一様曲げ（流れ方向曲げ）を受ける 段ボールの弾性強度と形状（第 1 報） 両面同材のクラフトライナーをもつ両面段ボール

帝人製機株式会社松山工場 松島 理
愛媛大学工学部 松島 成夫

総作用モーメント一定の条件にしたがって、一様曲げ（流れ方向に直角な方向にモーメント軸をもつもの）を受ける同材 KL の両面段ボールの弾性解析表示を導出し、その弾性応力解析をおこなった。ただし、中芯の形状は正弦波形をなすものとした。

その結果、総モーメントの一定性は、クラフト・ライナー（KL）および中芯の流れ方向の変位が零である条件と同等なものであることが明らかになった。

そして、さらに、その解析表示によって、応力および強度と形状、縦弾性係数 E_k との関係およびその要因を総括的に、詳細に議論した。

それによって、得られた結果は以下のようなことである。(1)弾性係数および形状によらず、各 KL の固定モーメント（KL・中芯接合部のモーメント）は、ほぼ一定で、その値は総モーメントの約 1/2 である。(2)両面段ボール中芯の応力の絶対値の最大値 $\sigma_{\max}$ は KL・中芯結合部の内表面にある。そして、 $\sigma_{\max}$ の位置および値は中芯の最小曲率半径の位置および値に強く結び付いている。(3)接合部の中芯の固定モーメントは中芯の厚さおよび波長の増加に伴って増加し、中芯の波高、KL の厚さおよび E_k の増加に伴って減少する。形状変化に伴う $\sigma_{\max}$ の変化の概略は、KL・中芯接合部の中芯の曲げモーメント M_{s0} の変化に類似している。

両面同材の KL をもつ両面段ボールの流れ方向曲げ強度は、KL によって支えられていることがわかる。しかし、中芯の曲げモーメントおよび曲げ応力の絶対値は KL の値に比べると 1/10 程度に小さいが、中芯は、構造上、段ボールの厚さ方向の両 KL の間隔保持にのための貴重な役割をなしている。

(本文 65 ページ)

一様曲げ（流れ方向曲げ）を受ける段ボールの弾性強度と形状（第1報） 両面同材のクラフト・ライナーをもつ両面段ボール

帝人製機株式会社松山工場 松 島 理
愛媛大学工学部 松 島 成 夫

Relation between Elastic Strength and Shape for Corrugated Fiberboard under Uniform Bending in Perpendicular Moment Axis to Machine Direction (I) On Single Wall Corrugated Fiberboard made of Same Surface Kraftliner

Satoru Matsushima

Teijin Seiki Corporation, Matsuyama

Shigeo Matsushima

Faculty of Engineering, Ehime University

松島 理

松島成夫

Considering to the condition of the constant total applied moment, the method of the elastic analysis was studied for SWCF (single wall corrugated fiberboard) made of the same surfaces KL (kraft liner) under the uniform bending in the perpendicular moment axis to MD (machine direction), and the stress analyses were performed by this method. And relation between the stress distribution, the SWCF shape and the longitudinal elastic modulus E_k was discussed in detail.

Then following results are obtained. (1) The maximum $\sigma_{\max}$ of the absolute value of the bending stress for SM (semichemical corrugating medium) of SWCF is at the jointing positions on the inner surfaces. And the position and the value of the maximum value $\sigma_{\max}$ depend on the position and the value of the minimum of the curvature of the radius for SM. (2) The fixed moment M_{s0} of SM at the joint increases with the thickness and the wavelength, and decreases with increases of the waveheight, the KL thickness and the elastic modulus E_k . The change behavior of the maximum value $\sigma_{\max}$ for the shape is nearly similar to the behavior of the bending moment M_{s0} of SM.

Keywords : Computational Mechanics, Structural Analysis, Elastic, Bending, Strength of Corrugated Fiberboard, Elastic Stress Analysis, Structure Strength, Numerical Analysis

1. 緒 言

段ボール¹⁾²⁾は、形状、生産性から見て有用性の高いものであり、包装材、構造材として盛んに用いられ、波底を固定した波形鋼板、スレート材および樹脂材の波板が類似したものとして利用されている。特殊なものとして、航空機体（筒形段ボール状）についての研究³⁾がある。したがって、段ボールのクラフト・ライナー（以下KLと略）および中芯（SCP medium）について力学的強度を明らかにすることは包装部材設計の立場上、段ボールの強度算定上重要なことである。同時に、構造学上からも意義あるものと考えらる。

