一様曲げ（流れ方向曲げ）を受ける段ボールの弾性強度と形状（第3報）* 上下同質のクラフト・ライナーおよび中芯よりなる複両面段ボール

帝人製機株式会社松山工場 松 島 理

愛媛大学名誉教授 松 島 成 夫

Relation between Elastic Strength and Shape for Corrugated Fiberboard under Uniform Bending in Moment Axis Perpendicular to Machine Direction (III) On Double Wall Corrugated Fiberboard with Same Kraftliners and Corrugated Mediums in Upper and Lower Sides

Satoru Matsushima

Teijin Seiki Corporation, Matsuyama

Shigeo Matsushima

Honorary Professor, Ehime University

An elastic stress analysis formulation for the double wall corrugated fiberboard (DWCF) with same kraftliners (KLs) and corrugated mediums (CMs) in upper and lower sides was made by simple treatment method corresponding to the deformation of the DWCF structure under uniform bending of the moment axis perpendicular to the machine direction. Then from this formation, the stress analysis for several DWCFs was performed and relations between stresses and shapes of DWCF elements were discussed in detail.

Absolute maximum stresses $\sigma_{k\max}$ ($i=1, 2$) of upper and lower side KLs are on outer and absolute maximum stresses $\sigma_{sj\max}$ ($j=1, 2$) of CMs are on inner surfaces respectively. $\sigma_{k\max}$ increases slightly with the wavelength of CMs and $\sigma_{sj\max}$ decreases obviously with the waveheight. $\sigma_{k\max}$ and $\sigma_{sj\max}$ increase obviously with the thickness and the longitudinal elastic modulus of KLs. And $\sigma_{k\max}$ increases slightly with the thickness and the longitudinal elastic modulus of CMs but $\sigma_{sj\max}$ increases obviously.

Keywords : Computational Mechanics, Structure Analysis, Elastic Bending, Strength of Corrugated Fiberboard, Elastic Stress Analysis, Structure Strength, Numerical Analysis

1. 緒 言

段ボール¹⁾²⁾は、構造物についての適用性および生産性の高い形状をし、高い実用性と有用性をもち、ま

た軽量で、緩衝性に優れているため、力学的強度を要する構造化包装材として広く用いられている。そして、軽量で高い強度形状を有することにより、段ボール構造の航空機体（筒形段ボール状）への適用に関する研究³⁾がある。したがって、段ボールのクラフト・ライナー（KL）、中芯（SCP medium）の変形に関する

*第2報：紙パ技協誌，51（9），1356～1365（1997）

力学的強度を基本的に明らかにし、段ボールに関する設計強度を確かにすることは、材料工学上、構造工学上意義あるものと考えられる。

段ボール⁴⁾⁵⁾および段ボール箱^{6)~8)}の強度等に関する実用的研究は既に行われ、最近においても高い適用性への要求として、この種の研究がおこなわれている⁹⁾¹⁰⁾。なお、段ボールの反り¹¹⁾に関する研究も行われている。

基礎的研究として、幾何学的条件を基にした段ボールの引張り変形強度機構についての実験的研究がある¹²⁾。弾性論による基礎的研究については、波板の曲げ剛性に関する研究¹³⁾、面圧を受ける段ボール中芯¹⁴⁾¹⁵⁾および波板¹⁵⁾¹⁶⁾の内部応力等に関する研究がある。さらに、接合部の強度に関するものとして、厚さ方向の引き離し力についての強度¹⁷⁾¹⁸⁾、流れ方向のずれ力についての強度^{19)~21)}の研究がある。

曲げモーメント軸が流れ方向にある曲げ（縦曲げ）を受ける両面²²⁾²³⁾および片面²⁴⁾段ボール、異なるKLをもつ両面²⁵⁾および複両面²⁶⁾段ボールに関する弾性曲げ強度の研究がある。曲げモーメント軸が流れ方向に直角な向きにある際の曲げ（流れ方向曲げ）強度に関する基礎的研究として、同材²⁷⁾²⁸⁾および異材³⁰⁾³¹⁾のKLをもつ両面段ボールについてのものがある。

包装材として用いられている段ボールの使用状況をみると、精密機器およびコンピューターの市場の増加に伴って、複両面段ボールおよび複々両面段ボールの利用が非常に盛んである。その使用時の状態をみると、変形状況は縦曲げばかりではなく、流れ方向曲げも同様に多く生じている。したがって、複両面段ボールの流れ方向曲げに関する研究をおこなうことは段ボール工学上重要なことである。

複両面段ボールの流れ方向曲げに関する基礎的研究は厚さ方向に対称に配位する上下同材のKLおよび中芯を段ボールについてのものがある³¹⁾。この研究は、KLと中芯の配置が厚さ方向および流れ方向に対し対称的になったものに限定されたものであり、応力表示の導出が主なもので、応力状況の議論は概略である。

そこで、本報では、前報^{14)~31)}にならい、複両面段ボールの両表面および上下中芯が各同質、同形で、中央KLの材質、形状、および上下中芯の配置は任意である際の流れ方向一様曲げを受ける複両面段ボールの応力の算定法を導き、これによって段ボール素材の応力値を求め、本段ボール強度と形状の関係をより詳細に明らかにすることを試みた。ただし、中芯の形状を前報の処分に代わって、近似的に、正弦波形であるとし、構成素材が弾性体であるとした。

