研 究 報 文

両面段ボール板の弾性曲げ変形解析 —中央位置に点・面一様集中荷重を受ける周辺支持板の場合—

帝人製機株式会社 松山工場 松 島 理
愛媛大学 松 島 成 夫

Elastic Bending Analysis for Plate of Single-Wall Corrugated Fiberboard —On Supporting Edges and under Uniform Concentration Load of Point or Area range at Plate Center—

Satoru Matsushima
Teijin Seiki Corporation, Matsuyama

Shigeo Matsushima
Ehime University

松島 理

松島成夫

An elastic analysis of stress and deformation was attempted for the anisotropic rectangular plate ($L_b = 400$, $H_b = 200$ mm) of the single-wall corrugated fiberboard (SWCF) supported by four edges under uniform concentration load of the point or the area range (rectangle) at the center of the plate. Stress distributions of the rectangular plate obtained by the analysis were discussed, and its characters were done obviously. Obtained results are as follows.

The deflection w concentrates remarkably at the plate center and is zero in their four edges. Also the maximum w_{max} of w is at the plate center. Normal stresses σ_x , σ_y of the machine and the cross directions (MD and CD) on KL outer surface concentrate sharply at the plate center and are zero in their edges. Also maximums σ_{xmax} , σ_{ymax} of their stresses are at the plate center, and w , σ_x and σ_y distribute symmetrically for axes x , y through plate center. The shear stress τ_{xy} on KL outer surface distributes antisymmetrically for the plate center, and the maximum of $|\tau_{xy}|$ is near at four positions $x = \pm L_b/4$, $y = \pm H_b/4$ from the center.

Keywords : Computational Mechanics, Structural Analysis, Elastic Bending, Strength of Corrugated Fiberboard, Elastic Stress Analysis, Structure Strength, Numerical Analysis

分類 : T₈ 段ボール, Q₆ 紙板紙品質試験法

1. 緒 言

段ボールは、力学的にみて優れた構造特性をもち、生産性にも優れ、包装用材として盛んに利用され、段ボール箱の主要な素材である。また、段ボール原紙は一般の紙と同様に強い異方性をもち、段ボールには、幾何学的に特異な素材構成に基づく異方性が生じる。

段ボール原紙およびその素材によって造られた諸段ボール（片面、両面、複両面段ボール）の引張り変形強度の異方性が議論されている¹⁾。紙の異方性弾性係数に関する基本的な注目すべき研究として Jones のものがある²⁾。

段ボールの強度に関する基礎的な研究は、すでに引張り変形強度に関するものがあり¹⁾、段ボールの面圧縮に関するもの^{3)~7)}、1 方向曲げは流れ方向（曲げモーメント軸が流れ方向）^{8)~12)}および横方向（曲げモーメント軸が横方向）^{13)~17)}についてのものがある。そして、Seydel の波板の異方性の剛性を示したものの¹⁸⁾がある。段ボール構造の航空機への適用¹⁹⁾²⁰⁾および多層構造を考慮した段ボールの反り²¹⁾に関する研究がある。縦方向曲げに伴う面圧縮応力²²⁾についてのものがある。段ボール箱の強度に関する実用式に関する研究は、古くよりなされ^{23)~25)}、現在でもおこなわれている²⁶⁾。

包装材として用いられている段ボール箱の側面の変形は、周辺支持板の変形に類似しているものと考えられる。段ボール箱を構成している段ボール板の強度の力学の立場より求めた基本的な算定については、段ボール構造を配慮した異方性板の一樣分布荷重下における弾性変形強度に関する研究がある²⁷⁾。しかし、周辺支持下で、集中荷重を受ける段ボール板の曲げ（2 方向曲げ）について、基本的な変形解析をおこなったものは見当たらないようである。段ボール箱が受ける荷重は一樣なものもあるが、集中荷重が多いものと考えられ、集中荷重の場合を議論することは、意義あるものと考えられる。

以上のことより、段ボール板の素材構成による異方性を議論し、集中荷重が働く際の段ボール板曲げに関する弾性強度機構を明らかにすることは、段ボール工学上ばかりでなく、構造工学上からも重要なことであると考えられる。

そこで、本報では、まず段ボール板の素材構成による異方性を検討し、板中央位置に、点および面状（長方形）の集中荷重が働く際の段ボール板の弾性変形および弾性応力の解析法を導出し、この解析法によって、所定の形状をした段ボール板の変形および応力解析おこない、その特性を議論することを試みた。

