数値解析による等加速楕円柱まわりの流れの可視化(続報)

慶大理工 千野 晃・棚橋隆彦・安藤常世

Flow visualization around a uniformly accelerated elliptic cylinder
on a graphic display (Part II)

Akira CHINO* Takahiko TANAHASHI* Tsuneyo ANDO*

In this paper, initial flows around an uniformly accelerated elliptic cylinder in an incompressible fluid are analysed from at rest by the finite difference method, and time histories of streamlines, equi-vorticity lines and drag coefficients are shown. The numerical schemes used here are the DuFort-Frankel technique for solving the vorticity equation and the Fourier series method for solving the stream function. For the latter case, the discrete Fourier transform and the Gauss elimination are applied to the analysis of a block tridiagonal matrix. Especially, with 70 average iterations per time step for the SOR method, the Fourier series method are verified to be more than 10 times faster.

1. まえがき

Navier-Stokes の方程式を基礎として、静止している粘性・非圧縮性流体中で静止状態より等加速度で運動し始める迎え角を持つ楕円柱まわりの流れの初期の局面について、差分近似法を用いて解析した⁽¹⁾。解析結果として、時間経過とともに変化する流線、等渦度線および抗力等の諸係数を求めたのでここに報告する。解析手法として、渦度方程式に対しては DuFort-Frankel 差分スキームを用い、流れ関数方程式に対しては、離散フーリエ変換とガウスの消去法を組み合わせたフーリエ級数法を用いた。特に、後者の手法により大幅な計算時間の短縮がはかられた。

2. 解析方法

2-1 主な記号

a : 焦点距離 b : 加速度 h : 無次元スケール因子 ($=e^{\eta}\sqrt{\cosh^2\eta - \cos^2\theta}$)
 L : 代表長さ ($=ae^{\eta}$) Re : リルズ数 ($=L\sqrt{b}/\nu$) α : 迎え角 τ : 物体表面
 t : 無次元時間 ($=t/\sqrt{b}$, τ は有次元量を示す) w : 無次元渦度 ($=w/\sqrt{b}/\omega$)
 u_{τ} : 無次元 τ 方向速度 ($=-(1/h)\partial\psi/\partial\theta$) u_{θ} : 無次元 θ 方向速度 ($=(1/h)\partial\psi/\partial\tau$)
 ψ : 無次元流れ関数 ($=\psi/\sqrt{b}$) (τ, θ) : 楕円柱座標系 ($x+iy=a\cosh(\tau+i\theta)$)

Fig.1 Model for analysis.

* Faculty of Science and Technology, Keio University, Yokohama.

2-2. 解析モデル

Fig.1に示すような解析モデルを考える。すなわち、無限長さのスパンを持った橋円柱が、粘性・非圧縮性流体中で $t=0$ から一定加速度 W でスパンに垂直な方向に加速される。ここで、座標系は、橋円柱に固定する。

2-3. 基礎方程式

無次元化した渦度方程式および流れ関数方程式を橋円柱座標系で示せば、

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial(\psi, w)}{\partial(\eta, \theta)} = \frac{1}{Re} \nabla^2 w \quad (1)$$

$$\nabla^2 \psi = w \quad (2)$$

となる。境界条件は、物体表面上での粘着の条件、また、無限遠方で一様流を仮定して次式を得る。

$$\eta = \eta_1 : \quad \psi = \partial\psi/\partial\eta = 0 \quad (3)$$

$$\eta \rightarrow \infty : \quad \partial\psi/\partial\theta = (1/2)e^{\eta_1/2} \cos(\theta - \alpha), \quad \partial\psi/\partial\eta = (1/2)e^{\eta_1/2} \sin(\theta - \alpha) \quad (4)$$

また、物体表面における流れの諸量より、物体の抗力・揚力・モーメント各係数が算出できる。抗力係数 C_D は、 $C_D = \text{drag}/\frac{1}{2}\rho U^2 b$ により定義され次式で与えられる。

$$C_D = \frac{2e^{-\eta_1}}{Re} \left\{ -\sinh\eta_1 \cos\alpha \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)_1 \sin\theta d\theta + \cosh\eta_1 \sin\alpha \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)_1 \cos\theta d\theta \right\} - 2\pi e^{-2\eta_1} \sinh\eta_1 \cosh\eta_1 \\ + \frac{2e^{-\eta_1}}{Re} \left\{ \cosh\eta_1 \cos\alpha \int_0^{2\pi} w_1 \sin\theta d\theta - \sinh\eta_1 \sin\alpha \int_0^{2\pi} w_1 \cos\theta d\theta \right\} \quad (5)$$

揚力係数 C_L は、 $C_L = \text{Lift}/\frac{1}{2}\rho U^2 b$ により定義され次式で与えられる。

$$C_L = \frac{2e^{-\eta_1}}{Re} \left\{ \sinh\eta_1 \sin\alpha \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)_1 \sin\theta d\theta + \cosh\eta_1 \cos\alpha \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)_1 \cos\theta d\theta \right\} \\ - \frac{2e^{-\eta_1}}{Re} \left\{ \cosh\eta_1 \sin\alpha \int_0^{2\pi} w_1 \sin\theta d\theta + \sinh\eta_1 \cos\alpha \int_0^{2\pi} w_1 \cos\theta d\theta \right\} \quad (6)$$

