL (Upper KL₁, lower KL₂ and middle KL₀) or semi-chemical corrugated medium (SCP medium: upper CM₁ and lower CM₂). Obtained results are as follows;

(1) Vertical distance h_0 from the outer surface of KL₂ to the neutral surface of DWFC increases with increasing modulus E_{k1} of longitudinal elasticity, thickness T_{k1} for KL, and thickness T_{s1} and waveheight h_1 for CM₁. It decreases initially and then approaches constant gradually with the increase of wavelength L_1 for CM₁.

(2) Stresses in KL and SCP medium are propotinal to the distance from the neutral surface to the point interested in. σ_{s1max} , σ_{s2max} , σ_{k1max} , σ_{k2max} and σ_{komax} occur at the outermost positions, that is, on the outermost surfaces for CM₁, CM₂, KL₁, KL₂ and KL₀.

(3) σ_{s1max} decreases remarkably or slowly with the increase of T_{s1} , E_{k1} , T_{k1} , and thickness T_{k0} for KL_0 , but increases with the increase of L_1 . It increases initially, attains maximum and then decreases gradually with h_1 . σ_{s2max} increases initially, attains maximum and then decreases gradually with of E_{k1} , T_{k1} and T_{k0} . It decreases with the increase of T_{s1} and h_1 .

(4) σ_{k1max} decreases remarkably with the increase of T_{s1} , T_{k1} and T_{k0} , but increases with the increase of L_1 and E_{k1} . It also increases initially, attains maximum and decreases gradually with the increase of h_1 .

While σ_{k2max} decreases with the increase of T_{s1} and T_{k0} , and increases with the increase of L_1 . But it increases initially, attains maximum and then decreases gradually with the increase of h_1 , E_{k1} and T_{k1} .

Key words : Strength of corrugated fiberboard, Elastic stress analysis, Structure strength

1. 緒 言

形状の異なる構成素材からなる複両面段ボールは、両面段ボールに次いで、構造用包装材として、盛んに用いられている。段ボールを単体または製品として使用するとき基本的形態としての曲げ変形に対する複両面段ボールの強度を明らかにすることは、その合理的利用および工学的強度設計上の立場から重要なことである。はりの曲げ理論より、曲げ応力は構成素材の材料特性および形状、構成状況によって大きく影響されることが知られている。そこで、複両面段ボールの全体に対する各部材の応力を議論し、全強度への役割を明らかにすることは非常に重要なことであると考えられる。

段ボールの強度の研究^{1)~3)}は多くない。特に、基本的な研究は少ないが、引張り変形強度⁴⁾、面圧縮が働く際の弾性変形^{5)~7)}に関する研究、また、弾性曲げに関するものとして、薄い波板の弾性曲げ（こわさおよび断面2次モーメント）の議論⁸⁾がある。しかし、曲げ変形に関する基礎的研究は見受けられなかったので、筆者らは、厚さ方向に対称な強度をもつ両面段ボール⁹⁾、複両面段ボール¹⁰⁾、また厚さ方向に非対称な強度を示す片面段ボール¹¹⁾および両面段ボール¹²⁾の縦方向曲げ（モーメント軸が流れ方向）に関する弾性応力解析を行った。

さらに、本報では、前報^{11),12)}と同様に厚さ方向に非対称な強度分布をもつ複両面段ボール〔上表面（クラフト・ライナー）+中芯+中層（クラフト・ライナー）+中芯+下表面（クラフト・ライナー）〕の縦曲げ（モーメント軸は流れ方向）における素材各部の弾性応力解析を行い、全曲げ強度と各素材の形状および弾性係数との関係を明らかにした。ただし、前報^{10)~12)}

と同様、各素材を一様な弾性体と見なし、容易かつ比較的高い近似で部材全体の変形の議論ができるものとして、中芯の形状を正弦波形であると仮定した。また、前報⁹⁾の考慮にしたがい、曲げに伴う中芯の断面形状の変化は小さいものと考え、前報^{9)~12)}のように、段ボールの変形は平均化された単位幅をなす真直はりであると考えた。

2. 解析方法

2.1 応力解析

上述のように、前報⁹⁾の考慮にしたがい曲げに伴う中芯断面の形状変化は、KL との接合により変形制限を受け、小さいものと考え、また、前報^{9)~12)}のように平面応力状態と平面ひずみ状態との類似性により、段ボールの変形は、以下のように平均化された単位幅をなす真直はりであると考え、議論する。