2. 応力解析

集中荷重による段ボール板曲げの本変形解析表示の導出には、まず、議論に必要な板曲げの弾性方程式を考え、次に、集中荷重を受ける段ボール板の曲げ変形に適した変形表示の議論をおこなう。そして、これに適した弾性係数を議論する。

2.1 曲げのための異方性弾性方程式

段ボールの部材である KL（段ボールの両表面の部材）および中芯（段ボールの波状部材）の原紙の力学的強度は強い異方性を示す¹⁾。すなわち、引張り強度は流れ方向（フルートの流れ方向：図 1 の MD）の値が横方向のものより 2~3 倍大きいことが示されている¹⁾。また、段ボールの構造からも異方性が生じるものと考えられる。

板状の素材 KL の縦方向を x 方向、横方向を y 方向に、段ボール板の厚さ方向を z 方向（段ボールの厚さ中央位置を $z=0$ ）にする（図 1 参照）。そして、板の中央位置を原点 o とする。周知の異方性板の弾性変形理論にしたがい、 x , y 方向の垂直応力 σ_x , σ_y およびせん断応力 τ_{xy} を

$$\sigma_x = E_x' \varepsilon_x + E' \varepsilon_y \quad \cdots \cdots (1a)$$

$$\sigma_y = E_y' \varepsilon_y + E' \varepsilon_x \quad \cdots \cdots (1b)$$

$$\tau_{xy} = G' \gamma_{xy} \quad \cdots \cdots (1c)$$

で、曲げ変形による垂直ひずみ ε_x , ε_y およびせん断ひずみ γ_{xy} を

$$\varepsilon_x = -z \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad \varepsilon_y = -z \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad \cdots \cdots (2a)$$

$$\gamma_{xy} = -z \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \quad \cdots \cdots (2b)$$

で表す²⁸⁾。 E_x' , E_y' , E' , G' は異方性特性を示す弾性係数であり、 w は z 方向の変位（たわみ）である。

Fig.1 Coordinates (x , y , z) and loading ($P=1$ N) for SWCF supported in four edges (plate of width $L_b=400$ mm and height $H_b=200$ mm)
MD is maching direction and CD is cross direction.

これらのことにより、KL の x , y 方向の垂直応力 σ_x , σ_y およびせん断応力 τ_{xy} は

$$\sigma_x = -z \left[E_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + E_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] \quad \dots\dots (3a)$$

$$\sigma_y = -z \left[E_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + E_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] \quad \dots\dots (3b)$$

$$\tau_{xy} = -zG \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad \dots\dots (3c)$$

で表される。

異方性材に関するひずみ・応力の弾性方程式は

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_x}{E_{xx}} - \frac{\nu_{xy}\sigma_y}{E_{xy}} \quad \dots\dots (4a)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_y}{E_{yy}} - \frac{\nu_{yx}\sigma_x}{E_{xx}} \quad \dots\dots (4b)$$

で表す²⁷⁾。 ν_{xy} は KL の y 方向の引張りによる x 方向のひずみの寄与すなわちポアソン比、 ν_{yx} は x 方向引張りの y 方向の寄与を示すポアソン比であり、 E_x および E_y は KL の流れ方向および横方向の縦弾性係数である。

式 (1a, b) を式 (4a, b) に挿入すると、KL の弾性係数 E_x' および E_y' は

$$E_x' = \frac{E_x}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} \quad E_y' = \frac{E_y}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} \quad \dots\dots (5a)$$

$$E' = \nu_{xy} E_x' = \nu_{yx} E_y' \quad \dots\dots (5b)$$

で、弾性方程式 (4a, b) のポアソン比 ν_{xy} と ν_{yx} との比は

$$\frac{\nu_{yx}}{\nu_{xy}} = \frac{E_x}{E_y} = \frac{E_x'}{E_y'} \quad \dots\dots (6)$$