既に、段ボール⁴⁾⁵⁾および段ボール箱^{6)~8)}の強度等に関する実用的研究があり、最近段ボールの反り⁹⁾に関する研究がある。基礎的研究として、幾何学的条件を基にした段ボールの引張り変形強度機構についてのものがある¹⁰⁾。弾性変形についての基礎研究は、波板の曲げ剛性に関するもの¹¹⁾があり、筆者らの面圧を受ける段ボール中芯の内部応力等に関するもの¹²⁾、段ボール中芯と波板との内部応力¹³⁾および変位¹⁴⁾の相違等に関するものがある。さらに、曲げモーメント軸が流れ方向（フルートの流れ方向）にある際の片面¹⁵⁾、両面¹⁶⁾および複両面¹⁷⁾段ボールの弾性曲げ強度に関するものがある。曲げモーメント軸が流れ方向に対し直角な向きにある際の曲げ（流れ方向曲げ）強度に関する基礎的な研究については、両表面KLが同材¹⁸⁾または異材¹⁹⁾よりなる両面段ボールについての応力解析法が導かれ、その成果として素材の応力状態についての概略的な議論がなされているものがある。

流れ方向曲げは、段ボール板の基本的な変形の一つであるが、段ボールがKLおよび中芯の組合わせであるために、変形条件が非常に複雑になる。そこで、上記の両表面KLが同材よりなる両面段ボールの解析法¹⁸⁾はKLおよび中芯の段ボール厚さ方向の変位およびたわみ角の変化が共に等しいものとし、また、両表面KLが異材よりなる両面段ボール¹⁹⁾の解析法はKLおよび中芯の流れ方向の変位およびたわみ角が共に等しいものと考え、応力の算定を試みたものである。しかし、変形条件は接合部間の変形状況ばかりではなく、力学的な配慮からみた基本的な条件として、まず全モーメントの一定性の必要性が取上げるべきものであると考えられる。したがって、これらの配慮¹⁸⁾¹⁹⁾と一つの力学的観点、すなわち全てモーメントの一定性を考慮した応力の算定法を導出し、それによる応力状況の議論をおこなうことは工学上重要なことであると考えられる。そして、両面同材のKL

をもつ両面段ボールは、形態上、段ボールの中で最も基本的なものである。両面段ボールが市場において盛んに用いられている現状を考慮すること、このような段ボールの流れ方向の曲げ強度と形状および材質との関係を総括的に、より詳細に明らかにすることは、工学上、意義あるものと考えられる。

以上のことより、本報では、前報¹⁶⁾¹⁹⁾の処方にならない、中芯の形状を近似的に正弦波形のものとみなし、段ボールの構成素材（KL、中芯）を弾性体であるとして、全モーメントの一定性の条件を配慮し、KL、中芯の接合部間に生じるKLおよび中芯の総変形（すなわち、流れ方向の変位およびたわみ角）が等しいものとした際の同材の両面KLからなる両面段ボールの流れ方向一様曲げの応力算定法の検討、導出をおこない、それによって応力および強度の状況と形状および縦弾性係数との関係およびその要因を総括的に、且つ詳細に議論し、両面段ボールの応力強度の形状および弾性係数に関する特性を明らかにすることを試みた。

2. 解析方法

両面段ボールの中芯は波状をなす一つの曲面をし、KL糊付け加工の際、糊付け部付近のKLおよび中芯の材質および形状は相当複雑に変化しているものと考えられるが、便宜上、前報の際と同様¹²⁾¹³⁾¹⁸⁾¹⁹⁾、材質は一様であり、Seydelの処方¹¹⁾にならない、中芯の形状を正弦波形であるとする（図1(a)参照）。

そして、流れ方向（加工方向）に直角な曲げモーメント軸をもつ段ボールの曲げは、無限幅段ボールの変形とみなせ、近似的に、平面ひずみ変形であると考えられ、一方、平面ひずみの応力分布状況は平面応力のものと類似するものとされている²⁰⁾。そこで、単位幅段ボール板の流れ方向曲げの変形を単位幅のはりと同様なものとであると考えると、前報¹²⁾¹³⁾¹⁶⁾¹⁹⁾にならってKLは真直はり、中芯は曲りはりであると考え、議論を進める。

そこで、段ボールおよび中芯の厚さの中心を原点Oにとり、Oを通る流れ方向および段ボールの厚さ方向をxおよびy軸の方向におき、中芯のシート厚さ T_s の中央の位置 y_0 を

$$y_0 = \frac{h}{2} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \quad \cdots \cdots (1)$$

で表す。すると、 y_0 から厚さ方向に距離 t のところにある着目位置 $y(x, t)$ は

$$y = y_0 + t \cos \theta \quad \cdots \cdots (2)$$

で表される。 h は波形の高さ、 L は波形の長さ（波長）であり（図1(b)参照）、 θ は中芯の接線 dy_0/dx

Fig.1 Bending pattern and a fundamental element of SWCF.

(a) Uniform bending in machine direction. The rotation axis of the bending moment (per unit wavelength) M_T is along the corrugation.