段ボールの中芯の形状は波形となった曲面である。（図1 (a) 参照）。段ボールの中芯山谷部の糊付け部付近は加工の際に生じる複雑な形状および材質等の変化があるものと考えられるが、簡便で近似度の高いものとして、前報⁵⁾⁶⁾と同様、Seydel⁸⁾にならい、中芯 i ($i=1, 2$) の形状（厚さ T_{s1} 一定）を正弦波形

$$y_{oi} = (h_i/2) \sin(2\pi x_i/L_i) \quad \dots\dots(1)$$

の曲面とする。ただし、 x_i は波状進行方向（段ボールの縦方向）の O_i からの水平距離、 y_{oi} は基準位置 O_i からの位置 x_i における中芯 i の厚さ中央位置の高さであり、 h_i はその中芯の波高、 L_i は波形の長さ（波長）である（図1 (b) 参照）。いま、図1 (a), (b) の上表面および下表面のクラフト・ライナー (KL) を各 KL_1 および KL_2 、中間位置にある KL を KL_0 で示し、 KL_0 の上側および下側にある中芯を各 CM_1 および CM_2 で示す。

Fig. 1 Bending pattern and a fundamental element of double wall corrugated fiberboard (DWCF).

(a) Uniform bending along corrugation.

The rotation axis of the bending moment per unit length M is in the machine direction.

(b) A fundamental element of double wall corrugated fiberboard (DWCF) before uniform bending.

Coordinates (x_1, y_1) for CM_1 and (x_2, y_2) for CM_2 (CM_1 is upper and CM_2 lower SCP medium). Here T_{s1} , T_{s2} , L_1 , L_2 , h_1 and h_2 represent thickness, wavelength and waveheight for CM_1 and CM_2 , respectively. T_{k1} , T_{k2} and T_{k0} are thickness for KL_1 , KL_2 and KL_0 (upper, lower and middle KL). h_c is vertical distance from central to the neutral surface of DWCF.

各中芯素材の特性、形状の相違、波段形状の周期性および対称性により、曲げ変形に関し、基本的に考慮すべき段ボールの断面形状は、図1(b)のCM₁では、 $x_1 \sim O_1 \sim L_1/4$ の部分、CM₂では $x_2 \sim O_2 \sim L_2/4$ の部分のものであると考えられる。

上述のように、段ボールの変形を平均化された単位幅（流れ方向の単位長さ）の真直はりとみなし、段ボールに単位幅当たり一定のモーメント M が働く際、純曲げ（軸力 $N=0$ ）のはりの理論によると¹³⁾¹⁴⁾、素材の位置 x, y における応力 σ_j と M との関係は

$$\sigma_j = My_j(x, y)/I_z \quad \cdots \cdots (2)$$

$M = \text{一定}$

$$j = KL_1, CM_1, KL_0, CM_2, KL_2$$

で表される。以下添字 j は上に表した素材を示す。ただし、 y_j は中立面からの着目位置の距離（高さ）、 I_z は段ボールの単位幅当たりの平均全断面2次モーメントである。

複合材の軸力零の条件式

$$\Sigma(\sigma_j dA_j) = 0 \quad \cdots \cdots (3)$$

より、段ボールの中立面の位置 h_0 （段ボールの断面下部表面から中立軸までの距離）は、段ボールの断面下部表面から任意の位置までの距離（高さ）を y^* とすれば、

$$h_0 = B_E/A_E \quad \cdots \cdots (4)$$

$$A_E = \Sigma(E_i A_j/L_j)$$

$$B_E = \Sigma\left(\int_{A_j} (E_j y^* dA_j)/L_j\right)$$

で表せる¹⁵⁾。 A_j は j が CM_1 と CM_2 のとき（中芯のとき）、一波長当たりの断面積、 j が KL_0, KL_1, KL_2 のとき単位幅（流れ方向の単位長さ）の断面積（高さ）であり、 L_j は j が CM_1, CM_2 のとき、中芯の波長を、 j が KL_0, KL_1, KL_2 のとき各クラフト・ライナーの単位幅を示す値である。そして、 E_j は j が CM_1, CM_2 のときの縦弾性係数である。

中立面から中芯 i の着目位置までの高さ y_{s1} は、段ボールの下表面から CM_1 の中央面までの距離（高さ）を h_{s01} であるとする、

$$y_{s1} = y_{s01} + (h_{s01} - h_0)$$

$$y_{s01} = y_{01} + t \cos \theta_1$$

$$\theta_1 = \tan^{-1}(dy_{01}/dx) \quad \cdots \cdots (5)$$

で表される。ただし、 h_{s01} は段ボールの下表面から中芯 i の中央面までの距離であり、 t は中芯の位置 (x_i, y_{01}) からの中芯の厚さ (T_{s1}) 方向に沿った着目位置までの距離、 θ_1 は x 方向とその y_{01} の接線とのなす角である。