で表される。

2.2 段ボール板の変形表示式

力およびモーメントの釣合い則は、集中荷重を受ける板の際も同様荷重を受けるものと同様に成立つ。したがって、集中荷重においても、着目位置に生じる x , y 軸を曲げる曲げモーメント M_x , M_y およびねじりモーメント M_{xy} は、衆知の関係

$$M_x = \left[D_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + D_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] \quad \dots\dots (7a)$$

$$M_y = \left[D_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + D_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] \quad \dots\dots (7b)$$

$$M_{xy} = -2D_{xy} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad \dots\dots (7c)$$

$$D_x = E_x' T_T^3 / 12 \quad D_y = E_y' T_T^3 / 12$$

$$D_1 = E' T_T^3 / 12 \quad D_{xy} = G' T_T^3 / 12$$

で表されるものと考えられる²⁹⁾。 T_T は板幅である。

集中荷重 P が働く位置を $x = -a \sim a$, $y = -b \sim b$ で

あるとすると、分布荷重 $p(x, y)$ は

$$p(x, y) = P/(ab) = p_0 \quad (-a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b) \quad \dots\dots (8a)$$

$$p(x, y) = 0 \quad (-a > x > a, -b > y > b) \quad \dots\dots (8b)$$

で表せる。すると、両域における M_x , M_y および M_{xy} に関する平衡方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x \partial y} \\ = -p(x, y) = -p_0 \left(-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}, -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2} \right) \end{aligned} \quad \dots\dots (9a)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad \left(-\frac{a}{2} > x > \frac{a}{2}, -\frac{b}{2} > y > \frac{b}{2} \right) \quad \dots\dots (9b)$$

で表され²⁹⁾、これらの式に式 (7a~c) を挿入すると、異方性板の関係

$$\begin{aligned} D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \\ = p(x, y) = p_0 \left(-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}, -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2} \right) \end{aligned} \quad \dots\dots (10a)$$

$$\begin{aligned} D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = 0 \\ \left(-\frac{a}{2} > x > \frac{a}{2}, -\frac{b}{2} > y > \frac{b}{2} \right) \end{aligned} \quad \dots\dots (10b)$$

$$H = D_{K1} + 2D_{xy} \quad \dots\dots (10c)$$

が得られる。

変形条件を考慮した周辺支持板のたわみ w は、

$$w = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1,2,3,\dots} \sum_{n=1,2,3,\dots} A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{L_b}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{H_b}\right) \quad \dots\dots (11)$$

で表せるものと考えられる。この式を式 (10a, b) に挿入すると、係数 A_{mn} は

$$A_{mn} = \frac{B_{mn}}{\left[D_x \left(\frac{m^4}{L_b^4} \right) + 2H \left(\frac{m^2 n^2}{L_b^2 H_b^2} \right) + D_y \left(\frac{n^4}{H_b^4} \right) \right]} \quad \dots\dots (12)$$

で表せる。 B_{mn} は係数である。

式 (10a, b) の条件を考慮すると、分布荷重 $p(x, y) (= P/(4ab))$ が板中央の域 (x 方向に $\pm a$, y 方向に $\pm b$) に働く際 (図2を参照)、級数の直交性により、係数 B_{mn} は

$$\begin{aligned} B_{mn} = \left(\frac{4p_0}{L_b H_b} \right) \int_{x=-a}^{x=a} \int_{y=-b}^{y=b} \cos\left(\frac{m\pi x}{L_b}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{H_b}\right) dx dy \\ = \left(\frac{16p_0}{\pi^2 mn} \right) \sin\left(\frac{m\pi a}{2L_b}\right) \sin\left(\frac{n\pi b}{2H_b}\right) \end{aligned} \quad \dots\dots (13)$$

Fig.2 Distribution $p(x, y) (= p_0)$ for concentration load and its position.

で表せるものと考えられる。すると、 $a=0$ または $b=0$ を近似的に零とみなすと、線荷重状態となり、 B_{mn} は各

$$B_{mn} = \left[\frac{8 p_0}{\pi n} \right] \sin \left[\frac{n \pi b}{2 H_b} \right] \quad (a=0) \quad \cdots \cdots (14 a)$$

$$B_{mn} = \left[\frac{8 p_0}{\pi m} \right] \sin \left[\frac{m \pi a}{2 L_b} \right] \quad (b=0) \quad \cdots \cdots (14 b)$$

で表せる。 a および b を近似的に零とみなすと、点荷重状態となり、その B_{mn} は

$$B_{mn} = \left[\frac{4 P}{L_b H_b} \right] \quad (a=0, b=0) \quad \cdots \cdots (15)$$