(b) Shape of KL and SM. Here, x and y are axes of MD and thickness direction for SWCF. T_s , L and h are thickness, wavelength, and waveheight for SM, respectively, and T_k thickness of KL 1 and KL 2.

dx と x 方向とのなす角度である。

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{dy_0}{dx} \right) \quad \dots\dots(3)$$

中芯は、波形の波長 L の距離では曲りはりと同様な変形をし、長い域 ($x \gg L$) では、間隔 L の繰返し形状をなすことにより、近似的に接合部においては真直はりと同様な変形をするものとする。また、中芯の周期性および対称性により、中芯の変形は、接合部の接線の角が真直はりと同様な変化を示す曲りはりと同様なものであると考える。

前報¹⁸⁾と同様に、段ボールに単位幅当たりのモー

メント M_T が働く際、KL・中芯接合部 ($x=L/4$, $-L/4$) において、単位幅当たりの両 KL (KL 1 および KL 2) には、各固定モーメント M_{k01} , M_{k02} が、単位幅当たりの荷重すなわち x 方向の荷重 W_{kx1} , W_{kx2} , y 方向の荷重 W_{ky1} , W_{ky2} が各生じ、接合部の中芯には、固定モーメント M_{s0} , M_{s0}' が、 x , y 方向の荷重 W_{sx} , W_{sy} が生じるものと考えられる (図 2 参照)。また、段ボールの接合部における形状の対称性、段ボール単位幅当たりに働くモーメント M_T の一定性により、接合部の変形は x 方向に對し対称的であると考えられ、接合部のせん断力は零であるとする。

$x=L/4$ の接合位置を基点とした際、接合部では W_{kx} , W_{ky} および W_{sx} , W_{sy} のモーメントへの寄与が零となり、モーメントの釣合条件により、 $x=L/4$ では M_T は

$$M_T = M_{k01} + M_{k02} + M_{s0} + W_{ky}L/2 \quad \dots\dots(4)$$

また力の釣合条件より縦横荷重 W_{sx} および W_{sy} は各

$$W_{sx} = W_{kx1} = W_{kx2} \quad \dots\dots(5-1)$$

$$W_{sy} = W_{ky1} = W_{ky2} \quad \dots\dots(5-2)$$

で表される。

Fig.2 Action of KL・SM joint.

W_{kx1} and W_{ky1} and W_{sx} and W_{sy} are applied loads of KL1 and SM to x and y directions at $x=L/4$, and W_{kx2} and W_{ky2} are applied load of KL2 at $x=-L/4$. M_{k02} are fixed moments of KL1 at $x=L/4$ and KL2 at $x=-L/4$, and M_{s0} and M_{s0}' are fixed moments of SM at $x=L/4$ and $-L/4$.

2.1 中芯について

モーメント M_s が働く際の位置 x , t における中芯の曲げ応力 σ_s は, 曲りはり²¹⁾²²⁾の式によって

$$\sigma_s = \frac{N}{T_s} + \left(\frac{M_s}{T_s \rho} \right) \left[1 + \frac{1}{K} \left(\frac{t}{\rho + t} \right) \right] \quad \cdots \cdots (6-1)$$

で表せる。ただし, K および ρ は, 曲りはり (すなわち中芯) の断面係数および曲率半径

$$K = \frac{1}{3} \left(\frac{T_s}{2\rho} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{T_s}{2\rho} \right)^4 + \frac{1}{7} \left(\frac{T_s}{2\rho} \right)^6 + \cdots \quad \cdots \cdots (6-2)$$

$$\rho = - \frac{\left[1 + \left(\frac{dy_0}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{d^2 y_0}{dx^2} \right)} \quad \cdots \cdots (6-3)$$

である。そして, N は厚さ中央部に沿っての軸力

$$N = -W_{sy} \sin \theta - W_{sx} \cos \theta \quad \cdots \cdots (7-1)$$

M_s は中芯に働く曲げモーメント

$$M_s = M_{s0} - W_{sx} \left(\frac{h}{2} - y_0 \right) + W_{sy} \left(\frac{L}{4} - x \right) \quad \cdots \cdots (7-2)$$

である。

中芯の x , y 方向の変位 δ_{sx} , δ_{sy} およびたわみ角 i_s は, 曲りはりに関する既知の式により

$$\delta_{sx} = \frac{-1}{T_s E_s} \int_{-L/4}^{L/4} \left[N + \frac{M_s (1+K)}{K\rho} \right] \left(\frac{h}{2} - y_0 \right) d\theta \quad \cdots \cdots (8-1)$$

$$\delta_{sy} = \frac{1}{T_s E_s} \int_{-L/4}^{L/4} \left[N + \frac{M_s (1+K)}{K\rho} \right] \left(\frac{L}{4} - x \right) d\theta \quad \cdots \cdots (8-2)$$

$$i_s = \frac{-1}{T_s E_s} \int_{-L/4}^{L/4} \left[N + \frac{M_s (1+K)}{K\rho} \right] d\theta \quad \cdots \cdots (8-3)$$