上述のように、中芯が正弦波状であると考えれば、

段ボールの各中芯の単位幅当たりの平均断面2次モーメント I_{s1} は、前報⁹⁾¹⁰⁾にならない、

$$\begin{aligned} I_{s1} &= \left[\int_{A_j} y_{s1}^2 dA_{s1} \right] / L_{s1} \\ &= I_{s01} + (h_{s01} - h_0) A_{s1} / L_{s1} \quad \cdots \cdots (6) \end{aligned}$$

$$I_{s01} = \left[\int_{A_i} y_{s01}^2 dA_{s1} \right] / L_{s1} \quad \cdots \cdots (7)$$

によって表される。ただし、 y_{s01} は中芯 i の中立位置からの着目位置までの距離、 T_{s1} は中芯 i の厚さ、 L_{s1} は中芯 i の波長であり、 A_{s1} は中芯 i の一波長当たりの断面積である。

また、クラフト・ライナー (KL_i ($i=0, 1, 2$)) の単位幅当たりの断面2次モーメントは

$$\begin{aligned} I_{k1} &= \int_{A_{k1}} y_{k1}^2 dA_{k1} \\ &= I_{k01} + (h_{k01} - h_0)^2 T_{k1} \quad \cdots \cdots (8) \end{aligned}$$

$$I_{k01} = \int_{A_{k1}} y_{k1}^2 dA_{k1}$$

$$= T_{k1}^3 / 12$$

$$y_{k1} = y_{k01} + h_{k01} - h_0$$

によって表される。ただし、 y_{k1} は中立面から KL_i の着目位置までの距離、 y_{k01} は KL_i の中央位置から KL_i の着目位置までの距離、 h_{k01} は段ボールの下表面から KL_i の高さ中央面までの距離、 T_{k1} は KL_i の厚さである。

各素材 j ($j = KL_1, CM_1, KL_0, CM_2, KL_2$) についての変形の適合条件

$$(1/\rho) = \sigma_j / (E_j y_j) \quad \cdots \cdots (9)$$

とモーメントの釣合条件

$$M = \Sigma \left(\int_{A_j} \sigma_j y_j dA_j \right) \quad \cdots \cdots (10)$$

とにより、各素材 j の曲げ応力 σ_j は

$$\sigma_j = (ME_j y_j) / (\Sigma E_i I_i) \quad \cdots \cdots (11)$$

で表される¹⁵⁾。

高強度材として利用されている複両面段ボールについての各素材の曲げ応力を以下において議論する。

前報^{9)~11)}と同様にして、適合条件(9)および軸力零の条件(3)より、(4)の h_0 は

$$h_0 = B_E / A_E \quad \cdots \cdots (12)$$

$$A_E = E_{s1} B_{s1} + E_{s2} B_{s2} + E_{k1} B_{k1} + E_{k2} B_{k2} + E_{k0} B_{k0}$$

$B_E = E_{s1} B_{s1}^* + E_{s2} B_{s2}^* + E_{k1} B_{k1}^* + E_{k2} B_{k2}^* + E_{k0} B_{k0}^*$ で表される。ただし、 $B_{s1}, B_{s2}, B_{k1}, B_{k2}, B_{k0}$ および $B_{s1}^*, B_{s2}^*, B_{k1}^*, B_{k2}^*, B_{k0}^*$ は

$$B_{s1} = A_{s1} / L_1$$

$$B_{s2} = A_{s2} / L_2$$

$$B_{k1} = T_{k1}$$

$$B_{k2} = T_{k2}$$

$$B_{k0} = T_{k0}$$

$$B_{s1}^* = \int_{As1} y_{s1}^* dA_{s1} / L_1$$

$$= (T_{k2} + h_2 + T_{s2} + T_{k0} + h_1/2 + T_{s1}/2) A_{s1} / L_1$$

$$B_{s2}^* = \int_{As2} y_{s2}^* dA_{s2} / L_2$$

$$= (T_{k2} + h_2/2 + T_{s2}/2) A_{s2} / L_2$$

$$B_{k1}^* = \int_{Ak1} y_{k1}^* dA_{k1}$$

$$= (T_{k2} + h_2 + T_{s2} + T_{k0} + T_{s1} + h_1 + T_{k1}/2) T_{k1}$$

$$B_{k2}^* = \int_{Ak2} y_{k2}^* dA_{k2}$$

$$= T_{k2}^2 / 2$$

$$B_{k0}^* = \int_{Ak0} y_{k0}^* dA_{k0}$$

$$= (T_{k2} + h_2 + T_{s2} + T_{k0}/2) T_{k0}$$

である。

曲げ応力の式(11)により, 複両面段ボールにおける C_{M1} , C_{M2} および KL_1 , KL_2 , KL_0 の各位置 (中立面からの距離) の各素材 i の応力は

$$\sigma_{s1} = ME_{s1} y_{s1} / R_d \quad \cdots \cdots (13)$$

$$\sigma_{s2} = ME_{s2} y_{s2} / R_d \quad \cdots \cdots (14)$$

$$\sigma_{k1} = ME_{k1} y_{k1} / R_d \quad \cdots \cdots (15)$$

$$\sigma_{k2} = ME_{k2} y_{k2} / R_d \quad \cdots \cdots (16)$$

$$\sigma_{k0} = ME_{k0} y_{k0} / R_d \quad \cdots \cdots (17)$$

$$R_d = E_{s1} I_{s1} + E_{s2} I_{s2} + E_{k1} I_{k1} + E_{k2} I_{k2} + E_{k0} I_{k0} \quad \cdots \cdots (18)$$