で表せる。式(11)が本変形表示の基本となるたわみ表示式である。

w の値がわかれば、(7 a~c) により、 M_x 、 M_y 、 M_{xy} が、式 (3 a~c) より、 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} が明らかになる。式 (7 a~c) により、得られる関係²⁹⁾

$$Q_x = \frac{\partial}{\partial x} \left[D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + H \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \quad \cdots \cdots (16 a)$$

$$Q_y = \frac{\partial}{\partial x} \left[D_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + H \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \quad \cdots \cdots (16 b)$$

を用いて、 x 、 y 方向のせん断力 Q_x 、 Q_y が明らかになる。 Q_x 、 Q_y が明らかになれば、 x 、 y 方向の辺の支持力 $R_x (=Q_x)$ 、 $R_y (=Q_y)$ が明らかになる。

2.3 段ボールの異方性弾性係数

中芯の縦弾性係数については縦方向の係数が 2.55×10^3 、 2.24×10^3 (N/mm²)、横方向の係数が 1.33×10^3 、 1.12×10^3 (N/mm²) であること³⁰⁾が示され、KL については各 6.15×10^3 、 2.37×10^3 (N/mm²) であること²⁾が示されている。そこで、前報⁽¹³⁾⁻⁽¹⁷⁾にならって KL の縦弾性係数は、中芯の 2 倍であるとし、

$$\begin{aligned} E_{xkl} &= 2.80 \times 10^3 \text{ (N/mm}^2\text{)} \\ E_{ykl} &= 1.40 \times 10^3 \text{ (N/mm}^2\text{)} \\ E_{kx0} &= 5.60 \times 10^3 \text{ (N/mm}^2\text{)} \end{aligned} \quad \cdots \cdots (17)$$

$$E_{ky0} = 2.80 \times 10^3 \text{ (N/mm}^2\text{)} \quad \cdots \cdots (18)$$

であるとする。

段ボールの曲げ強度を支えているものは KL であり、大きな応力値および最大応力は KL およびその表面にある。そこで、KL 表面の応力状況を主に以下議論する。

流れ方向⁽⁸⁾⁻⁽¹²⁾およびそれに直角な方向⁽¹³⁾⁻⁽¹⁷⁾の曲げは既に前報で議論した。その結果、実用段ボール³¹⁾ (中芯の厚さ、 $T_s=0.24$ mm、波長 $L=9.2$ mm、波高 $h=4.6$ mm、KL の厚さ $T_k=0.30$ mm) の際、単位幅当たりの曲げモーメント 1 N を受ける段ボール KL の外表面の両方向の曲げ応力の比 $R (= \sigma_x / \sigma_y)$ は、近似的に、

$$R = \sigma_x / \sigma_y = 0.6855 / 0.6226 = 1.1010 \quad \cdots \cdots (19)$$

で表せる。したがって、その段ボール板の KL の流れ方向と横方向の曲げ強度比 $R_0 (= E_x / E_y)$ を

$$R_0 = E_x / E_y = E_{kx0} / (E_{ky0}) = 1.8165 \quad \cdots \cdots (20)$$

であるとする。

式(6)および式(20)によって、 E_x および ν_{xy} がわかれば E_y および ν_{yx} を求めることができる。Jones の KL 以外の紙および石測²¹⁾が示すポアソン比は 0.1 程度である。そこで、 $\nu_{yx}=0.1000$ とし、式(6)によって、 ν_{xy} を 0.0551 であるとする。

$E_x = 2 E_{kx0}$ とおくと、式 (5 a, b)、(20) および Horio ら³²⁾、林¹⁹⁾の関係式より、本両面段ボールの諸係数は

$$E_x' = 2.0111 \times E_{ky0}, \quad E_y' = 1.1071 \times E_{ky0} \quad \cdots \cdots (21 a)$$

$$E' = 0.2251 \times E_{ky0}, \quad G' = 0.6970 \times E_{ky0} \quad \cdots \cdots (21 b)$$

$$\nu_{xy} = 0.0551, \quad \nu_{yx} = 0.1000 \quad \cdots \cdots (21 c)$$

で表せ²⁷⁾、 D_x 、 D_y 、 D_1 、 D_{xy} は

$$D_x = 1.676 E_{ky0} (h + 2 T_k + T_s)^3 \times 10 \quad \cdots \cdots (22 a)$$

$$D_y = 9.226 E_{ky0} (h + 2 T_k + T_s)^3 \times 10^2 \quad \cdots \cdots (22 b)$$

$$D_1 = 1.876 E_{ky0} (h + 2 T_k + T_s)^3 \times 10^2 \quad \cdots \cdots (22 c)$$

$$D_{xy} = 5.808 E_{ky0} (h + 2 T_k + T_s)^3 \times 10^2 \quad \cdots \cdots (22 d)$$