2. 解析方法

一様な流れ方向曲げを受ける両面段ボール^{27)~30)}の接合部に生じる厚さ方向の荷重は、近似的に、零であることが示され、また上下同材のKLおよび中芯よりなり、KL・中芯接合部が左右対称に配位した複両面段ボール³¹⁾の厚さ方向の荷重も、近似的に、零であることが示されている。これらのことより、流れ方向一様曲げにおける段ボールのKL・中芯接合部の厚さ方向の荷重は、非常に小さい値であると考えられる。そこで、上下同材のKLおよび中芯よりなる複両面段ボールのKL・中芯接合部の厚さ方向の荷重は、近似的に、零であるとする。

複両面段ボールは上下表面KL (KL_i ; $i=1, 2$)、中央KL (KL_0) および KL_0 をはさむ上下中芯 (CM_j ; $j=1, 2$) によって構成されている。前報^{14)17)27)~31)}にならい、中芯の波形を、近似的に、正弦波状であると考え、 CM_1 および CM_2 の波高 h および厚さの中央の位置を原点 (O_1, O_2) におき、流れ方向（加工方向）の位置を各 x_1, x_2 で、波形の高さ方向の位置を各 y_1, y_2 で示す（図1参照）。そして、それらの方向に直角な方向を z 方向にする。なお、 $KL_0 \cdot CM_1$ 接合部と $KL_0 \cdot CM_2$ 接合部との x 方向の開き (O_1, O_2 の距離) を ΔL 、中芯の波長を L で示すと、上下のKL・中芯接合部の x 方向の位置は任意であるため、一般に、 $\Delta L \neq 0$ であると考えられる（図2参照）。

CM_1, CM_2 の厚さ (T_s) 中心の位置 x_{01}, y_{01} および x_{02}, y_{02} から厚さ方向に t_1, t_2 の距離にある位置 y_1, y_2 は、近似的に、各

$$y_{0j} = \left(\frac{h}{2}\right) \sin\left(\frac{2\pi x_j}{L}\right) \quad (j=1, 2) \quad \cdots(1)$$

$$y_j = y_{0j} + t_j \cos \theta_j \quad (j=1, 2) \quad \cdots(2)$$

で表される。ただし、 θ_1, θ_2 は y_{01}, y_{02} の接線の方向と x 方向とのなす角

$$\theta_j = \tan^{-1}\left(\frac{dy_{0j}}{dx_j}\right) \quad (j=1, 2) \quad \cdots(3)$$

Fig.1 Bending moment M_T and coordinates.

Fig. 2 Actions of joints.

である。

段ボールは広い板状のものであるため、流れ方向の微笑な曲げ変形は、 xy 面上に生じ、 z 方向の変異が零であると考えられ、前報の流れ方向曲げの際³¹⁾と同様に、平面ひずみ変形であると考えられる。そして、平面ひずみと平面応力との類似性³²⁾により、前報³¹⁾と同様に、近似的に、 KL および中芯の変形は単位幅をもつはりの変形と同様なものであると考える。すなわち、近似的に、 KL_1 の変形は、 $x = -L/2 \sim L/2$ の域で考えれば、 $KL_1 \cdot CM_1$ 接合部に x 方向の集中荷重 W_{k1x} および固定モーメント M_{k01} の作用力が働く真直部材はり（段ボール中立面から所定の距離 Y_0 にある部材はり）、 KL_2 の変形は、 $KL_2 \cdot CM_2$ 接合部に W_{k2x} および M_{k02} の作用力が働く真直部材はりと同様なものであると考える（図2参照：上述の設定により接合部 y 方向の荷重は $W_{k1y} = W_{s1y} = 0$ ）。そして、 KL_0 の変形は、 $KL_0 \cdot CM_1$ 接合部に W_{k0x}^* および M_{k00}^* の作用力が働き、 $KL_0 \cdot CM_2$ 接合部に W_{k0x} および M_{k00} の作用力が働く真直部材はりであるとする。 CM_1 については、 $KL_1 \cdot CM_1$ 接合部に W_{s1x} 、 W_{s1y} および M_{s01} の作用力が働き、 CM_2 については $KL_2 \cdot CM_2$ 接合部に W_{s2x} および M_{s02} の作用力が働く曲がりはりであるとする。また、段ボールのよう曲げすなわち単位幅当たりの接合部を通る断面に働くモーメント M_T の一定性により、着目位置 x_1 、 x_2 ($=x_i$) における M_T は、その位置に働く KL_1 、 KL_2 、 KL_0 、 CM_1 、 CM_2 のモーメント M_{k1} 、 M_{k2} 、 M_{k0} 、 M_{s1} 、 M_{s2} の和

$$M_T = M_{k1} + M_{k2} + M_{k0} + M_{s1} + M_{s2} \quad \dots\dots(4)$$

で表される。段ボールの作用力がモーメント M_T のみで外力は零であることにより、結合部の幾何学的条件および力の釣合い条件を考慮すると、 KL_1 、 KL_2 および KL_0 については各

$$W_{k1x} = W_{sjx} \quad W_{k0x}^* = W_{sjx} \quad (i=1, 2; j=1, 2) \quad \dots\dots(5)$$

であるものと考えられ、対称性を考慮すると、 $x_j = -L/4 \sim L/4$ 域側の M_{k01} 、 W_{k1x} 、 M_{s01} 、 W_{s1x} などの全ての作用力は $x = L/4 \sim 3L/4$ 域側のものと等しいものと考えられる。そして、 KL_0 の W_{s1x} および W_{s2x} の働きによる変形は、曲げと単純、一様な W_{s1x} および W_{s2x} による引張り、圧縮との重ね合わせであると考えられる。