で表される。ただし, I_{s1} , I_{s2} は C_{M1} , C_{M2} の単位幅当たりの平均断面 2 次モーメント, I_{k1} , I_{k2} , I_{k0} は KL_1 , KL_2 , KL_0 の単位幅当たりの断面 2 次モーメントである。 E_{s1} , E_{s2} および E_{k1} , E_{k2} , E_{k0} は C_{M1} , C_{M2} および KL_1 , KL_2 , KL_0 の各縦弾性係数である。断面 2 次モーメントに関する定理¹⁶⁾ より, それらの断面 2 次モーメントは各々

$$I_{s1} = I_{s01} + (h_{s01} - h_0)^2 A_{s1} / L_1 \quad \cdots \cdots (19)$$

$$I_{s01} = \left(1/L_1 \right) \int_{As1} y_{s01}^2 dA_{s1}$$

$$h_{s01} = T_{k2} + T_{k0} + T_{s2} + h_2 + (T_{s1} + h_1) / 2$$

$$I_{s2} = I_{s02} + (h_{s02} - h_0)^2 A_{s2} / L_2 \quad \cdots \cdots (20)$$

$$I_{s02} = \left(1/L_2 \right) \int_{As2} y_{s02}^2 dA_{s2}$$

$$h_{s02} = T_{k2} + (T_{s2} + h_2) / 2$$

$$I_{k1} = (T_{k1}^3 / 12) + (h_{k01} - h_0)^2 T_{k1} \quad \cdots \cdots (21)$$

$$h_{k01} = T_{k1} / 2 + T_{k0} + T_{k2} + T_{s1} + T_{s2} + h_1 + h_2$$

$$I_{k2} = (T_{k2}^3 / 12) + (h_{k02} - h_0)^2 T_{k2} \quad \cdots \cdots (22)$$

$$h_{k02} = T_{k2} / 2$$

$$I_{k0} = (T_{k0}^3 / 12) + (h_{k00} - h_0)^2 T_{k0} \quad \cdots \cdots (23)$$

$$h_{k00} = T_{k2} + T_{k0} / 2 + T_{s2} + h_2$$

で表される。

(13)~(17)によって, 厚さ方向に強度非対称な複両面段ボールの各素材 i の所定位置の曲げ応力を求めることができる。

3. 結果と考察

縦弾性係数は中芯の縦方向 2.5×10^2 , 横方向 1.1×10^2 kg/mm² の値であることが¹⁷⁾, KL の厚さは 0.30, 0.467 mm (坪量 242, 379 g/m²), 中芯の厚さは 0.21~0.27 mm (坪量 125 g/m²) であることが¹⁸⁾ 示され, KL に対する厚さ比 R_t はほぼ 2/3 であることがわかる。また, 同じひずみ状態になるのに必要な中芯の KL に対する荷重比 R_w は 2/5 程度である⁴⁾。このことより近似的に比 $E_k/E_s = R_t/R_w = 2$ であると見なし, 以後 $E_k/E_0 = 1 \sim 4$ であるとして検討を行う。

3.1 h_c と形状

(2) より, 材料の応力は中立面からの距離によって決まる。そこで, まず段ボールの中立面の位置 (段ボールの厚さ中央面から中立面までの距離) h_c

$$h_c = h_0 - T_T / 2$$

と上側の中芯の厚さ T_{s1} , 波長 L_1 , 波高 h_1 , ならびに上側の KL の E_{k1} , T_{k1} , 中央の KL の T_{k0} との関係求めた。ただし, T_T は段ボールの厚さ

$$T_T = T_{k1} + T_{k2} + T_{k0} + T_{s1} + T_{s2} + h_1 + h_2$$

である。

それらの関係を図 2 (a), (b)~図 4 (a), (b) に示す。図 2 (a) および図 3 (a) より T_{s1} および h_1 の増加によって, h_c はほぼ勾配一定の増加を示し, 図 2 (b) より L_1 の増加によって h_c は減少するが, その後はほぼ一定になることがわかる。図 3 (b) および図 4 (a) より, E_{k1} および T_{k1} の増加によって, h_c は増加することがわかる。また, 図 4 (b) より, h_c は, $h_1 = h_2$ で $T_{k1} > T_{k2}$ のとき T_{k0} の増加によって, 緩やかに減少し, $h_1 > h_2$ または $h_1 = h_2$ で $T_{k1} < T_{k2}$ のときは逆に僅かではあるが増加することがわかる。これらのことは, 前報の非対称な強度分布を示す片面段ボール¹¹⁾ および両面段ボール¹²⁾ の際と大きく異なる。