で表される²³⁾。ただし, E_s は中芯の縦弾性係数である。

2.2 KL について

M_T が働く際, KL 1 および KL 2 のモーメント M_{k1} , M_{k2} は, M_{k01} , M_{k02} と W_{sy} によるモーメントとの和

$$M_{k1} = M_{k01} - W_{sy} X_1 \quad \cdots \cdots (9-1)$$

$$M_{k2} = M_{k02} + W_{sy} X_2 \quad \cdots \cdots (9-2)$$

で表される。 X_1 および X_2 は KL 1 および KL 2 における各接合部からの x 方向の距離である。両 KL に生じる曲げ応力 σ_{k1} , σ_{k2} は各

$$\sigma_{k1} = \frac{M_{k1}}{I_{k1}} Y + \frac{W_{kx1}}{T_k} \quad \cdots \cdots (10-1)$$

$$\sigma_{k2} = \frac{M_{k2}}{I_{k2}} Y + \frac{W_{kx2}}{T_k} \quad \cdots \cdots (10-2)$$

で表される¹⁸⁾¹⁹⁾。ただし, T_k は KL の厚さ, Y は中

立面から KL 内の着目点までの距離であり, I_{k1} , I_{k2} は両 KL の断面 2 次モーメント

$$I_{k1} = \frac{T_k^3}{12} + \left(Y_0 - \frac{T_k}{2} \right)^2 T_k \quad \cdots \cdots (11-1)$$

$$I_{k2} = \frac{T_k^3}{12} + \left(T_T - Y_0 - \frac{T_k}{2} \right)^2 T_k \quad \cdots \cdots (11-2)$$

である。 Y_0 は中立面から KL 1 の外表面までの距離, T_T は段ボール全体の厚さ

$$T_T = T_s + 2 T_k + h$$

である。

$X_1 = 0 \sim L/2$, $X_2 = 0 \sim L/2$ 間における x 方向および y 方向の変位 (厚さ中央の値) δ_{kx1} , δ_{kx2} (のび) および δ_{ky1} , δ_{ky2} (たわみ) は各

$$\delta_{kx1} = \frac{1}{E_k} \int_{-L/4}^{L/4} \sigma_{k1} \left(Y = Y_0 - \frac{T_k}{2} \right) dx \quad \cdots \cdots (12-1)$$

$$\delta_{k2} = \frac{1}{E_k} \int_{-L/4}^{L/4} \sigma_{k2} \left(Y = T_T + Y_0 + \frac{T_k}{2} \right) dx \quad \cdots \cdots (12-2)$$

$$\delta_{ky1} = \frac{-L^2}{8E_k I_{k1}} \left(M_{k01} - \frac{W_{sy} L}{3} \right) \quad \cdots \cdots (13-1)$$

$$\delta_{ky2} = \frac{-L^2}{8E_k I_{k2}} \left(M_{k02} - \frac{W_{sy} L}{3} \right) \quad \cdots \cdots (13-2)$$

また, たわみ角 i_{k1} および i_{k2} は

$$i_{k1} = \frac{-L}{E_k I_{k1}} \left(\frac{M_{k01}}{2} - \frac{W_{sy} L}{8} \right) \quad \cdots \cdots (14-1)$$

$$i_{k2} = \frac{-L}{E_k I_{k2}} \left(\frac{M_{k02}}{2} - \frac{W_{sy} L}{8} \right) \quad \cdots \cdots (14-2)$$

で表される¹⁸⁾¹⁹⁾。ただし, E_k は縦弾性係数である。

3. 未知数の決定について

各素材に働く曲げモーメント M_{k01} , M_{s0} , 荷重 W_{sx} の値および中立面の位置を示す値 Y_0 などの不明な値の決定は以下のようにしておこなう。

KL・中芯接合部の KL の流れ方向の傾き i_{k1} , i_{k2} および i_s の連続性および流れ方向に沿っての左右対称性, ならびに, 幾何学条件により, KL・中芯接合部 $x_1 = 0 \sim L/2$, $x_2 = 0 \sim L/2$ 間に生じる δ_{ky1} , δ_{ky2} および i_{k1} , i_{k2} は, 各

$$\delta_{ky1} = \delta_{ky2} \quad i_{k1} = i_{k2} \quad \cdots \cdots (15)$$

(13-1) ~ (14-2) より, W_{sy} は

$$W_{sy} = 0 \quad \cdots \cdots (5-3)$$

で表され¹⁸⁾¹⁹⁾, (4), (5-3), (14-1), (14-2), (15)より, 関係

$$M_{k01}/I_{k1} = M_{k02}/I_{k2} \quad \cdots \cdots (16-1)$$

$$M_{k01} = I_{k1} (M_T / -M_{s0}) / (I_{k1} + I_{k2}) \quad \cdots \cdots (16-2)$$