2.1 KLの変形について

KL_1 の x_1 における M_{k1} および KL_2 の x_2 における M_{k2} は、 $-L/4 < x_1 < L/4$ および $-L/4 < x_2 < L/4$ で

$$M_{ki} = M_{k0i} \quad (i=1, 2) \quad \dots\dots(6)$$

KL_0 の x 方向の位置 x_0 の基点を $x_1 = -L/4$ に、すなわち

$$x_0(x_1 = -L/4) = 0$$

にすると、 x_0 および $x_0 = L/2 + \Delta L$ の KL_0 の CM_1 および CM_2 接合部の固定モーメントが M_{k00}^* 、 M_{k00} であることより、 KL_0 におけるモーメント M_{k0} は、 $x_0 = 0$ の際、近似的に、

$$M_{k0} = M_{k00} \quad \dots\dots(7a)$$

$x_0 = L/2 + \Delta L$ の際

$$M_{k0} = M_{k00}^* \quad \dots\dots(7b)$$

で表される。

KL_1 表面から段ボールの中立面までの距離を Y_0 で示すと、真直はりの曲げ応力の算定によって、中立面からの距離 Y の位置にある KL_1 、 KL_2 および KL_0 の曲げ応力 σ_{k1} 、 σ_{k2} および σ_{k0} は、近似的に

$$\sigma_{k1} = \frac{M_{k1}Y}{I_{k1}} + \frac{W_{k1x}}{T_k} \quad (i=1, 2) \quad \dots\dots(8a)$$

$$\sigma_{k0} = \frac{M_{k0}Y}{I_{k0}} + \frac{W_{k0x}}{T_{k0}} \quad \dots\dots(8b)$$

$$W_{k0x} = W_{k1x} + W_{k2x}$$

で表される³³⁾³⁴⁾。ただし、 I_{k1} 、 I_{k2} および I_{k0} は KL_1 、 KL_2 および KL_0 の2次断面係数

$$I_{k1} = I_k + \left(Y_0 + \frac{T_k}{2}\right)^2 T_k \quad \dots\dots(9a)$$

$$I_k = T_k^3 / 12$$

$$I_{k2} = I_k + \left(T_T - Y_0 - \frac{T_k}{2}\right) T_k \quad \dots\dots(9b)$$

$$T_T = 2 T_k + T_{k0} + 2 T_s + 2 h$$

$$I_{k0} = I_{k00} + \left(Y_0 - \frac{T_{k0}}{2} \right) T_{k0} \quad \cdots \cdots (9c)$$

$$I_{k00} = T_{k0}^3 / 12$$

であり、 T_k は KL_1 , KL_2 , T_{k0} は KL_0 の厚さである。

KL_1 および KL_2 の x および y 方向の変位 δ_{kx1} , δ_{kx2} および δ_{ky1} , δ_{ky2} は各

$$\delta_{kx1} = \frac{L}{2E_k} + \frac{L_i W_{k1x}}{2E_k T_k} \quad (i=1, 2) \quad \cdots \cdots (10a)$$

$$\delta_{k1y} = \frac{L^2 M_{k01}}{2E_k} \quad \cdots \cdots (10b)$$

KL_1 , KL_2 および KL_0 の x 方向に対する傾き i_{k1} , i_{k2} および i_{k0} は各

$$i_{k1} = \frac{M_{k01}}{2E_k I_{k1}} \quad (i=1, 2) \quad \cdots \cdots (11a)$$

$$i_{k0} = \frac{M_{k00} L}{2E_k I_{k0}} \quad \cdots \cdots (11b)$$

で表される。ただし、 E_k は KL_1 の縦弾性係数である。

2.2 中芯の変形について

CM_1 および CM_2 の位置 x_1 および x_2 におけるモーメント M_{s1} および M_{s2} は

$$M_{sj} = M_{sj} - W_{sjx} \left(\frac{h_j}{2} - y_{0j} \right) \quad (j=1, 2) \quad \cdots \cdots (12)$$

曲がりのはりの応力表示にしたがって CM_1 および CM_2 の x_1 , y_1 および x_2 , y_2 における曲げ応力 σ_{s1} および σ_{s2} は

$$\sigma_{sj} = \frac{N_{sj}}{T_{sj}} + \frac{M_{sj}}{T_{sj} \rho_j} \left[1 + \frac{1}{k_j} \frac{t_j}{(\rho_j + t_j)} \right] \quad (j=1, 2) \quad \cdots \cdots (13)$$

で表され³⁵⁾³⁶⁾、 k_1 , k_2 および ρ_1 および ρ_2 は曲りのはりの断面係数および曲率半径

$$k_j = \frac{1}{3} \left(\frac{T_{sj}}{2\rho_j} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{T_{sj}}{2\rho_j} \right)^4 + \frac{1}{7} \left(\frac{T_{sj}}{2\rho_j} \right)^6 + \cdots \cdots \quad (j=1, 2) \quad \cdots \cdots (14a)$$

$$\rho_j = - \left[1 + \left(\frac{dy_{0j}}{dx_j} \right)^2 \right]^{3/2} \left(\frac{d^2 y_{0j}}{dx_j^2} \right)^{-1} \quad (j=1, 2) \quad \cdots \cdots (14b)$$

N_{s1} および N_{s2} は CM_1 および CM_2 の軸力

$$N_{sj} = -W_{sjx} \cos \theta_j \quad (j=1, 2) \quad \cdots \cdots (15)$$

である。ただし、 T_s は中芯の厚さである。

CM_1 および CM_2 の着目位置とその曲率半径の中心とを通る直線と x 方向とのなす角を ϕ_1 および ϕ_2

$$\phi_j = \pi/2 - \theta_j \quad (j=1, 2) \quad \cdots \cdots (16)$$

とし、それらの変化より CM_1 および CM_2 の x , y 方向の変位 σ_{sx1} , σ_{sy1} および σ_{sx2} , σ_{sy2} を求める既知の