(12)より, T_{s1} , h_1 , E_{k1} および T_{k1} による h_c の増加は, これらの値の増加に伴う(12)の A_E の値の増加よりも B_E の値の増加が強く生じることによるものと考えられ, L_1 による h_c の減少は, L_1 の増加に伴う中芯の単位長さ当たりの材料密度の減少に基づく(12)の B_E の値の減少が寄与したことによるものと考えられる。また, (12)より, 強度が非対称な段ボールの T_{k0} の増加によ

Fig.2 (a) Relation between h_c and T_{S1} .

In this figure and the followings given numbers are shown in unit of mm except modulus of longitudinal elasticity represented by E .

(b) Relation between h_c and L_1 .

る h_c のゆるやかな増加あるいは減少は、 T_{k0} の増加に伴う A_E および B_E の微妙な減少の度合に基づき、生じたものと考えられる。もちろん、 h_c 値への寄与は、 T_{k0} の値によるよりも、 T_{k1} または h_1 の値の方が強いものと考えられる。

3.2 応力の分布状況

(13)~(17)によって、上、下側の中芯内部および上、下表面、中央付近の KL 内部の応力をそれぞれ求めた。それらの状況の一例、すなわち、応力 σ と x_1 と x_2 および t との関係を示したものが図 5(a), (b) である。図 5 (a) より、中芯についての応力は、中芯の形状に基づくものであるが、 x の値に依存し、中立面からの距離に比例して表されることがわかり、KL は平板であるために x によらない応力分布状態を示すことがわかる。また、当然のことではあるが、図 5 (b)

Fig.3 (a) Relation between h_c and h_1

(b) Relation between h_c and modulus of longitudinal elasticity E_{k1} for KL_1 .

より、 t による応力の変化は、中立面からの距離の変化に比例して変化するため、 t の狭い範囲で、 t の変化に比例して増減するが、 t の変化が小さいため、その変化は僅かであることがわかる。

3.3 素材の最大応力と形状

材料の破壊は、 CM_1 , CM_2 および KL_1 , KL_2 , KL_0 の応力が最も大きいところ、すなわち、最大応力のところからおこるものと考えられる。そこで、 CM_1 , CM_2 の応力の絶対値 $|\sigma|$ の最大値の σ_{s1max} および σ_{s2max} , KL_1 , KL_2 および KL_0 の $|\sigma|$ の最大値 σ_{k1max} , σ_{k2max} および σ_{komax} と T_{S1} , L_1 , h_1 , E_{k1} , T_{k1} , T_{k0} との関係を各議論する。

(13)~(17)より、当然のことではあるが、複両面段ボールの応力は、両面段ボールの際と同様、中立面からの距離に比例する。そこで、 σ_{s1max} および σ_{s2max} は中芯の山谷部に、 σ_{k1max} および σ_{k2max} は KL の中立面からより遠い方の両外表面に生じるものと考えられる。そ

Fig.4 (a) Relation between h_c and T_{k1} .
(b) Relation between h_c and T_{k0} .

して、中央にある KL_0 の最大応力 σ_{k0max} は中芯および両表面 KL のものに比べ極めて小さいものと考えられる。したがって、複両面段ボールの σ_{s1max} , σ_{s2max} および σ_{k1max} , σ_{k2max} と T_{s1} , L_1 , h_1 , E_{k1} , T_{k1} との関係を主として議論する。

σ_{s1max} , σ_{s2max} および σ_{k1max} , σ_{k2max} と T_{s1} との関係を図 6 (a), (b) に示す。図より、両面段ボールの際と同様、これらの応力は T_{s1} の増加によって各減少することがわかる。

(19)より T_{s1} の増加によって I_{s1} が増加し、(18)より I_{s1} の増加によってこわさ R_d が増加することがわかる。このことより、 T_{s1} の増加によるこれらの応力の減少は、両面段ボールの際と同様に、 T_{s1} の増加に伴う I_{s1} の増加に基づく R_d の増加によって生じたものと考えられる。

図 7 (a), (b) に、 σ_{s1max} , σ_{s2max} および σ_{k1max} , σ_{k2max} と L_1 との関係を示す。同図より、それらの全ての応力は、 L_1 の増加に伴って、増加するが、中立面より KL_1 側にある位置の応力 σ_{s1max} および σ_{k1max}

Fig.5 Stress σ distribution for DWCF.