で表せる²⁷⁾。

3. 結果と考察

本解析では、板中央に一点または面状 (長方形) の集中荷重 ($P=1$ N) が働く際の長方形段ボール板 ($L_b=400$, $H_b=200$ mm) を議論する。そして、荷重分布形状変化に伴うたわみ w 、板の支持力 R_x 、 R_y 、応力の分布状況を議論する。

変形を支える主要な部材は、曲げモーメント軸が流れ方向⁽⁸⁾⁻⁽¹¹⁾およびそれに垂直な方向⁽¹³⁾⁻⁽¹⁷⁾の単純曲げ解析によると、曲げ強度を支える主要な部材は KL である。したがって、応力の議論は KL 表面についておこなう。基本となるたわみ表示式⁽¹¹⁾は、 m および n が次

数1から ∞ までの和であるが、1から80までのものにした。

Fig. 3(a), (b) Pattern of deflection w .

Fig. 4 Pattern of supporting loads R_x and R_y .

3.1 たわみ w の状況

たわみ w がわかれば、式 (7a~c) より M_x, M_y, M_{xy} が、式 (3a~c) より応力 σ_x および σ_y, τ_{xy} が求まり、前報の処方²⁷⁾ にならない、中芯の応力 σ_{bs} および σ_{sy} の値が明らかになる。また、式 (2a, b) より、ひずみが明らかになる。このように、 w は、板の変形解析の議論には重要な値である。

そこで、 w と位置 x および y との関係を明らかにするために、長方形板の w の値を求めた。その長方形板の x, y 方向に沿った位置の値の概況を示したものが図3である。図3より、 w は、 x, y 軸に対称的に生じ、荷重分布域の形状によらず、荷重位置で最大となり、周辺では零となる分布を示すことがわかり、 a, b の減少によって分布形状の変化は僅かで、その傾向はほぼ同様であることがわかり、板中央位置に集中した分布を示すことがわかる。

以上の解析結果は、周辺の変形条件を満たし、妥当なものであると考えられる。

Fig. 5(a), (b) Pattern of normal stress σ_x .

3.2 板周辺の支持力

式 (16 a, b) より求められる $x=0, y=0$ のせん断力が板周辺の支持力 R_x および R_y である。そこで、この関係によって上記の長方形板の R_x および R_y を求め、そ

れらの分布状況の概況を図 4 に示す。

図 4 より、各辺の R_x, R_y については、荷重幅 $a=0$ 付近を除くと、各辺の R_x と R_y との相異は僅かで、それら支持力は同様な分布状態をし、 x, y 軸に対し対

Fig. 6(a), (b) Pattern of normal stress σ_y .

Fig. 7(a), (b) Pattern of shearn stress τ_{xy} .

Fig. 8 Relationships between a, b and W_{max} .

Fig. 9 Relationships between a, b, R_{xmax} and R_{ymax} .

称的に生じ、荷重中央位置付近で最大値となり、辺の4隅の値は各零となることがわかる。しかし、荷重分布幅 $b=0, H_b/8$ のものは、荷重中央に対し両荷重位置極付近側（4点）で極大（最大値）が生じ、中央位置（ $x=0$ ）でごく弱い極小値が生じる。

3.3 応力状況

(17a~c)により、上記の長方形両面段ボールのKL表面の応力 σ_x , σ_y および τ_{xy} と x および y との関係性を求めた。

σ_x , σ_y と x 方向, y 方向に沿った位置との関係性を示したものが図5,6である。

図5,6より、大きな値の σ_x および σ_y は、 x, y 軸に対称的に生じ、荷重分布形状によらず荷重位置に強く集中し、荷重位置でその最大値が生じることが、周辺では共に零であることがわかり、 b の減少によって、それらの分布は板中央位置に強く集中化すること

がわかる。また、 a の減少によっても同様なことが位置 x に対していえる。

x 方向, y 方向に沿った位置のせん断応力 τ_{xy} の値を示したものが図7である。図7より、 τ_{xy} は荷重位置では零であり、荷重位置付近では、反対称的に生じていることがわかり、 $x=L_b/4$ または $y=H_b/4$ 付近を通る際の $|\tau_{xy}|$ は、極大、極小が順次生じるような分布を示すが、周辺付近は単純な増加傾向を示すことがわかる。そして、 $|\tau_{xy}|$ の最大値は4位置（ $x=\pm L_b/4, y=\pm H_b/4$ ）付近に生じる。

