線汚染源の計算方法について

松 浦 孝 行

産業医科大学数学教室

要 旨: 自動車排ガスによる大気汚染のシミュレーションは、一般に道路を線汚染源（以下線源という）とみなして行われる。その場合に用いられる拡散モデル式は、基本的に点源式と同一であり、それを道路の形状に沿って積分すれば、線源の拡散式が得られる。被積分関数には、風向と密接なかわり合いがあるパラメータが含まれており、特別な場合を除いて、何らかの形で近似計算を行わなければならない。近似計算のやり方にはさまざまなものがあるが、精度、計算時間、データ作りの手間などの面から評価すると、それぞれ一長一短がある。ここでは、点源近似などいくつかの方式を取りあげ、大型計算機を用いての具体的な近似計算の方法等について論じる。

(1980年7月31日 受付)

自動車排ガスによる大気汚染の予測を行う場合、交通量の多い道路からの拡散計算は、道路を線源扱いにして行われる。一般には、適当な区間を直線で近似し、その区間内では、予測対象の汚染物質の排出量が一定であるとみなして計算を行う。以下本稿においても、特にことわらない限り、道路は直線状であるとする。

線源式は、点源式を道路に沿って積分することによって得られる。点源式としては、有風時の Plume モデルの地表濃度を与える式(総量規制マニュアル, 1975)を用いて、線源の計算方法を考えてみたい。Plume モデルの地表濃度を与える点源式は、

$$C(x, y) = \frac{Q}{\pi \sigma_y \sigma_z U} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right) \exp\left(-\frac{H^2}{2\sigma_z^2}\right)$$

ここで、

x : 風向に沿った風下距離(m)

y : x 軸に直角な水平距離(m)

U : 風速(m/s)

Q : 排出源強度(cc/s)

H : 有効排出源高(m)

σ_y : y 軸方向の濃度の標準偏差, x の関数で拡散式中の拡散パラメータである(m)

σ_z : z 軸方向の濃度の標準偏差, x の関数で拡散式中の拡散パラメータである(m)

$C(x, y)$: (x, y) 地点における地表濃度(ppm)

まず特別な場合として、線源が風向と直角に延びている無限線源であるときを考える。この場合には、予測点を定めると、線源上の各点に対する x の値が一定であるから、

$$Q = q dy$$

とおけば、予測点における地表濃度 $C(x)$ は、以下の式により得られる。

$$\begin{aligned} C(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q}{\pi \sigma_y \sigma_z U} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right) \exp\left(-\frac{H^2}{2\sigma_z^2}\right) dy \\ &= \frac{q}{\pi \sigma_y \sigma_z U} \exp\left(-\frac{H^2}{2\sigma_z^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right) dy \\ &= \frac{2q}{\pi \sigma_y \sigma_z U} \exp\left(-\frac{H^2}{2\sigma_z^2}\right) \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right) dy \end{aligned}$$

c を定数とすると、

$$\int_0^{\infty} \exp(-c^2 x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2|c|} \quad (c \neq 0)$$

であるから、

$$\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right) dy = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \sigma_y$$

となる。従って、

$$C(x) = \frac{2q}{\sqrt{2\pi} \sigma_z U} \exp\left(-\frac{H^2}{2\sigma_z^2}\right) \quad \dots\dots(1)$$

以上により、この場合にはきれいに値が求まるが、次に2種類の方法により近似値を求めて、値を比較してみる。計算に際して必要な数値は、拡散パラメータ σ_y , σ_z は、Sutton の方法に従って風下距離の関数として与え、その他風速 2 m/s, 有効排出源高 2 m など適当に定めた。

(i) 点源分割による近似

風下軸と線源が交わる点を原点として、原点の両側それぞれ3kmずつ線源をとる。計 6km の線源を 100 m ずつ 60 個の区間に分割し、各区間の中央にそれぞれ点源をひとつずつ置いて、その区間を代表させる。原点から予測点までの距離をいくつか変化させて、値の比較を行った。結果は Table 1 の通り。

Table 1. Comparison of values (pphm)

Distances (m)	Infinite continuous-line source	Approximation by point sources
150	1.164451	1.164446
300	0.640682	0.640681
450	0.450201	0.450200
600	0.350274	0.350273
1200	0.191141	0.191140

この表によって明らかなように、この点源分割による近似の方法によれば、極めて精度の高い近似値が得られる。道路近傍の予測をする場合には、原点付近に点源を多くとれば、点源分割する範囲をかなり狭くしても、やはり精度の高い近似値が得られるであろう。さらにこの方法は、インターチェンジ付近など道路が曲りくねっていたり、道路の高さがさまざまに変化していたりする場合にも、非常に有用である。一方、点源の数を多くすれば計算時間が点源数に比例して多く必要となり、またデータ作りにも他の方法にくらべて比較的手間がかかる。つまり、精度は高いが、費用の制約が大きい場合には適さないということになる。