法³⁷⁾を用い、応力の算定をおこなう。

この法によると、 δ_{sx1} , δ_{sx2} および δ_{sy1} , δ_{sy2} は

$$\delta_{sxj} = -\frac{1}{E_s T_s} \int_{-L/4}^{L/4} \left[N_{sj} + \frac{M_{sj}(1+k_j)}{\rho_j} \right] \left[\frac{h_j}{2} - y_{0j} \right] d\phi_j \quad (j=1, 2) \quad \cdots \cdots (17a)$$

$$\delta_{syj} = -\frac{1}{E_s T_s} \int_{-L/4}^{L/4} \left[N_{sj} + \frac{M_{sj}(1+k_j)}{\rho_j} \right] \left[\frac{L_j}{4} - x_j \right] d\phi_j \quad (j=1, 2) \quad \cdots \cdots (17b)$$

で表され、たわみ角 i_{s1} および i_{s2} は

$$i_s = -\frac{1}{E_s T_s} \int_{-L/4}^{L/4} \left[N_{sj} + \frac{M_{sj}(1+k_j)}{\rho_j} \right] d\phi_j \quad (j=1, 2) \quad \cdots \cdots (18)$$

で表される。ただし、 E_s は中芯の縦弾性係数である。

3. 未定値の決定について

(8a), (8b) および(13)より KL および中芯の応力を求めるには、作用力 W_{k1x} , W_{k2x} ならびに M_{k01} , M_{k02} , M_{k00} および M_{s01} , M_{s02} などの値を明らかにする必要がある。そこで、これらの値の決定について議論する。

実際に使われる段ボールの大きさは、 L , h に比べ非常に大きなものである。そして、 KL_1 と KL_2 とが、また CM_1 と CM_2 とが各同材であるために、 KL ・中芯接合部の変位状態は一樣な板と同様になるものと考えられる。すなわち、本変形は一樣曲げであるため、段ボール各位置の総モーメント M_T は等しく、各接合部の変形は等しい値をとるものと考えられ、その位置の KL_1 , KL_2 の傾きは、近似的に、等しいものと考えられ、 $x_j = -L/4 \sim L/4$ 間に生じる KL_1 , KL_2 の傾き i_{k1} , i_{k2} およびたわみ δ_{ky1} , δ_{ky2} も等しく、

$$i_{k1} = i_{k2} \quad \delta_{ky1} = \delta_{ky2} \quad \cdots \cdots (19a)$$

になるものと考えられる。また、(6), (7a), (7b) および幾何学的条件により、 KL_0 の傾き i_{k0} も、近似的に、

$$i_{k0} = i_{k1} \quad \cdots \cdots (19b)$$

であるものと考えられる。

曲げに伴う中芯の変形は、上述のように、曲がりとはりと同様な変形を示すものと考えれば、その変化は複雑になるものと考えられる。しかし、近似的に、はりの曲げ理論によると、純曲げに伴う伸びは L に比べ非常に小さいものと考えられ、中芯の h の変化も非常に小さいものと考えられる。一方、中芯の引っ張りおよび圧縮による伸びおよび縮み変形は、その大きさが、近似的に、同様なものであると考えられる。すると、

段ボールの純曲げは各部材に大きさの等しい単純な引っ張り、圧縮変形が部材曲げに加わったものであると考えられる。このことにより、 KL_1 と KL_2 、および CM_1, CM_2 が各同質および同形であるために中立軸は、近似的に、段ボールの厚さ中央にあり、 Y_0 は

$$Y_0 = T_T / 2 \quad \cdots \cdots (20)$$

となり、(9 a)、(9 b) より上下 KL および中芯の放射性変形強度により I_{k1} および I_{k2} は

$$I_{k1} = I_{k2} \quad \cdots \cdots (21)$$

で表せる。そして、(6)、(11 a)、(19 a) より、関係

$$M_{k01} = M_{k02} = (E_{k1} I_{k1} / E_{k0} I_{k0}) M_{k00} \quad \cdots \cdots (22)$$

が成り立つことがわかる。接合部で、関係

$$i_{k1} = i_{sj} \quad (i = j = 1, 2) \quad \cdots \cdots (23)$$

が成り立つことおよび (17 a)、(17 b)、(18) より、近似的に、 M_{s01} および M_{s02} は

$$M_{s01} = M_{s02} \quad \cdots \cdots (24)$$

で表せる。

(4) および (22)、(24) より関係

$$M_{s01} = (1/2) (M_T - A_B M_{k01}) \quad \cdots \cdots (25)$$

$$A_B = [2 + E_{k0} I_{k0} / E_{k1} I_{k1}]$$

KL_1 と CM_1 との i_1 が等しいことおよび (11 a)、(18) より関係

$$\begin{aligned} & -\frac{W_{s1x}}{E_s T_s} \int_{x=-L/4}^{x=L/4} B_1 \left(\frac{h}{2} - y_0 \right) d\phi_1 \\ & + \frac{M_{s01}}{E_s T_s} \int_{x=-L/4}^{x=L/4} B_1 d\phi_1 = \frac{L M_{k01}}{2 E_k T_{k1}} \\ & B_1 = \frac{1 + k_1}{\rho_1 k_1} \quad \cdots \cdots (26) \end{aligned}$$

