E 2 1 0 Sand pile model の初期条件と境界条件によって 表れる美しいパターン

館畑 秀衛¹⁾, 木村 龍治²⁾

The beautiful pattern of Sand pile model obtained with conditions of initial and boundary.

Hidee Tatehata, Ryuji Kimura

ABSTRACT

When sand granules continued to be dropped slowly on the top of a Sand pile, the inclination of a slope increases gradually with the sand accumulation, but the inclination continues below a certain angle while the slope repeats large or small sand avalanches. However, it is difficult to predict the time and the scale of sand avalanches on the slope. That is, the sand avalanche has a property of chaos. Unexpectedly, the sand pile collapse is complicated physical phenomenon. Sand pile models are for carrying out the simulation of this sand avalanche phenomenon. BTW model is one of Sand pile models (Bak P., et al, 1988). Although this BTW model is a simple algorithm, many of complicated phenomena in which a sand pile collapses are shown. A characteristic thing is that the quantity and the frequency of the sand which carried out the sand avalanche show a power rule, so this model is used for fundamental research of the self-organization phenomenon. In the original paper of BTW model, the sand particle was added at random on the calculation grid. However, if additional condition is changed into uniform sand-granules sprinkles, and the boundary condition falling from a model, we discover very beautiful patterns appeared.

On the other hand, these patterns were compared with the self-similarity expression technique looked at by the "Mandala" that is one of Eastern religion pictures. From a viewpoint of art, it seems that similarity exists in both of the expression technique of Mandala and the pattern of Sand pile model output. Mandalas are considered as the pictures expressing an Oriental's cosmology. The latest complexity system physics has reported that fractal structure appears in many places of a nature. Moreover, there is also an opinion that the whole space is fractal structure. If these two are taken into consideration, it is natural that the concept of fractal universe is born, but it is a surprising fact that fractal religion pictures were drawn before the time of modern science.

Keywords : Sand pile model, Fractal, Mandala

1. はじめに

Sand pile model とは、砂山崩しモデルとも呼ばれており、砂の斜面が崩落する現象を数値シミュレーションするモデルである。例えば、砂山に一定の速度で砂粒子が追加される場合、大小の崩落を繰り返しながら、ほぼ斜面の傾斜は一定に保たれる (Fig.1)。

砂山が崩れる現象は単純に思われるが、意外に複雑な現象である。例えば、斜面の崩落が発生する時刻、また崩落の規模を予測することは困難であり、砂山の崩落は

カオスの性質を持っている。

Fig.1 Concept of the sand pile model.

Sand pile model の一つ、BTW model は単純なアルゴリズムだが、極めて複雑な動作をする。特に崩落した砂の量と頻度とが冪乗則を示し、自己組織化現象の基礎的研究にも利用されている。

本稿では、BTW model の初期値と境界条件を変化さ

せた場合に BTW model が示す美しいパターンの紹介と、東洋の宗教絵画の一つである曼荼羅に見られる表現手法との共通性について報告する。

2. 計算手法

BTW model は、整数値を扱う離散的なモデルで、砂山の崩落現象は極めて抽象化されている¹⁾。計算格子は2次元に配置され、各格子は砂粒子を最大4個まで積み上げられるとする。ただし4個になると積まれた砂粒子は4方に飛び散って、もとの格子点の砂粒子数はゼロに戻る。飛んだ砂粒子が計算格子の外に飛び出した場合は、そのまま失われる。この散逸規則によって、砂が追加されても計算格子内の砂粒子の総数は一定値以下に保たれる。

砂の追加方法は計算条件の1つであるが、元論文では、格子の上から砂粒が雨滴のようにランダムに降り積もるとしている (Fig.2)。

Fig.2 Diffusion rule of the BTW model.

この計算規則が砂の崩落を表現している事を理解するのは容易ではないが、特定の場所に集中して追加した場合は、Fig.1 のように砂山が形成され、一様に砂粒子を追加した場合は、砂の斜面の傾斜を大きくすることに対応する。砂の追加と砂が失われる散逸の仕方は計算条件であって、シミュレーションしようとする物理過程に合わせて決定すれば良いものである。

3. 計算例

3-1 計算例 1 (砂は四角形の周囲から散逸する。)

初期値として各格子の砂粒子の数を3個とし、砂の追加条件は全格子点に対して1粒づつ、同時に行うとした場合のパターンを示す (Fig.3)。

最初の計算ステージでは、全ての格子点の砂粒子数が4個になるため、Fig.1 に示した拡散と散逸規則にしたがって、掃き出し計算が繰り返され、全ての計算格子が3粒以下になった直後の状態である。

4隅から伸びているハート状のパターンは、砂の雪崩の跡と考えて良い。興味深いのは、1回目の砂の追加によって4隅からそれぞれ1本ずつパターンが伸び、N回目ではN本のパターンに増加する性質がある (Fig.4)。

なぜ砂の追加の回数と同じ本数だけパターンが伸びるのかは、現段階では説明不能である。

Fig.3 An example of the BTW model output.

We add a grain of sand at all lattice points simultaneously. No more sand is added while an avalanche is in progress. The color bar shows the number of sand particles.

Fig.4 Time series of the output patterns.

The number at the lower left of each figure means the number of sand addition.

3-2 計算例 2 (砂は円形の周囲から散逸する。)

計算格子を丸く切り、円形の砂山にした結果を示す (Fig.5)。離散的な計算格子を円形に切ったため、境界上の格子点は一度の掃き出しによって、散逸する粒子数が1~3個と異なっており、ハート型のパターンの発生の仕方も複雑である。

Fig.5 Time series of output pattern in another condition.
Lost condition is round of circular computation lattice only. Additional condition is all the same.