(ii) Receptor oriented model

予測点から線源を見て、風下軸の両側それぞれ角度 θ 以内の範囲の線源だけが予測点に影響を与えるものとする。 θ としては、22.5° など各種の値が

とられているが、ここでは少し大きめにとり、45° とした。従って Fig. 1 の場合、線分ABの範囲で積分を行えばよい。有限線源に対する定積分は、無限線源に対する定積分よりかなり面倒であるが、最終的には、

$$\int_0^a \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right) dy \quad (0 \leq a < \infty) \quad \dots\dots(2)$$

の形の定積分を求めることに帰着するので、次の近似公式（電子計算機のための数値計算法Ⅱ, 1967）が使える。

Fig. 1. Receptor oriented model.

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt = 1 - \frac{1}{(1 + \sum a_i x^i)^{16}} \quad (0 \leq x < \infty)$$

$$a_1 = 0.07052 \quad 30874$$

$$a_2 = 0.04228 \quad 20123$$

$$a_3 = 0.00927 \quad 05272$$

$$a_4 = 0.00015 \quad 20143$$

$$a_5 = 0.00027 \quad 65672$$

$$a_6 = 0.00004 \quad 30638$$

結果は Table 2 の通り。点源分割による方法にくらべると、明らかに精度が低いが、誤差の範囲はわずかで、しかも線源から離れるほど精度がよくなっている。従って、道路近傍の濃度を計算する場合には精度の点で問題があるが、予測点が道路からある程度離れている場合には、実際には無限線源というものは存在しないこともあり、有用な方法であろう。逆の見方から、「線源に直角に風が吹いている場合、計算点から見て線源が $\pm 45^\circ$ 以上に延びている時には、無限線源として計算して差しつかえなく、

Table 2. Comparison of values (pphm)

Distances (m)	Infinite continuous-line source	Receptor oriented model
150	1.164	1.081
300	0.641	0.609
450	0.450	0.433
600	0.350	0.339
1200	0.191	0.187

その際 σ_y は考えなくてもよい」としている報告 (川瀬, 1975) もある。

以上, 2種類の近似方法について述べてきたが, 結局, 道路近傍においては点源分割, 道路からある程度 (100–150 m) 離れた場合には, receptor oriented model を用いればよいということになる。

次に, 予測点を通る風下軸に対して, 線源が直角ではなく, 斜めに傾いている場合を考える。

この場合には, 線源上の異なった点をとると, 予測点に対する x, y の値がともに異なるため, 無限線源についても, 定積分を簡単に行うことはできない。しかし, 直角風の場合同様, 点源分割によって, かなり精度の高い近似値を得ることができる。

また, 簡便な近似方法として, 風下軸と線源がなす角を α とするとき, たとえば式 (1) において, q の代わりに $q/\sin\alpha$ を用いて,

$$C(x) = \frac{2q}{\sqrt{2\pi}\sigma_z\sin\alpha} \exp\left(-\frac{H^2}{2\sigma_z^2}\right) \dots\dots (3)$$

とする方法も提案されている (新良, 1975; 他)。

この方法を用いて実際に試算してみると, たとえば風下軸と線源が交わる点から予測点までの距離が 300 m のとき, $\alpha=45^\circ$ の場合,

点源近似 0.873 式 (3) 0.906

かなりよく一致している。しかし $\alpha=30^\circ$ の場合を計算してみると,

点源近似 1.099 式 (3) 1.281

式 (3) のほうが相当高い値となる。この点について, 式 (3) の使用は $\alpha>45^\circ$ の場合に限るとしている文献 (Marchello, 1976) もある。一方では, 「無限線源で風が斜めに吹いても 45° 付近までは風の方角の影響はほとんどなく, その濃度は直角風で計算した濃度とほぼ同じである」という報告 (川瀬, 1975) もあり, 無限線源に対しては, この方法はそれほど有用とはいえ

ないであろう。

しかし, 有限線源に対してはどうであろうか。直角風のときの第 2 の近似方法と同様, 予測点から線源を見て, 風下軸の両側それぞれ角度 45° 以内の範囲の線源だけが予測点に影響を与えるとしてみよう。この方法と式 (3) の方法を組合せた方式 (以下, 有限線源方式という) による線源式は,

$$C(x) = \frac{q}{\pi\sigma_y\sigma_z U \sin\alpha} \exp\left(-\frac{H^2}{2\sigma_z^2}\right) \times \int_a^b \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right) dy$$