が得られる。

幾何学的条件より、(10 a) および (17 a) の δ_{s1x} および δ_{k1x} が等しいものと考えられ、関係

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{E_s T_s} (A^* + B^*) W_{s1x} + A^{**} M_{s01} \\ & = \frac{L M_{k01}}{2 E_k I_k} \left(Y_0 - \frac{T_k}{2 T} \right) + \frac{L W_T}{2 E_k T_k} \quad \cdots \cdots (27) \\ & A^* = \int_{x=-L/4}^{x=L/4} \left(\frac{h}{2} - y_{01} \right) \sin \phi_1 d\phi_1 \\ & A^{**} = \int_{x=-L/4}^{x=L/4} B_1 \left(\frac{h}{2} - y_{01} \right) d\phi_1 \\ & B^* = \int_{x=-L/4}^{x=L/4} B_1 \left(\frac{h}{2} - y_{01} \right)^2 d\phi_1 \end{aligned}$$

が得られる。これより、 W_{s01} 、 M_{s01} 、 M_{k01} は

$$W_{s01} = D_1 / D_T \quad \cdots \cdots (28 a)$$

$$M_{s01} = D_2 / D_T \quad \cdots \cdots (28 b)$$

$$M_{k01} = D_3 / D_T \quad \cdots \cdots (28 c)$$

で表されることがわかる。ただし、 D_T 、 D_1 、 D_2 、 D_3 は

$$\begin{aligned} D_T &= \begin{vmatrix} A_1 & B_{11} & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} & D_1 &= \begin{vmatrix} D_1 & B_{11} & C_1 \\ D_2 & B_2 & C_2 \\ D_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \\ D_2 &= \begin{vmatrix} A_1 & D_1 & C_1 \\ A_2 & D_2 & C_2 \\ A_3 & D_3 & C_3 \end{vmatrix} & D_3 &= \begin{vmatrix} A_1 & B_{11} & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

A_1 、 B_{11} 、 C_1 、 $\cdots \cdots B_3$ 、 C_3 、 D_3 は

$$A_1 = 0 \quad B_{11} = 1 \quad C_1 = 1/2 \quad D_1 = A_B / 2$$

$$A_2 = \frac{A^{**}}{E_s T_s} \quad B_2 = \frac{M_{s01}}{E_s T_s} \int_{x=-L/4}^{x=L/4} B_1 d\phi_1$$

$$C_2 = L / (2 I_{k1}) \quad D_2 = 0$$

$$A_3 = -[A^* + B^* - L/2] / (E_k T_k)$$

$$B_3 = A^{**} / (E_k T_k)$$

$$C_3 = L (Y_0 - T_k / 2) / (2 E_k I_{k1}) \quad D_3 = 0$$

である。

(28 a) より W_{s01} を、(28 b) より M_{s01} ($= M_{s02}$) を、(28 c) より M_{k01} を明らかにすれば、(13) によって曲げ応力 σ_{s1} 、 σ_{s2} の値を求めることができ、(27) より M_{k01} ($= M_{k02}$) を明らかにすれば、(8 a) および (8 b) によって σ_{k1} 、 σ_{k2} および σ_{k0} の値を求めることができる。

以上のように、本表示は、 KL_1 と KL_0 とが異質、異形で、 KL ・中芯接合部の流れ方向の位置自由なものについての表示の導出をおこなったものであるが、 KL_1 、 KL_0 が同質、同形であれば、表示の値は前報³¹⁾ のものと同等になることが伺えた。

4. 解析結果と考察

本解析に用いた複両面段ボール材の形状は、実用段ボールの形状 (A フルート + A フルート、 B フルート + B フルート)³⁸⁾³⁹⁾、素材秤量⁴⁰⁾⁴¹⁾を考慮し、 $T_s = 0.24$ mm、 $h = 4.6$ mm、 $L = 9.2$ mm、 $T_k = 0.60$ mm、 $T_{k0} = 0.30$ mm および $T_s = 0.24$ mm、 $h = 2.3$ mm、 $L = 4.6$ mm、 $T_k = 0.30$ mm、 $T_{k0} = 0.30$ mm のものを、中心として議論する。そして、 KL および中芯の縦弾性係数は近似的に各 $E_k = 5.8 \times 10^3$ N/mm²⁴²⁾ ($= E_{k0}$) および $E_s = 2.8 \times 10^3$ N/mm²⁴³⁾ であるが、便宜上、 $E_k = 2$ N/mm²、 $E_s = 1$ N/mm² であるとし、また、 M_T を単位化し、 $M_T = 1$ N として、計算処理をする。計算時、角増分の積分処理は角差分法を用い、積分誤差 1% 程度以下の分割数 $N = 10^4$ でこない、以下のように、曲げ応力状況を議論する。

(8 a)、(8 b) および (13) によって、 KL_1 、 KL_2 、 KL_0 および CM_1 、 CM_2 の曲げ応力 σ_k および σ_s の値を求め、

これらの値と x_i , x_j および t_i , t_j との関係 ($i=0, 1, 2; j=1, 2$) を図3(a, b) および図4(a, b) に示す。

図3 (a, b) より, KL_1 と KL_2 の σ_{k1} , σ_{k2} および CM_1 および CM_2 の σ_{s1} , σ_{s2} の絶対値は共に等しい変化を示すことがわかる。 KL_1 , KL_2 および KL_0 の σ_{k1} , σ_{k2} および σ_{k0} は x_i の増減によらず一定になることが, $t_j (=T_s/2) > 0$ では, x_i の増加によって, CM_1 は負値から正値に, CM_2 は正値から負値に大きく変化することがわかる。