(a) Relation between σ and position x_1 or x_2

Two curves are shown with same symbol. Upper curves represent σ at $t = T_{k1}/2$, $T_{k2}/2$, $T_{k0}/2$, $T_{s1}/2$, and $T_{s2}/2$ and lower curves σ at $t = -T_{k1}/2$, $-T_{k2}/2$, $-T_{k0}/2$, $-T_{s1}/2$ and $-T_{s2}/2$, respectively.

(b) Relation between σ and position t along direction of thickness of SCP medium.

は、 L_1 の増加によってはじめは強く、やがて緩やかに増加することがわかる。これに対して、 KL_2 側にある応力 σ_{s2max} および σ_{k2max} は、 L_1 の増加によって、緩やかに単調に増加する。

(13), (15), (18)より、 L_1 の増加による σ_{s1max} および σ_{k1max} の増加は、図 2 (b) に示された L_1 の増加による中立面の KL_2 側への移行に伴う y_{s1} および y_{k1} の増加と、 I_{s1} の値の減少に伴うこわさ R_d の値の減少とによって生じたものと考えられる⁹⁾。また、 σ_{s2max} およ

Fig.6 (a) Relations between absolute maximum stresses σ_{s1max} , σ_{s2max} (for CM_1 , and CM_2) and T_{s1} .
(b) Relations between absolute maximum stresses σ_{k1max} , σ_{k2max} (for KL_1 and KL_2) and T_{s1} .

び σ_{k2max} の緩やかな増加は、上述の L_1 の増加による中立面の KL_2 側への移動の寄与よりも L_1 の増加による I_{s1} の減少に基づくこわさ R_d の強い減少によって生じたものと考えられる⁹⁾。

σ_{s1max} および σ_{s2max} と h_1 との関係を図8(a)に示す。図8(a)より、中立面より KL_1 側にある σ_{s1max} は、 h_1 の増加による増加、減少が生じ、この間に σ_{s1max} の極大が生じることがわかる。しかし、 KL_2 側にある σ_{s2max} は h_1 によって単調に減少する。図8(b)より、 σ_{k1max} および σ_{k2max} は、小さい h_1 のところでは急激に増加するが、その後大きく減少を示すことがわかる。そして、この間に、 σ_{k1max} および σ_{k2max} の極大が生じる。

(13)および(18)より、 h_1 の増加に伴う σ_{s1max} の増加は、 h_1 の増加による中立面の KL_1 側への移行よりも、 y_{s1} が増加することによるものと考えられる。図3(a)に

Fig.7 (a) Relations between σ_{s1max} , σ_{s2max} and L_1 .
(b) Relations between σ_{k1max} , σ_{k2max} and L_1 .

見られるように、 h_1 の増加に伴う中立面の KL_1 側への移動によって h_0 の増加が生じ、それに伴う I_{s1} および I_{k1} の値が減少するのが、 I_{s2} および I_{k0} の強い増加、ならびに、 R_d の増加が生じることにより、 h_1 の増加に伴う σ_{s1max} の減少が生じたことによるものと考えられる。 h_1 の増加に伴う σ_{s2max} および σ_{k1max} , σ_{k2max} の減少は、 σ_{s1max} の際と同様に、 h_1 の増加による中立面の移動に基づくこわさ R_d の増加によって生じたものと考えられる。

図9(a), (b)に、 σ_{s1max} , σ_{s2max} および σ_{k1max} , σ_{k2max} と E_{k1} との関係を示す。同図より、 E_{k1} の増加によって σ_{s1max} は単調に減少し、 σ_{s2max} および σ_{k2max} については増加、減少することがわかる。そして、この間に σ_{k2max} の極大が生じる。一方、 σ_{k1max} は単調な増加を示す。

(18)より E_{k1} の増加によって、 R_d は直接的に増加す

Fig.8 (a) Relations between σ_{s1max} , σ_{s2max} and h_1 .
(b) Relations between σ_{k1max} , σ_{k2max} and h_1 .

ることがわかり、(4)および図3 (b) より E_{k1} の増加による中立面の KL_1 側への移動の傾向が見受けられ、この移動の傾向は、 E_{k1} の小さいところでは強く、大きいところでは弱い傾向を示すことがわかる。これらのことより、 R_d が増加し、 σ_{s1max} は減少する。また、 E_{k1} の増加による σ_{s2max} および σ_{k2max} の増加は E_{k1} の増加による中立面の KL_1 側への移動によって生じたものと考えられる。その後の減少は E_{k1} の増加によるこわさ R_d の増加によるものと考えられる。そして、(15)より、 E_{k1} の小さいところでは E_{k1} の増加による σ_{k1max} の比例的な増加傾向が見受けられ、 E_{k1} の大きいところでは R_d の寄与が大きくなるものと考えられる。このことより、 σ_{k1max} の増加は、 E_{k1} の小さいところでは E_{k1} に伴う比例的な増加傾向によって、 E_{k1} の大きいところでは R_d の寄与が働いたことによって生じたものと考えられる。

Fig.9 (a) Relations between σ_{s1max} , σ_{s2max} and E_{k1} .
(b) Relations between σ_{k1max} , σ_{k2max} and E_{k1} .