が成立つことがわかる。

そして、全モーメント一定性(4)、(5-3) および M_s の関係 (7-2) により、 M_s の値は、常に一定で、

$$M_s = M_{s0} = M_{s0}' \quad \cdots \cdots (17)$$

となり、(5-3)、(7-2) より W_{sx} は

$$W_{sx} = 0 \quad \cdots \cdots (5-4)$$

であるものと考えられる。

中芯は正弦波的に曲がった形状をし、接合部における x 方向の軸力は KL の引張り力に比べ非常に小さい値であるものと考えられ、段ボールの引張り強度に関する結果¹⁰⁾ も、中芯の x 方向の伸びの強度への寄与は、KL に比べ、非常に小さいことを示している。このことから、 x 方向の釣合い条件は、(10-1)、(10-2) によって

$$\int_{Y_0-T_k}^{Y_0} \sigma_{k1} dy + \int_{-T_1+Y_0}^{-T_1+Y_0+T_1} \sigma_{k2} dy = 0 \quad \cdots \cdots (18)$$

であると考え、(11-1)、(11-2) より Y_0 は

$$Y_0 = T_T/2 \quad \cdots \cdots (19-1)$$

$$I_{k1} = I_{k2} \quad \cdots \cdots (19-2)$$

で表せる。そして、 σ_{k1} および σ_{k2} は、近似的に

$$\sigma_{k1} = -\sigma_{k2} \quad \cdots \cdots (19-3)$$

であることがわかる。

段ボールの幾何学的変形条件により、 $x = -L/4 \sim 0$ 間の KL_2 の変位と $x = 0 \sim L/4$ の KL_1 の変位との和すなわち接合部間の変位 δ_{kx}

$$\delta_{kx} = L (\sigma_{k1} + \sigma_{k2}) / (4E_k) \quad \cdots \cdots (20)$$

は δ_{sx} に等しく、(19-3) より

$$\delta_{kx} = \delta_{sx} = 0 \quad \cdots \cdots (21)$$

である。すなわち、 M_T = 一定の条件と(21)の条件が同一関係であることを表している。したがって、(8-1)、(20)を用いて M_{s0} を求めることは困難である。

そこで、他の関係すなわち接合部のたわみ角の関係

$$i_{k1} = i_s$$

を用いると、(4)、(8-3)、(14-1) により関係

$$A_1 M_{s0} + B_1 = 0$$

が得られ、 M_{s0} は

$$M_{s0} = -B_1/A_1 \quad \cdots \cdots (22)$$

で表されることがわかる。ただし、 A_1 、 B_1 は各

$$A_1 = \frac{1}{E_s T_s} \int_{-L/4}^{L/4} B_0 d\theta + \frac{L}{4E_k I_{k1}}$$

$$B_0(\theta) = \frac{1+K}{\rho K}$$

$$B_1 = L M_T / (4E_k I_{k1})$$

である。そして、この結果は、上下の KL を同材にした際の前報（異材の上下 KL）¹⁹⁾ のものと同値を示すことがわかる。

KL については、(11-1)、(11-2) より I_{k1} 、 I_{k2} の値

がわかり、(22)より M_{s0} 、(4)より M_{k1} 、 M_{k2} の値がわかれば、(10-1)、(10-2) より各 KL の応力 σ_{k1} 、 σ_{k2} の値を明らかにすることができる。

また、中芯については、(22)より M_{s0} の値がわかり、(6-1) によって σ_s の値を求めることができる。

4. 結果と考察

弾性係数によって、 M_{s0} は(22)より大きく変化し、 σ_s も (6-1)、(7-2) によって大きく変化することがわかる。段ボール原紙についての KL の弾性係数²⁴⁾は縦方向が 6.28×10^4 N/mm²、横方向が 2.42×10^3 N/mm²、中芯²⁵⁾は縦方向が $2.2 \sim 2.9 \times 10^3$ N/mm²、横方向が $1.1 \sim 1.3 \times 10^4$ N/mm² であることが示されている。そこで、便宜上、 $E_s = E_k = 1$ (N/m²) と単位化し、 M_T も単位化し、 $M_T = 1$ (μ N) とし議論する。なお、実際に用いられている段ボールの形状²⁶⁾に合わせ、 $T_s = 0.24$ mm、 0.36 mm、 $L = 9.2$ mm、 $h = 4.6$ mm、 $T_k = 0.30$ mm (KL²⁷⁾ と中芯²⁵⁾ との坪量で近似的な比例換算) のものを中心に段ボールの応力状況を議論する。