3.4 w および R_x, R_y の最大値

板の形状による破壊および周辺部の破壊は w および R_x, R_y に強く影響する。したがって、それらの最大値 $w_{max}, R_{xmax}, R_{ymax}$ と荷重分布状態との関係性を求めた。その概略を図8,9に示す。

図8より、 a, b の増加によって、 w_{max} は顕著に減少し、その減少の傾向は順次増加することがわかる。

図9より、 a, b の増加によって、 R_{xmax}, R_{ymax} は、共に、始めは僅か増加し、その後緩やかに減少することがわかり、荷重分布状態による変化は僅かであることがわかる。

3.5 $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$ の最大値

板の応力破壊は $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ に強く影響する。したがって、それらの最大値 $\sigma_{xmax}, \sigma_{ymax}, \tau_{ymax}$ と荷重分布状態との関係性を求めた。その概略を図10~12に示す。

図10,11より、 a, b の増加によって、 $\sigma_{xmax}, \sigma_{ymax}$ は顕著に減少することがわかる。そして、 b による $\sigma_{xmax}, \sigma_{ymax}$ と a との関係の変化は顕著に生じるが、 a によるそれらの関係の変化は僅かであることがわかる。

Fig. 10 Relationships between a, b and σ_{xmax}

Fig. 11 Relationships between a, b and σ_{ymax}

Fig. 12 Relationships between a, b and τ_{ymax}

図12より, $\tau_{xy\max}$ は, a の増加によって僅か増加し, b の増加によって僅か減少することがわかる。そして, a または b の増加による $\tau_{xy\max}$ の変化は b または a の値によらずほぼ類似した値を示すことがわかる。以上のことを考慮すると, a, b による $\tau_{xy\max}$ の増減の有り方は形状の設定 $L_b > H_b$ にあるものと考えられる。

なお, $w, R_x, R_y, \sigma_x, \sigma_y$ 値の荷重位置付近に生じる最大値への集中化は, σ_x, σ_y が最も強く, 次に, R_x, R_y , そして, w であることがわかる。

以上のことより, 本結果の応力分布状況は, 諸変形条件に適合し, 妥当な結果が得られたものと考えられる。

4. 結 言

周辺を支持した両面段ボール板面中央に一点, または, 面状(長方形)の一樣集中荷重が働く際の弾性変形表示を導出した。そして, その段ボール板(流れ方向 $L_b = 400$, 横方向 $H_b = 200$ mm)のたわみ, 応力の状況を議論した。議論に用いた両面段ボールの形状は, クラフトライナー(KL)の厚さ $T_k = 0.30$ mm および中芯の厚さ $T_s = 0.24$ mm, 波長 $L = 9.2$ mm, 波高 $h = 4.6$ mm とし, 縦弾性係数は, 流れ方向(x 方向)のKLについては $E_{kx0} = 5.6 \times 10^3$ N/mm², 中芯については $E_{sx0} = 2.8 \times 10^3$ N/mm², それに直角な方向(y 方向)については各 $E_{ky0} = 2.8 \times 10^3$ N/mm², $E_{sy0} = 1.4 \times 10^3$ N/mm² とした。KLの x 方向の引張り変形の y 方向への寄与を示すポアソン比 ν_{kxy} は 0.10 とした。

得られた結果は, 次のようなことである。

- (1) たわみ w は, 板中央位置(荷重の中央位置)に対し対称的に生じ, その中央位置で最大となり, 周辺が零となるように分布する。
- (2) 流れ方向(x 方向)およびそれに横方向(y 方向)に沿った4周辺に生じる支持力 R_x および R_y は, 板中央位置近い位置に対して対称的に生じ, 辺中央位置付近で最大となり, 4隅で零となる。
- (3) x 方向および y 方向のKL表面の垂直応力 σ_x および σ_y は板中央位置に対して対称的に生じ, その位置で最大となり, 板周辺部では零である。
KL表面のせん断応力 τ_{xy} は, 荷重位置に対し反対称的に生じる。 $y = H_b/4$ または $x = L_b/4$ の際, x または y の増加に伴って, $|\tau_{xy}|$ は, 極大, 極小が順次生じるように変化するが, 周辺付近では, 隅に近づくに伴って単純に減少する。 $|\tau_{xy}|$ の最大値は4位置($x = \pm L_b/4, y = \pm H_b/4$)付近にある。
- (4) x, y 方向の荷重分布幅 $2a, 2b$ の増加によって,

w の最大値 $w_{\max}$ は顕著に減少し, その減少の傾向は順次増加する。 a, b の増加によって, R_x, R_y の最大値 $R_{x\max}, R_{y\max}$ は, 共に, 始めは僅か増加し, その後顕著に減少する。荷重分布状態による $R_{x\max}, R_{y\max}$ 値の変化は僅かである。