図10 (a), (b) に、 σ_{s1max} , σ_{s2max} および σ_{k1max} , σ_{k2max} と T_{k1} との関係を示す。同図より、 σ_{s1max} および σ_{k1max} は T_{k1} の増加によって減少することがわかる。そして、 σ_{s2max} および σ_{k2max} は、 T_{k1} の増加に伴う増加、減少を示し、この間に、 σ_{s2max} および σ_{k2max} の極大が生じる。

(18)~(23)により、 T_{k1} の増加によって(21)の I_{k1} の値の増加が生じ、これによるこわさ R_d の増加が生じ、この R_d の増加によって σ_{s1max} , σ_{s2max} および σ_{k1max} , σ_{k2max} の減少が生じるものと考えられ、同時に、中立面の位置は KL_1 側に移動し、 σ_{s2max} および σ_{k2max} の増加が T_{k1} の小さいところで生じることがわかる。このことより、 σ_{s1max} , σ_{s2max} , および σ_{k1max} , σ_{k2max} の減少は T_{k1} の増加に伴うこわさ R_d の値の増加によって生じ、 T_{k1} の増加に伴う σ_{s2max} および σ_{k2max} の増加は中立面の移行に基づく y_{s2} および y_{k2} の増加によ

Fig.10 (a) Relations between σ_{s1max} , σ_{s2max} and T_{k1} .
(b) Relations between σ_{k1max} , σ_{k2max} and T_{k1} .

って生じたものと考えられる。

段ボールの厚さ中央付近の KL_0 の厚さ T_{k0} の増加による σ_{s1max} , σ_{s2max} および σ_{k1max} , σ_{k2max} への影響、ならびに KL_0 の最大値 σ_{k0max} の変化を図 11 (a), (b) に示す。図より、 T_{k0} による σ_{s1max} , σ_{s2max} および σ_{k1max} , σ_{k2max} の変化が小さいことが、また、 σ_{k0max} の値が極めて小さいことがわかる。

(4)および(23)により、 T_{k0} の増加に伴う h_0 の変化および I_{k0} の増加によって、 T_{k0} に伴う σ_{s1max} および σ_{k1max} の減少が、そして σ_{s2max} および σ_{k2max} の増加、減少が伺える。また、 T_{k0} の増加に伴う σ_{k0max} の変化は、非常に小さなものではあるが、いろいろと変わることが伺える。(17)より、 σ_{k0max} の値は KL_0 の位置が段ボールの中央またはその付近にあることにより、当然のことながら中立面からの距離が小さなものとなり、その変化の絶対量も他の値に比べ小さくなるものと考えられる。

Fig.11 (a) Relations between σ_{s1max} , σ_{s2max} , σ_{k1max} , σ_{k2max} and T_{k0} .
(b) Relation between σ_{k0max} and T_{k0} .

以上述べたことより、素材に加わる最大応力 σ_{s1max} , σ_{s2max} および σ_{k1max} , σ_{k2max} の値が可能な限り小さくなるように、段ボールおよびその素材の形状を設定することが曲げを受ける段ボールに対し重要であるが、実際に用いられている段ボールの形状はこの点からいって必ずしも最適であるとはいえない。したがって、段ボールおよびその素材の形状寸法は強度状態に対して最適なものがあり、その決定は工学的観点から段ボールを考えると重要なことであると思われる。本報告は、曲げを受ける段ボールの中芯の形状寸法を強度的観点から決めるための一つの基礎資料となるものである。しかし、もちろん、段ボールは強度的観点からのみではなく、加工生産面、利用面、経済性からも論ずることが必要である。

4. 結 言

厚さ方向に非対称な強度分布をもつ段ボールが純曲げを受ける際の弾性強度解析を行い、純曲げにおける

各素材（中芯（上から順に, CM_1 , CM_2 ）およびクラフト・ライナー（上から順に KL_1 , KL_0 , KL_2 ））の曲げ強度（応力絶対値の最大値 σ_{s1max} , σ_{s2max} および σ_{k1max} , σ_{k0max} , σ_{k2max} ）と形状との関係を明らかにした。その結果, 次のようなことが得られた。

(1) 段ボールの下表面から中立面までの距離は, CM_1 の厚さ T_{s1} , 波高 h_1 および KL_1 の縦弾性係数 E_{k1} , 厚さ T_{k1} の増加に伴って大きく増加する。そして, その距離は, CM_1 の波長 L_1 の増加に伴って減少し, やがて一定値に近づく。