となる。積分限界 a, b の関係はさまざまな場合が考えられるが, いずれの場合も結局は式 (2) の形の定積分を求めることに帰着する。そこで, 前と同じ近似公式を用いて試算すると, Table 3 のようになる。ただし, ここの距離は, 風下軸と線源が交わる点から予測点までの距離であって, 線源と予測点との最短距離ではない。 $\alpha=30^\circ$ である。

Table 3. Comparison of values (pphm)

Distances (m)	Approximation by point sources	Finite continuous-line source
150	1.802	1.736
300	1.099	0.979
450	0.789	0.698
600	0.610	0.549
1200	0.322	0.307

Fig. 2. Finite continuous-line source.

値の違いはそれほど大きくない。従ってこの有限線源方式を、近似の1方法として使用することができよう。そこで、この方式を実際に用いての計算方法について考えてみたい。

風向は16方位とする。Fig. 2の①-⑯は、それぞれ①-⑯のほうから予測点に向かって吹く風を表す。実際の線源と予測点の位置関係がどのようになっているとしても、線源と予測点に対してFig. 2と同じ形になるように、風向の番号①-⑯を定め、かつ風向①の風下軸と線源とのなす角 α が $\alpha < 22.5^\circ$ となるようにすることができる。また、線源と予測点との最短距離を l とする。

このとき、たとえば風向①に対する積分の範囲は、

$$(-\infty, -l \tan(-\frac{\pi}{4} - \alpha)] \text{ であり、これは、}$$

$$[0, \infty) - [0, l \tan(-\frac{\pi}{4} - \alpha)]$$

と変形することによって、式(2)の形の積分に帰着する。同様に、各風向に対する積分はすべて式(2)に帰着し、しかも実際には次の9種類の区間に対する定積分の値を計算すればよいことが示される。

$$I = [0, \infty)$$

$$I_1 = [0, l \tan(-\frac{\pi}{4} - \alpha)]$$

$$I_2 = [0, l \tan(-\frac{3}{8}\pi - \alpha)]$$

$$I_3 = [0, l \tan(-\frac{\pi}{2} - \alpha)]$$

$$I_4 = [0, l \tan(-\frac{3}{8}\pi + \alpha)]$$

$$I_5 = [0, l \tan(-\frac{\pi}{4} + \alpha)]$$

$$I_6 = [0, l \tan(-\frac{\pi}{8} + \alpha)]$$

$$I_7 = [0, l \tan \alpha]$$

$$I_8 = [0, l \tan(\frac{\pi}{8} - \alpha)]$$

これらの区間によって、各風向に対する積分の区間は次のように表される。

①	$I - I_1$	⑨	$I - I_5$
②	$I - I_2$	⑩	$I - I_6$
③	$I - I_3$	⑪	$I - I_7$
④	なし	⑫	$I_4 + I_8$
⑤	なし	⑬	$I_5 + I_1$
⑥	なし	⑭	$I_6 + I_2$
⑦	なし	⑮	$I_7 + I_3$
⑧	$I - I_4$	⑯	$I - I_8$

以上述べてきた過程からわかるように、この有限線源方式は、線源の位置関係のデータとしては、予測点との最短距離と、たとえば東西方向に対する線源の傾きとの2つがあれば足りる。従って、データ作りが非常に楽であり、便宜的な方法として、場合により有用であろう。

文 献

- 環境庁大気規制課編 (1975): 総量規制マニュアル. 公害研究対策センター.
 新良宏一郎 (1975): 拡散計算法と拡散パラメーターの選び方について. 環境技術研究会.
 川瀬義治 (1975): 自動車排ガスの計算法について. 環境技術研究会.
 山内二郎・森口繁一・一松 信編 (1967): 電子計算機のための数値計算法Ⅱ, 培風館.
 Marchello, J. M. (1976): Control of Air Pollution Sources. Marcel Dekker.

Methods of Calculation of Dispersion from Line Source of Air Pollution

Takahide MATUURA

*Division of Mathematics, School of Medicine, University of Occupational and
Environmental Health, Japan. Kitakyushu 807, Japan*

Abstract: For a continuous-line source such as a freeway, the dispersion equation is obtained by integrating the dispersion equation for a point source. An approximation method is necessary to calculate this definite integral, and so the approximation by point sources and the method of using the error function were studied.

Key words: air pollution, automobile, line source.

J. UOEH, 2 (4): 509—513 (1980)