特定の段ボール形状の M_{k01} 、 M_{s0} の値および KL、中芯の応力絶対値の最大値 σ_{kmax} 、 σ_{smax} などを求めた。その結果¹⁸⁾¹⁹⁾、前報と同様に、 M_{k01} は、形状および E_k 、 E_s によらず、

$$M_{k01} = 0.49 \sim 0.50 \mu\text{N}$$

で示すことができ、容易に σ_k の値は (10-1)、(10-2) より求められる。しかし、 M_{s0} の値は M_{k0} に比べ非常に小さいが、 σ_s の値は KL の 1/10 程度であり、(6-1) より $\rho \approx T_s/2$ の際 $t = -T_s/2$ で $|\sigma_s| \approx \infty$ が生じることがわかる。しかし、 ρ の変形への寄与は強いが、 σ_s の M_s 比例の表示から中芯の曲げ応力の M_s による形状変化への寄与は広い域に渡って強く、その変化の主な因は M_{s0} であるものと考えられる。そして、 $|\sigma_s|$ の最大値は中芯の ρ 最小値¹²⁾を示す KL・中芯接合部の内表面にあることが示された。

したがって、まず σ_s を求めるに必要な M_{s0} と形状および縦弾性係数との関係を議論し、次に σ_s および σ_{smax} とそれらの値との関係を議論する。

4.1 M_{s0} について

M_{s0} と T_s との関係を求め、その関係を示したものが図3である。図より、 M_{s0} は T_s の増加に伴って顕著に増加し、その増加の傾向も増加することがわかる。

T_s の増加に伴い、(6-1) より、中芯の曲げ変形強度は σ_s の低下傾向によって大きく増加するものと考えられるが、段ボール形態に基づく変形を考慮すると、容易な形状変化を示す中芯への変形寄与は強く生じる

Fig. 3 Relation between M_{s0} (fixed moment for semichemical corrugating medium) and T_s (Thickness of semichemical corrugating medium).

Fig. 4 Relation between M_{s0} (fixed moment for semichemical corrugating medium) and L (Wavelength of semichemical corrugating medium).

ものと考えられる。このことより、 T_s の増加による M_{s0} の増加およびその挙動は、段ボールの変形制限による強い中芯への変形寄与に基づくものと考えられる。

M_{s0} と L との関係を求め、それを図4に示す。図より、 M_{s0} は L の増加に伴って大きく増加するが、その増加傾向は減少することがわかる。

(8-3) および (14-1) より、 KL および中芯は、 L の増加によって i_{k1} および i_s が大きく増加するものと考えられる。したがって、この L の増加による M_{s0} の増加およびこの増加傾向は、 L 増加に伴う KL および中芯の顕著な変形増加によって生じるものと考えられる。

M_{s0} と h との関係を求め、それを図5に示す。図より、 M_{s0} は h の増加に伴って大きく減少することがわかる。

(10-1) および (11-1) により、 h の増加に伴い I_{k1} 、 I_{k2} の顕著な増加が生じ、それによって段ボールの強い変形抵抗の増加が現れるものと考えられる。したがって、この h の増加による M_{s0} の減少は、主に、 h 増加に伴う I_{k1} 、 I_{k2} の増加による大きな変形抵抗増加に基づくものであると考えられる。

M_{s0} と E_k および T_k との関係を求め、それらを図6および図7に示す。図より、 M_{s0} は E_k および T_k の増加に伴い大きく減少することがわかる。

(11-1)、(14-1) により、 E_k および T_k の増加による KL のこわさ ($E_k I_{k1}$ 、 $E_k I_{k2}$) の増加によって、

Fig. 5 Relation between M_{s0} (fixed moment for semichemical corrugating medium) and h (Waveheight of semichemical corrugating medium).

段ボールの強い変形抵抗の増加が生じるものと考えられる。したがって、この E_k および T_k の増加による M_{s0} の減少は、主に、 E_k および T_k の増加に伴う段ボールのこわさの強い増加によって生じたものと考えら

れる。

4.2 σ_s の状態について

そこで、(6-1) によって σ_{s0} と x および t との関係
を求めると、図8 (a), (b) のようになる。図より、
 $x = -L/4 \sim L/4$ では、 $t = -T_s/2$ および $T_s/2$ のもの

は σ_s は各負値および正值で、 x の増加に伴って共に
単調減少に、正弦的に増加、減少が、順次加わるよう
に生じる傾向があり、 T_s が大きくなるとその増減変
化の傾向は強く現れることがわかる。そして、KL・
中芯接合部 ($x = \pm L/4$) の中芯内表面に $|\sigma_s|$ の最大

Fig.6 Relation between M_{s0} (Fixed moment for semichemical corrugating medium) and E_k (Modulus of longitudinal elasticity for kraftliner).

Fig.7 Relation between M_{s0} (Fixed moment for semichemical corrugating medium) and T_k (Thickness of kraftliner).

Fig.8 Relations between σ_s (Bending stress of semichemical corrugating medium), x (Position of machine direction) and t (Position of thickness direction of semichemical corrugating medium).

(a) Relation between σ_s and x .

(b) Relation between σ_s and t/T_s .