Fig.6 Time series of output pattern in another condition.
Lost condition is to dissipate from the hole of the center of computation lattice. The additional condition is all the same.

3-3 計算例 3 (砂は中心の穴からのみ散逸する.)

縁からの散逸を止め、計算格子の中心からのみ砂が失われていく境界条件とし、砂粒の追加は前同様として得られたパターンを示す (Fig.6).

当然、計算格子の中央を中心としてパターンが広がり、砂時計を真上から観察している様な姿となる。以上の計算結果のパターンは、全てハート型を基本としているのが興味深い。

4. 考察

Sand pile model (BTW model) が美しいパターンを出力する理由を、本質的に説明するのは難しい。しかし、次の様に定性的な説明が可能であろう。

モデルの拡散と散逸規則は、非線形な拡散過程と言える。つまり追加された砂粒が、格子の縁から散逸してゆく物理過程である。

計算例 1, 2 では、2 次元の平面上に一樣な砂粒の追加があり、1 次元である辺、また円周から失われている。つまり、この物理系は入力 が 2 次元なのに対し、出力が 1 次元であるため出力側の次数が不足している。また計算例 3 では、中心の穴はゼロ次元であって、さらに次元が不足している。そこで砂粒の移動にフラクタル構造が表れ、非整数なフラクタル次元によって不足した次元を補っていると考えられる。このように、物理モデルの入力と出力の次元の差からフラクタルの創生を説明することは、例えば館畑 (2008) で試みられている⁸⁾。

5. アート (曼荼羅) と Sand pile model

今回得られたパターンが、曼荼羅に似ているのに驚かされる。

Fig.7,8 Examples of Mandala of Nepal.

Fig.6 ~ Fig.8 は、小さな自然・寺社・仏等で構成されている。Fig.6 の円形パターンをハート型に置き換えると、Fig.3 に良く似ている。Fig.7 の中央には仏が配置されており、それを囲む四角形と円形の間に寺社の景色が配置されているが、全体が Fig.4 に似ている。Fig.8 は Fig.5 に良く似ている。

次に日本の曼荼羅の 1 例を示す (Fig. 9)。この例では、

Fig.6 The "Mandala" of Nepal.

This is a Buddhistic religious painting. The world of heaven and Buddhas are drawn. This picture resembles to the output pattern of Fig.4 or Fig.6.

Fig.7 One of "Mandala" in Japan.

In this example, Each Buddha turned to the front and is geometrically located in a certain rule. Although the members are arranged in two dimensional plane and the perspective techniques are not used, the space may be completely filled with Buddhas.

それぞれの仏が正面を向き、ある規則に従って幾何学的連なっている。構成要素は平面上に配置され、遠近法を使っていないにもかかわらず、存在が空間全てを埋めつくす勢いで表現されている。

6. 結論

なぜ Sand pile model の出力と東洋の宗教がである曼荼羅の印象との間に共通性が感じられるのだろうか。

まず、自然界では極めて多くのフラクタル構造が知られている。地球表面は連続して太陽からのエネルギーを受けており、赤道から両極への熱流は偏西風や台風の中に乱流のフラクタルを生み出す。また、地下からのエネルギーの湧き出しはマントル対流やプレート運動を起こし、その結果である地震を引き起こす。これらを概観すると、エネルギーや物理量の入力が増加速度を超えた場合に発生している。その多くが出力に対して入力の次元を超えている。つまり、その物理系はエネルギー等の散逸をフラクタル構造で再組織化することにより、入出力の次元を調和させているという説明は、多くの場合で正しい様に思われる。

Sand pile model はフラクタルの基礎的研究を超え、最近では地震の研究に応用することさえ行われている⁷⁾。つまり Sand pile model の出力に似たパターンが、自然界にも存在するのは当然と言える。

一方、人間は文明の発展と共に、思考を全地球的な自然や宇宙にまで思考を広げてきた。東洋では多神教が主であり、一神教が主である西洋とは異なっている。宇宙には無数の神が存在するとし、草木の葉一枚、河の流れ、雪の一片にも神(命)が存在すると考える思想さえある。つまり宇宙がフラクタル構造に満たされていることを、東洋では古代から直感していたと思われる。その宇宙観(コスモロジー)が、曼荼羅の形で表現されたのであろう。

フラクタルを示す sand pile model の出力パターンと、東洋の曼荼羅の表現手法との間に感じられる不思議な共通性は、以上が理由と考えられる。

参 考 文 献

- 1) Bak P., C. Tang, K. Wiesenfeld, 1988, Self-organized criticality, Phys. Rev. Lett., 38, pp.364-374
- 2) 木村龍治, 2006, 気象は偶然か (地球物理における偶然と必然), 数理科学 1月号 (2006), pp.48-55
- 3) 都甲潔, 江崎秀, 林健司, 1999, 自己組織化とは何か, 講談社ブルーバックス B1277, p.246
- 4) 杉本太郎, 2002, 複雑システム科学 (放送大学大学院教材), 放送大学振興会, ISBN4-595-13318-9 C1340
- 5) 高安秀樹編, 1987, フラクタル科学, 朝倉書店, ISBN4-254-10063-9 C3040, p.258
- 6) 館畑 秀衛, 2008, 高速型地震発生シミュレーション—地震のフラクタル性を求めて—, 放送大学大学院環境システム専攻修士論文, p.52
- 7) Naoto Yoshioka, 2003, A sand pile experiment and its implications for self-organized criticality and characteristic earthquake, Earth Planets Space, 55, pp. 283-289