また, 図4 (a, b) より, $|\sigma_{k1}|$ は大きい値に t_i の増加に伴う比例的な増加が, $|\sigma_{k0}|$ は, 小さい値ではあるが, t_0 の増加に伴う正比例的な増減が見受けられる。そして, $|\sigma_{s1}|$ は t_j の増加に伴ってほぼ比例的に増減することがわかる。

σ_{k1} および σ_{k2} の絶対値の最大値は段ボールの上下 KL の外表面にあり, $|\sigma_{k0}|$ の最大値は KL_0 の両表面にあることがわかり, $|\sigma_{s1}|$ および $|\sigma_{s2}|$ の最大値は $KL \cdot$ 中芯接合部の内表面 (たとえば, CM_1 では $x_i = L/4$, $t_i = -T_s/2$) に生じることがわかる。

本変形状態の特徴として, 流れ方向曲げを受ける両面段ボール中芯の曲げ応力の最大値が $KL \cdot$ 中芯接合部の内側表面に生じるのと同様に, $|\sigma_{s1}|$ および $|\sigma_{s2}|$ の最大値は内表面に生じるが, 流れ方向曲げを受ける両上下同材の KL および中芯よりなる複両段ボールの流れ方向曲げでは, 一般に, その絶対値が外表面の値より, 顕著に大きい。そして, 内表面の曲げ応力の最大値は上下が逆符号の値を示すようになり, 本段ボール中芯の変形は各中芯の純曲げに, 伸び, 圧縮が加

Fig.3 Bending stresses and positions x_i ($i=1, 2$), x_j ($j=1, 2$).
 $E_k=E_{k0}=2 \text{ N/mm}^2$ and $E_s=1 \text{ N/mm}^2$.
 (a) Stress patterns for KLs. (b) Stress patterns for CMs.

Fig.4 Bending stresses and positions t_i ($i=1, 2$), t_j ($j=1, 2$).
 $E_k=E_{k0}=2 \text{ N/mm}^2$ and $E_s=1 \text{ N/mm}^2$.
 (a) Stress patterns for KLs. (b) Stress patterns for CMs.

わったものであることを考慮すると、このような変形は、曲げ変形によって生じる上側の中芯の変形には相当大きい伸びが、下側には相当大きい圧縮が加わり生じたものと考えられる。

構造部材の破壊は、一般に、最大応力位置の個所から生じているものと考えられ、その応力値は形状および材質によって大きく変化するものと考えられる。

そこで、各構成部材の最大応力と形状との関係を議論する。

求めた KL_1 , KL_2 , KL_0 の最大応力の最大値 σ_{k1max} , σ_{k2max} ($=\sigma_{k1max}$), σ_{k0max} と L との関係および CM_1 , CM_2 の最大応力の最大値 σ_{s1max} , σ_{s2max} ($=\sigma_{s1max}$) と L との関係を図5に示す。

図より、 L の増加によって、 σ_{k1max} , σ_{k0max} は緩やかに減少することがわかる。しかし、 σ_{s1max} は、 $x=L/4$ 付近の無限大の値から急激に減少し、その後、緩やかな増加を示す。

L の増加による各 KL 材および $x_j=L/2$ 付近の中芯の応力無限大からの減少は、(13)より、 $1/(\rho_j-t_j/2)$ の項の寄与によるものと考えられ、中芯素材の減少に伴う強度減少を考慮すると、 σ_{s1max} の緩やかな増加は L の増加による中芯素材の減少に伴う強度低下によるものと考えられる。

σ_{k1max} , σ_{k0max} と h との関係および σ_{s1max} と h との関係を図6に示す。

図より、 h の増加によって、 σ_{k1max} , σ_{k0max} , σ_{s1max} は顕著に減少することがわかる。

なお、 h の増加による最大応力の大きな低下は、(8 a) および (9 a), (9 b) より、 h の増加による断面2

次モーメントの大きな増加によって生じるものと考えられる。

σ_{k1max} , σ_{k0max} および σ_{s1max} と T_k および E_k との関係を図7に示す。

図より、 T_k および E_k の増加によって、 σ_{k1max} , σ_{k0max} および σ_{s1max} は顕著に減少することがわかる。

T_k および E_k の増加による KL の最大応力の顕著な減少は、(8 a), (8 b), (9 a), (9 b) および (11 a), (11 b) より、 T_k および E_k の増加による断面2次モーメントおよびこわきの顕著な増加によって、中芯の低下は顕著な断面2次モーメントの増加、段ボールの

Fig.6 Relations between maximum stresses and h .

$E_k=E_{k0}=2 \text{ N/mm}^2$ and $E_s=1 \text{ N/mm}^2$.

Fig.5 Relations between maximum stresses and L .

$E_k=E_{k0}=2 \text{ N/mm}^2$ and $E_s=1 \text{ N/mm}^2$.

Fig.7 Relations between maximum stresses, T_k and E_k .

$E_{k0}=2 \text{ N/mm}^2$ and $E_s=1 \text{ N/mm}^2$.

Fig. 8 Relations between maximum stresses, T_{k0} and E_{k0} .
 $E_k = 2 \text{ N/mm}^2$ and $E_s = 1 \text{ N/mm}^2$.