- (5) a, b の増加によって, σ_x, σ_y の最大値は $\sigma_{x\max}, \sigma_{y\max}$ は顕著に減少し, その減少の傾向は順次増加する。 $L_b > H_b$ の際, $\tau_{xy\max}$ は, a の増加によって僅か増加し, b の増加によって僅か減少する。そして, a または b の増加による $\tau_{xy\max}$ の変化は, a または b によらず類似する。
- (6) $w, R_x, R_y, \sigma_x, \sigma_y$ 値の荷重位置付近に生じる最大値の集中化は, σ_x, σ_y が最も強く, 次に, R_x, R_y , そして, w である。

段ボールは包装材として重要なものであり, このように段ボール箱の側面に集中荷重を受ける段ボール箱の使用例は, 豊富に見受けられる。しかし, 段ボール箱およびそれに適する板の一基本的な強度, すなわち, 集中荷重下における強度の基礎的研究は, 見当たらないようである。したがって, 本研究の結果は, 段ボールの工学上ばかりではなく, 材料工学, 構造工学上からも意義あるものと考えられる。

文 献

- 1) 松島成夫, 奥田隆宏, 宮内治, 野沢光治: 紙パ技協誌 36 (3) 377-387 (1982)
- 2) Alan R. Jones: Tappi 51 (5) 203-204 (1968)
- 3) 松島成夫, 矢野忠, 松島晟: 紙パ技協誌 42 (5) 480-486 (1988)
- 4) 松島成夫, 矢野忠, 松島晟: 紙パ技協誌 43 (6) 602-609 (1989)
- 5) 松島成夫, 矢野忠, 松島晟: 紙パ技協誌 44 (5) 605-613 (1990)
- 6) 松島成夫, 矢野忠, 上田康, 松島理: 紙パ技協誌 47 (10) 1263-1270 (1993); 松島理, 松島成夫, 矢野忠: 紙パ技協誌 48 (8) 068-1077 (1994)
- 7) 松島理, 松島成夫: 日本包装学会誌 5 (2) 107-118 (1996)
- 8) 松島成夫, 矢野忠, 松島晟, 横田俊昭: 紙パ技協誌 45 (4) 480-486 (1991)
- 9) 松島成夫, 矢野忠, 松島晟, 横田俊昭: 紙パ技協誌 46 (5) 668-678 (1992)
- 10) 松島成夫, 矢野忠, 松島晟, 横田俊昭: 紙パ技協誌 47 (4) 517-528 (1993)
- 11) 松島成夫, 矢野忠, 松島理: 紙パ技協誌 48 (4) 600-611 (1994)
- 12) 松島成夫, 矢野忠, 松島理: 紙パ技協誌 49 (6)