値が生じる。また、 t の増加にほぼ比例して σ_s は増加することがわかる。このことより、上述のように、 $|\sigma_s|$ の最大値は接合部の内表面にあることがわかる。

(1)および(6-1)~(6-3)より、このような σ_s の変化は x の変化に伴う M_s の変化の寄与に、 x に伴う ρ の変化の寄与が加わったことによるものと考えられ、 $x = \pm L/4$ での $|\sigma_s|$ の最大値の発生は ρ が最小になることによるものと考えられる。そして、 t によるほぼ比例的な変化は(6-1)の t の比例項が強く影響していることにあるものと考えられる。

4.3 σ_{smax} について

また、 $|\sigma_s|$ の最大値 σ_{smax} と T_s の関係を求めた。それを図9に示す。図より、 σ_{smax} は T_s の増加に伴ってほぼ比例的に増加することがわかる。しかし、その増加傾向は T_s の増加に伴って幾分緩やかになる。

上述の T_s の増加に伴う M_{s0} の顕著な増加および(6-1)の σ_s と M_{s0} との比例関係表示により、 T_s の増加に伴う σ_{smax} の増加は、 T_s の増加に伴う M_{s0} の顕著な増加によるものと考えられる。

σ_{smax} と L の関係を求め、それを図10に示す。図より、 $T_s/2 < \rho$ では σ_{smax} は有限であるが、 L の増加に伴って σ_{smax} は、(6-1)から考えられるように $t = -\rho$ に生じる無限大からの強い減少を示すが、やがて強い増加を示し、順次その増加傾向は小さくなること

Fig. 9 Relation between σ_{smax} (Absolute maximum value of bending stress of semichemical corrugating medium) and T_s (Thickness of semichemical corrugating medium).

Fig. 10 Relation between σ_{smax} (Absolute maximum value of bending stress of semichemical corrugating medium) and L (Wavelength of semichemical corrugating medium).

がわかる。

T_s の増加の際と同様に、 L の増加に伴う σ_{smax} の強い増加は、 L の増加に伴う M_{s0} の強い増加に基づくものであると考えられる。

σ_{smax} と h との関係を求め、それを図11に示す。図より、 σ_{smax} は h の増加に伴って大きく減少することがわかる。

T_s および L の増加の際と同様に、 $T_s/2 < \rho$ の際の h の増加に伴う σ_{smax} の強い減少は、 h の増加に伴う M_{s0} の強い減少によるものと考えられる。

σ_{smax} と T_k および E_k の関係を求め、それらの関係を図12、図13に示す。図より、 σ_{smax} は、 T_k および E_k の増加に伴って大きく減少することがわかる。

h の増加の際と同様に、 T_k および E_k の増加に伴う σ_{smax} の強い減少は、 T_k および E_k の増加に伴う M_{s0} の強い減少によるものと考えられる。

また、同図より、 T_k および E_k の変化 ΔT_k および ΔE_k が $\Delta T_k/T_k = \Delta E_k/E_k$ となる際の中芯の両応力の値の変化は、ほぼ等しい値になることがわかる。

本結果をみると、各形状の σ_{smax} の値は(10-1)より求めた σ_{kmax} の値の1/10程度であることがわかる。このことより、曲げ変形時の強度を担う素材はKLであるものと考えられる。しかし、形状による応力変化の比率は、中芯の方が非常に大きい。

Fig. 11 Relation between σ_{smax} (Absolute maximum value of bending stress of semichemical corrugating medium) and h (Wave-height of semichemical corrugating medium).

Fig. 13 Relation between σ_{smax} (Absolute maximum value of bending stress of semichemical corrugating medium) and T_k (Thickness of kraftliner).

Fig. 12 Relation between σ_{smax} (Absolute maximum value of bending stress of semichemical corrugating medium) and E_k (Modulus of longitudinal elasticity of kraftliner).

また、本結果の σ_{kmax} および σ_{smax} は前報¹⁹⁾ の上下同材の KL の際のものより 0.6% および 6% 程度大きくなるが、前報ではモーメントが近似的に一定 (M_T

≈ 1) とおいたものであり、本報告ではモーメント一定 ($M_T=1$) の適合性が十分に満たされたものである。したがって、本結果は、段ボールの曲げ強度の基本的議論に対し重要な指針を示すものであると考えられる。

4. 結 言

全モーメント＝一定の条件を基にして同材両面 KL (クラフトライナー) の両面段ボールの一樣曲げ（モーメント軸が流れ方向に直角な向き）についての応力算定法を導出した。

そして、総モーメントの一定性は、KL および中芯の流れ方向の変位零の条件と同等なものであることが示された。

この算定法によって各素材 (KL および中芯) の弾性曲げ応力を求め、応力および強度の状況と形状および弾性係数との関係およびその要因を議論した。その結果、次のようなことがわかった。