強度増加により生じたものと考えられる。

$\sigma_{k1\max}$, $\sigma_{k0\max}$ および $\sigma_{s1\max}$ と T_{k0} および E_{k0} との関係を図 8 に示す。

図より, T_{k0} の増加によって $\sigma_{k0\max}$ は緩やかに減少するが, E_{k0} の増加によって顕著に増加することがわかる。そして, T_{k0} および E_{k0} の増加によって, $\sigma_{k1\max}$ および $\sigma_{s1\max}$ は緩やかに減少することがわかる。

T_{k0} および E_{k0} の増加による上下 KL および中芯の最大応力の緩やかな減少は, 素材の強度減少を考慮すると, T_{k0} の増加による KL_0 素材の増加に伴う強度増加によるものと考えられ, 上下中芯の最大応力の緩やかな減少は, (13) より, T_{k0} および E_{k0} の増加による中芯の変形抵抗の増加に基づく M_{k00} の増加, σ_{s0} の増加によって生じるものと考えられる。 T_{k0} および E_{k0} による $\sigma_{k0\max}$ の増加は T_{k0} および E_{k0} によって KL_0 の変形抵抗が増加し, M_{k0} が増加したことによるものと考えられる。

$\sigma_{k1\max}$, $\sigma_{k0\max}$ および $\sigma_{s1\max}$ と T_s および E_s との関係を図 9 に示す。

図より, T_s および E_s の増加によって, $\sigma_{k1\max}$, $\sigma_{k0\max}$ は緩やかに減少し, $\sigma_{s1\max}$ は T_s の増加によって顕著に増加するが, E_s の増加によって緩やかに増加することがわかる。

T_s および E_s の増加による各 KL の最大応力の緩やかな減少は, 全 KL 材の強度減少を考慮すると, T_s および E_s の増加に基づく中芯素材の増加に伴う強度低下によるものと考えられ, (17 a), (17 b), (18) より T_s および E_s の増加に伴う $\sigma_{s1\max}$ の増加は T_s および

Fig. 9 Relations between maximum stresses, T_s and E_s .
 $E_k = E_{k0} = 2 \text{ N/mm}^2$.

E_s の増加に基づく中芯の変形抵抗の増加によって KL 中芯接合部の固定モーメント M_{s01} の増加が生じたことによるものと考えられる。

以上のことより, 曲げ変形時の段ボール構造の高い強度保持への寄与はいくつかの要因があると思われるが, 主たるものは, KL の間隔保持と中芯の横変位の阻止にあるものと考えられる。すなわち, この阻止によって, 曲げ変形時, 常に, KL_1 , KL_0 , KL_2 の各間隔が一定となる状態が保たれ, 高い強度状態を示す幾何学的保持にあるものと考えられる。

5. 結 言

両表面同材の KL をもつ複両面段ボールに一樣曲げが働く際の段ボール各素材の応力と形状との関係を明らかにするために, 計算処理容易な解析表示の導出を試みた。そして, 本表示より, KL および中芯の縦弾性係数を 2 N/mm^2 および 1 N/mm^2 とし, 上下の KL および中芯の厚さ $T_k = 0.30 \text{ mm}$, $T_{k0} = 0.30 \text{ mm}$, $T_s = 0.24 \text{ mm}$, および中芯の波長 $L = 9.2 \text{ mm}$, 波高 $h = 4.6 \text{ mm}$ の形状を主とした際の複両面段ボールの KL および中芯の曲げ応力の値を求め, その強度状況を議論した。その結果, 以下のようなことが明らかになった。

- (1) 本段ボールの素材の変形は単純な引張り, 圧縮変形と一樣曲げ変形との組合せによって表せる。そして, 段ボール表面の KL の最大値は外側表面に, 内 KL はその両表面にあり, 中芯は KL・中芯接合部の内表面にある。全素材の最大値は段

ボール表面のKL外面にある。

- (2) KLの曲げ応力最大値は中芯波長 L の増加に伴って緩やかに増加し、中芯の最大値はまず急激に減少し、やがて緩やかに増加する。各素材の緩やかな増加は L の増加に基づく中芯素材の減少によって、中芯に現れる急激な減少は中芯形状の特異性によって生じる。
- (3) 段ボール各素材の曲げ応力の最大値は、中芯波高 h の増加に伴って減少する。このことは、 h の増加に基づく両表面のKLの断面2次モーメントの増加によって生じるものとみなされた。
- (4) 段ボール各素材の曲げ応力の最大値は、表面KLの厚さ T_k および縦弾性係数 E_k の増加に伴って減少する。このことは、 T_k および E_k の増加に基づく両表面のKLの断面2次モーメントおよびこわさの増加によって生じるものとみなされた。
- (5) 段ボール表面のKLおよび中芯の応力の最大値は、段ボール厚さ中央のKLの厚さ T_{k0} および縦弾性係数 E_{k0} の増加に伴って減少し、段ボール厚さ中央のKLは、 E_{k0} の増加に伴って減少するが、 T_{k0} の増加に伴って増加する。この各素材の減少は、 T_{k0} および E_{k0} の増加に基づく両表面のKLの断面2次モーメントおよびこわさの増加によるものであり、増加は T_{k0} の増加による中央のKLの変形抵抗の増加に基づくKL・中芯接合部の固定モーメント増加に基因するものとみなされた。
- (6) 各KLの応力の最大値は、中芯の厚さ T_s および縦弾性係数 E_s の増加に伴って僅か減少し、中芯は T_s の増加に伴って緩やかに減少するが、 E_s の増加に伴って顕著に増加する。この各素材の減少は、 T_s および E_s の増加に基づく全段ボールの強度増加の寄与によるものであり、中芯の増加は E_s の増加による中芯の変形抵抗の増加に基づくKL・中芯接合部の固定モーメント増加によって生じるものとみなされた。