(2) KL および中芯の応力は, 中立面から着目位置までの距離に比例して増加する。 σ_{s1max} , σ_{s2max} および σ_{k1max} , σ_{k2max} は中立面から遠い側の表面に生じる。

(3) σ_{s1max} は, T_{s1} , E_{k1} , T_{k1} の増加に伴って顕著に, T_{k0} の増加に伴って緩やかに低下し, L_1 の増加に伴って増加する。また, σ_{s1max} は, h_1 の増加に伴って大きく増加, 減少をする。そして, この間に, h_1 の増加による σ_{s1max} の極大が生じる。 σ_{s2max} は, T_{s1} および h_1 の増加に伴って顕著に減少し, L_1 の増加に伴って増加する。また, E_{k1} , T_{k1} , T_{k0} の増加に伴って増加, 減少をする。そして, この間に, E_{k1} , T_{k1} , T_{k0} の増加による σ_{s2max} の極大が生じる。

(4) σ_{k1max} は T_{s1} , T_{k1} , T_{k0} の増加に伴って減少し, h_1 の増加によって, 増加, 減少をする。そして, この間に σ_{k1max} の極大が生じる。また, σ_{k1max} は, L_1 および E_{k1} の増加に伴って増加する。 σ_{k2max} は, T_{s1} および T_{k0} の増加に伴って減少するが, L_1 の増加に伴って増加する。また, σ_{k2max} は h_1 , E_{k1} および T_{k1} の増加に伴って大きく増加, 減少をする。そして, この間に, h_1 , E_{k1} および T_{k1} の増加による σ_{k2max} の極大が生じる。

(5) 両面段ボールは構成素材が豊富であるために, 相当複雑な強度特性を示す。したがって, 使用目的を配慮した適切な各素材の形状設定に対する選択性は多い。

厚さ方向に強度非対称な分布を示す複両面段ボールの曲げ強度において, KL_1 の変化に対する依存性は, 強くないが, 両面段ボールと同様な挙動を示す。しかし, 中芯 CM_1 の形状変化については両面段ボールと非常に異なった挙動を示す。このようなことから, 複両面段ボールの利用の際の構造上の選択性の有り方は, 両面段ボールに比べ非常に豊富であることがわかった。このことは, 段ボールの利用の面からみて特に意義あることであると思う。

本報告は段ボールの生産性への配慮を無視したもの

ではあるが, 段ボールの強度に関する形状の設定をより合理的に行う際の意義ある基礎資料になっているものと考えられる。

謝 辞

本報告をまとめる際, 図の製作について, 全面的なご協力を頂いた物性基礎工学講座技官 大塚昌司氏に感謝する。

参 考 文 献

- 1) たとえば, 段ボール実用百科編集委員会: 段ボール実用百科, 一律書房, 21 (1970); レンゴー株式会社: 段ボール技術, 包装新聞社, 16 (1971)
- 2) J. W. Koning Jr. and R. Stern: Tappi, 60 (12), 128 (1977)
- 3) G. G. Maltenfort: Tappi, 53 (11), 1076 (1970) P. Grartaganis: Tappi, 58 (11), 102 (1975) R. M. Morris Jr. and G. P. Vallow: Tappi, 58 (11), 110 (1975)
- 4) 松島成夫, 奥田隆宏, 宮内治, 野沢光治: 紙パ技協誌, 36 (3), 377 (1982)
- 5) 松島成夫, 矢野 忠, 松島 晟: 紙パ技協誌, 42 (5), 480 (1988)
- 6) 松島成夫, 矢野 忠, 松島 晟: 紙パ技協誌, 43 (6), 602 (1989)
- 7) 松島成夫, 矢野 忠, 松島 晟: 紙パ技協誌, 44 (5), 605 (1990)
- 8) S. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger: Theory of Plates and Shells, (McGraw-Hill), 366 (1959)
- 9) 松島成夫, 矢野 忠, 松島 晟, 横田俊昭: 紙パ技協誌, 45 (4), 480 (1991)
- 10) 松島成夫, 矢野 忠, 松島 晟, 横田俊昭: 紙パ技協誌, 46 (5), 668 (1992)
- 11) 松島成夫, 矢野 忠, 松島 理, 横田俊昭: 紙パ技協誌, 47 (4), 517 (1993)
- 12) 松島成夫, 矢野 忠, 松島 理: 紙パ技協誌, 48 (4), 600 (1994)
- 13) たとえば, 黒木剛司郎: 材料力学, 森北出版, 52 (1967)
- 14) たとえば, 白鳥英亮: 材料の力学, 朝倉書店, 95 (1973)
- 15) たとえば, 13) の p 130
- 16) たとえば, 13) の p 54
- 17) 1) の段ボール百科の p 126
- 18) 上野桂助: 紙の強度, 丸善, 240 (1973)

(受理: '94.12.25)