- 956-966 (1995)
- 13) 松島理, 松島成夫: 日本機械学会論文集, 60 (576 A), 1814-1820 (1994)
 - 14) 松島理, 松島成夫: 日本機械学会論文集, 61 (587 A), 1601-1607 (1995)
 - 15) 松島理, 松島成夫: 紙パ技協誌 50(9)1299-1308 (1995)
 - 16) 松島理, 松島成夫: 紙パ技協誌 51(9)1356-1365 (1996)
 - 17) 松島理, 松島成夫: 日本機械学会論文集, 63 (583 A) (1997), 1525-1562 (1997)
 - 18) S. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger: Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill, 366-369 (1959)
 - 19) 林毅: 航空学会誌 8 (79) 601-626 (1941).
 - 20) 渋谷巖: 航空学会誌 7 (61) 393-424 (1940); 8 (7) 267-278 (19741)
 - 21) 石淵浩, 木村稔, 吉沢昭宜, 佐久田博司, 吉谷豊: 日本機械学会論文集, 59 (557 A), 156-162 (1993)
 - 22) Sa. Matsushima and S. Matsushima: Jpn. Jour. Appl. Phys. 35 (Part, 2 A), 786-792 (1996).
 - 23) G. G. Maltenfort: Tappi, 53 (11), 1076-1079 (1970); P. Grartagains: Tappi 58 (11) 102-108 (1975); R. M. Morris Jr and G. P. Van Liew: Tappi, 58 (11), 110-113 (1975)
 - 24) M. Litt: J. Colloid Sci. 16 (3), 297-310 (1961)
 - 25) J. K. Craver and D. L. Taylor: Tappi, 48 (3), 142-147 (1965); J. Kubat and B. Lindbergson: Svensk Papperstid, 68 (21), 743-756 (1965)
 - 26) 川端洋一: 日本包装学会誌 6 (1) 19-23; 24-29 (1997)
 - 27) 松島理, 松島成夫: 日本機械学会論文集 64 (618 A), 615-621 (1998).
 - 28) S. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger: Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill, 364-366 (1959)
 - 29) 例えば, 28)の P. 79-83.
 - 30) たとえば, 段ボール実用百科編集委員会: 段ボール実用百科, 包装産業新聞社, 118-128 (1970)
 - 31) たとえば, 30)の P. 64-69.
 - 32) M. Horio and S. Onogi: J. Appl. Phys. 22 (7) 971-976 (1951)

(受理: '00.5.17)

両面段ボール板の弾性曲げ変形解析

—中央位置に点・面一様集中荷重を受ける周辺支持板の場合—

帝人製機株式会社 松山工場 松島 理

愛媛大学 松島 成夫

点、面（長方形）状集中荷重を受ける4辺支持異方性両面段ボール長方形板（ $L_0=400$, $H_0=200$ mm）の応力および変形の弾性解析を試みた。その解析によって得られた長方形一様応力分布を議論し、その特性を明らかにした。得られた結果は以下のようなものである。段ボールのたわみ w は、板の中央位置に強く生じ、4周辺では零であり、 w の最大値 w_{max} は板中央位置にある。KL 外表面の流れ方向（MD）および横方向（CD）の垂直応力 σ_x , σ_y は板中央位置にあり、4周辺では零である。それら応力の最大値 σ_{xmax} , σ_{ymax} は板中央位置にあり、 w , σ_x , σ_y は中央位置を通る x , y 軸に對し対称的に生じる。KL 外表面のせん断応力 τ_{xy} は、板中央に對して反対称的に生じ、その最大値は板中央から $x=\pm L_0/4$, $y=\pm H_0/4$ の4位置付近に生じる。

(本文 73 ページ)

塗工層乾燥過程におけるラテックスとデンプンの相互作用

東京大学 大学院農学生命科学研究科 池田 敦, 江前敏晴, 尾鍋史彦

乾燥過程で発生する塗工紙のバインダーマイグレーションを、ラテックスとデンプンの相互作用の観点から考察した。ラテックス及びデンプンが、急激な乾燥工程を経た結果、塗工層表層に集中する現象はバインダーマイグレーションとして知られている。ラテックスのバインダーマイグレーションは、コバインダーとしてデンプンを添加した場合に発生しやすく、その程度は、デンプンの添加量を増やすにつれて促進された。デンプンの重合度が約 33 のデキストリンの添加は、重合度数百のリン酸エステル化デンプンに比べ、激しいラテックスのマイグレーションを引き起こしたが、グルコースでは、その影響は少なかった。デンプン自体のマイグレーション量も同様の傾向が見られた。デンプンの荷電は、ラテックスのマイグレーションに影響を与えなかった。アニオン性のリン酸エステル化デンプンでもノニオン性のヒドロキシルエチルデンプンでもラテックスとデンプンのマイグレーション挙動に差がなかった。ラテックスのマイグレーションを誘発するデンプンの特異性は、乾燥が進んで固形分濃度が高くなるとゲル化を起こしやすい性質にあると考えられる。塗工層の急激な乾燥で表層付近のデンプン及びラテックスの濃度が高くなり、その時にゲル化が起これば、急激な粘度の上昇を招き、デンプン分子及びラテックス粒子の拡散速度は大幅に低下する。すると、表層でのデンプン及びラテックス濃度が高いまま完全に乾燥固化する。これが、デンプン添加時のマイグレーションの原因になると予測した。

(本文 82 ページ)