計算処理に当たり、本表示は、積分途上で、中芯の曲率半径および厚さ中央の接線角の変化に無限大が生じる。また、中芯の曲率半径と中芯厚さの半値とが等しくなる状態での無限大が生じ、関数表示(追記参照)を用いると、収斂性が悪く、積分域分割数 10^5 でも数倍の数値の変動が生じるが、差分法を用いた接線角の変化を用いると積分域分割数 10^4 で20%、 10^4 で1%程度の変動誤差が生じ、比較的収斂性がよくすることがわかった。このことより、接線角の差方法を用

いた処方を用いて計算処理をおこなった。

本研究は、KL・中芯の流れ方向位置自由で、上下同質同形のKL(中央のKLとは異材)および中芯よりなる複両面段ボールの流れ方向曲げの弾性応力に対し比較的よい精度で変形が議論できる簡易算定法を導出し、その複両面段ボールの曲げ強度を議論したものである。このような段ボールの強度は、段ボール設計上重要なことであるが、このような強度表示を求めたものは見当たらない。したがって、本結果は、強度の設定にあたり、有意義な資料となるものと考えられる。

文 献

- 1) 例えば、段ボール実用百科編集委員会：段ボール実用百科，一律書房，21(1970)。
- 2) レンゴー株式会社：段ボール技術，包装新聞社，16(1971)。
- 3) 例えば、渋谷：航空学会誌，7(61)，393(1940)；8(71)，267(1941)；林：航空学会誌，8(79)，1131(1941)。
- 4) 例えば，1)のP.537；2)のP.310。
- 5) Koning J. W. Jr. and Stern R. : Tappi (Tech-nical Association Pulp & Paper Industry), 60(12), 128(1977)。
- 6) 例えば，1)のP.548；2)のP.316。
- 7) 例えば，紙業タイムス社：新・紙加工便覧，紙業タイムス社797(1980)。
- 8) Maltenfort G. G. : Tappi, 53(11), 1076(1970)；Grartaganis P. : Tappi, 58(11), 102(1975)；Morris R. M. Jr. and Vallow G. P. : Tappi, 58(11), 110(1975)。
- 9) 川端洋一：日本包装学会誌，6(4)，19(1997)。
- 10) 川端洋一：日本包装学会誌，6(4)，24(1997)。
- 11) 石渕・ほか4名：議論，59(557, A)，156(1993)。
- 12) 松島・ほか3名：紙パ技協誌，36(3)，377(1982)。
- 13) Timoshenko S. P. and Krieger S. W. : Theory of Plates and Shells, McGraw Hill Co., 366(1959)。
- 14) 松島・ほか2名：紙パ技協誌，42(5)，480(1988)。
- 15) 松島・ほか2名：紙パ技協誌，43(5)，602(1989)。
- 16) 松島・ほか2名：紙パ技協誌，44(5)，605(1990)。
- 17) 松島・ほか3名：紙パ技協誌，45(4)，480(1991)。
- 18) 松島理・松島：紙パ技協誌，50(4)，707(1996)。
- 19) 松島理・松島：日本包装学会誌，5(3)，211(1996)。
- 20) 松島理・松島：紙パ技協誌，51(4)，645(1997)。
- 21) 松島理・松島：日本包装学会誌，6(2)，258(1997)。
- 22) 松島理・松島：日本包装学会誌，6(5)，258

- (1996).
- 23) 松島・ほか3名：紙パ技協誌, **46** (5), 668 (1992).
- 24) 松島・ほか3名：紙パ技協誌, **47** (4), 517 (1993).
- 25) 松島・ほか2名：紙パ技協誌, **48** (4), 600 (1994).
- 26) 松島・ほか2名：紙パ技協誌, **49** (6), 956 (1995).
- 27) 松島, 松島：機論, **60** (576, A), 1814 (1994).
- 28) 松島理・松島：紙パ技協誌, **50** (9), 1299 (1996).
- 29) 松島, 松島：機論, **61** (577, A), 1601 (1995).
- 30) 松島理・松島：紙パ技協誌, **51** (9), 1356 (1996).
- 31) 松島, 松島：機論, **63** (611, A), 1525 (1997).
- 32) 清家：材料力学, 共立出版, 23 (1978).
- 33) 例えば, 黒木：材料力学, 森北出版, 52 (1967).
- 34) 例えば, 白鳥：材料の力学, 朝倉書店, 69 (1973).
- 35) 例えば, 33) の P.150.
- 36) 例えば, 34) の P.95
- 37) 例えば, 34) の P.98.

- 38) 例えば, 1) の P.64.
- 39) 例えば, 2) の P.264.
- 40) 例えば, 1) の P.115.
- 41) 例えば, 2) の P.432.
- 42) Jones A. R. : Tappi, **51** (5), 203 (1968).
- 43) 例えば, 1) の P.126.

追 記

無限大を起こす特異点は(13)の $1/(1-t_j/\rho_j)$, (14 a) の $1/(d^2y_{0j}/dx_j^2)$ の項および (17 a), (17 b), (18) の $d\phi_j$ の値にある。すなわち, $t_j/(1-t_j/\rho_j)$ の項は $t_j = \rho_j$ で, $1/(d^2y_{0j}/dx_j^2)$ の項は $x_j=0$ で, 正または負の無限大となり, $d\phi_j$ は

$$d\phi_j = -(d^2y_{0j}/dx_j^2)dx_j/[1-(dy_{0j}/dx_j)^2]$$

で表され, $dy_{0j}/dx_j = \pm 1$ で正および負の無限大となる。
(受理：'98.2.6)