(1) KL・中芯接合部の KL に働く固定モーメント M_{k01} の値は、素材の形状および弾性係数の値によらずほぼ全モーメント値の 1/2 である。

(2) 両面段ボールの中芯の曲げ応力の絶対値の最大値 σ_{smax} は、KL・中芯接合部の内側表面に生じる。この最大の発生は、その位置の曲率最大値の発生に基づくものである。

(3) KL・中芯接合部に生じる M_{s0} は、中芯の厚さ T_s および波長 L の増加に伴って増加し、中芯の波高 h および KL の縦弾性係数 E_k 、厚さ T_k の増加によって減少する。

(4) M_{s0} の際と同様に、 σ_{smax} は、 T_s および L の増加に伴って増加し、 h および E_k 、 T_k の増加によって減少する。

(5) 段ボールの形状および縦弾性係数の変化に伴う σ_{smax} の変化は M_{s0} の変化と類似している。この類似関係は、 σ_s 表示の M_{s0} 比例項の強い寄与によるものである。

(6) T_k および E_k の変化 ΔT_k および ΔE_k の比 ($\Delta T_k/T_k$) と ($\Delta E_k/E_k$) とが等しい際、中芯の応力分布の状態はほぼ等しい。

以上のことより、両面同材の KL をもつ両面段ボールの流れ方向曲げ強度は、主として、KL によって支えられていることがわかる。しかし、中芯の曲げモーメントおよび曲げ応力の絶対値は KL の値に比べると 1/10 程度に小さいが、中芯は、構造上、段ボールの厚さ方向の両 KL の間隔保持のための貴重な役割を担い、段ボールの有効な強度形態を保つための重要な役割を果たしていることがわかる。そして、 $T_k = 0.3 \text{ mm}$ 、 $h = 4.6 \text{ mm}$ の段ボールに曲げモーメントが働く際、KL のみの曲げ最大応力と本段ボール KL の最大応力との比は近似的に $6(h/T_k) \cong 10^2$ となる。このことより、段ボール構造の曲げ強度への有効性がわかる。以上のことにより、本報告は、加工時に生じる構成素材の強度不斉性などを考慮したものではないが、合理的に変形に関する強度形状の設定を行うに当たっての意義ある基礎資料となり、まだ段ボール強度設計工学上意義あるものと考えられる。

参 考 文 献

- たとえば、段ボール実用百科編集委員会：段ボール実用百科、一律書房、21 (1970)
- レンゴー株式会社：段ボール技術、包装新聞社、16 (1971)
- たとえば、渋谷：航空学会誌、7 (61)、393 (1940)；8 (71)、267 (1941)；林：航空学会誌、8 (79)、1131 (1941)
- たとえば、1) の P.537；2) の P.310
- J.W. Koning Jr. and R. Stern：Tappi, 60 (12)、128 (1977)
- たとえば、1) の P.548；2) の P.316
- たとえば、紙業タイムス社：新・紙加工便覧紙業タイムス社、797 (1980)
- G.G. Maltenfort：Tappi, 53 (11)、1076 (1970)；P. Grartaganis：Tappi, 58 (11)、102 (1975)；R.M. Morris Jr. and G.P. Vallow：Tappi, 58 (11)、110 (1975)
- 石渕 浩、木村 稔、吉沢昭宣、佐久田博司、由谷 豊：日本機械学会論文集、59 A (557)、156 (1993)
- 松島成夫、奥田隆宏、宮内 治、野沢光治：紙パ技協誌、36 (3)、377 (1982)
- S.P. Timoshenko and S. Woinowsky Krieger：Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill Co., 366 (1959)
- 松島成夫、矢野 忠、松島 晟：紙パ技協誌、43 (6)、602 (1989)
- 松島成夫、矢野 忠、松島 晟：紙パ技協誌、42 (5)、480 (1988)
- 松島成夫、矢野 忠、松島 晟：紙パ技協誌、44 (5)、605 (1990)
- 松島成夫、矢野 忠、松島 理、横田俊昭、紙パ技協誌、47 (4)、517 (1993)
- 松島成夫、矢野 忠、松島 晟、横田俊昭：紙パ技協誌、45 (4)、480 (1991)
- 松島成夫、矢野 忠、松島 晟、横田俊昭：紙パ技協誌、46 (5)、668 (1992)
- 松島 理、松島成夫：日本機械学会論文集、A 60 (576)、1814 (1994)
- 松島 理、松島成夫：日本機械学会論文集、A 61 (587)、1601 (1995)
- たとえば、清家政一郎：材料力学、共立出版、23 (1978)
- たとえば、白鳥英亮：材料の力学、朝倉書店、95 (1973)
- たとえば、黒木剛司郎：材料力学、森北出版、150 (1967)
- たとえば、21) の P.98
- Alean. R. Jones：Tappi, 51 (5)、203 (1968)
- 1) の P.126
- 1) の P.64
- たとえば、7) の P.783

(受理：'96.2.16)