モーメント係数 C_M は、 $C_M = \text{torque}/\frac{1}{2}\rho U^2 b$ により定義され次式で与えられる。

$$C_M = \frac{e^{-2\eta_1}}{Re} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)_1 \sin^2\theta d\theta + \frac{2e^{-2\eta_1}}{Re} \sinh\eta_1 \cosh\eta_1 \int_0^{2\pi} w_1 d\theta \quad (7)$$

2-4. 数値解析⁽²⁾

基礎方程式を次のように離散化し、差分近似により解析を行なう。

$$\eta = \eta_1 + (i'-1)\Delta\eta \quad (i'=1, 2, \dots, L), \quad \theta = (j'+0.5)\Delta\theta \quad (j'=0, 1, 2, \dots, M-1) \quad (8)$$

渦度方程式(1)式に対しては、DuFort-Frankel法を用いて解析する。流れ関数方程式(2)式に対しては、フーリエ級数法を用いて解析する。すなわち、(2)式を中心差分で近似すれば次のような五点公式を得る。

$$2\{(\Delta\eta)^2 + (\Delta\theta)^2\} \psi_{i,j} = (\Delta\theta)^2 (\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1}) + (\Delta\eta)^2 (\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1}) - (\Delta\eta \Delta\theta h_{i,j})^2 w_{i,j} \quad (9)$$

ここで、(9)式の $\psi_{i,j}$ を次のように離散フーリエ級数に展開する。

$$\psi_{i,j} = \sum_{s=0}^{N''} (A_{i,s} \cos \frac{\pi s}{N} j' + B_{i,s} \sin \frac{\pi s}{N} j') \quad (10)$$

ただし、 $N = M/2$ であり、 Σ'' は初項と末項のみ $1/2$ 倍して各項の和をとることを示す。(10)式を(9)式に代入し、三角関数の離散的直交性を利用して整理すれば、次式を得る。

$$\begin{aligned} -a_{i-1,s} + 2\{\beta^2(1 - \cos \frac{\pi}{N}S) + 1\}a_{i,s} - a_{i+1,s} &= -(A\eta)^2 \bar{V}_{i,s} \\ -b_{i-1,s} + 2\{\beta^2(1 - \cos \frac{\pi}{N}S) + 1\}b_{i,s} - b_{i+1,s} &= -(A\eta)^2 \bar{W}_{i,s} \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、 $\beta = A\eta/A\theta$, $\bar{V}_{i,s} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{2N-1} h_{ij}^2 w_{ij} \cos \frac{\pi}{N} S_j$, $\bar{W}_{i,s} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{2N-1} h_{ij}^2 w_{ij} \sin \frac{\pi}{N} S_j$ である。

また、(3)(4)式の ψ に関する境界条件より次式を得る。

$$a_{1,s} = 0 \quad b_{1,s} = 0 \quad (12)$$

$$3a_{L,s} - 4a_{L-1,s} + a_{L-2,s} = A\eta^2 \bar{S}_{L,s} \quad , \quad 3b_{L,s} - 4b_{L-1,s} + b_{L-2,s} = A\eta^2 \bar{T}_{L,s} \quad (13)$$

ここで、 $\bar{S}_{L,s} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{2N-1} e^{iA\eta} \sin(\theta - \alpha) \cos \frac{\pi}{N} S_j$, $\bar{T}_{L,s} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{2N-1} e^{iA\eta} \sin(\theta - \alpha) \sin \frac{\pi}{N} S_j$ である。

(11),(13)式は、三重対角行列方程式であり、Gaussの消去法により容易に解析できる。

なお、Richtmyer⁽⁶⁾によれば $S=0$ 以外の時の丸め誤差は小さくなる。

渦度の初期条件としては、 $t=0$ ですべての値を零として、 $t=\Delta t$ では物体表面上の渦度のみある微小な値を与え、ある程度時間が経過した後の局面を考える。境界条件としては次式を与える。

$$w_{L,j} = 0 \quad , \quad w_{i,j} = (\psi_{1,j} + 4\psi_{2,j} - \psi_{3,j}) / (2h_{ij}A\eta)^2 \quad (14)$$

なお、(5)~(7)式における数値積分は台形公式を適用する。

3. 解析結果

本解析における円柱の場合($\eta=3.0$)の流線と等渦度線の時間変化をFig.2に示した。レイノルズ数は108.2である。また、Fig.3には、初期条件の影響を示した。これにより、初期条件の誤差は時間が小さい所で減衰してしまうことがわかる。Fig.5には、渦の長さについてCollins & Dennis⁽³⁾の数値積分の結果およびHonji & Taneda⁽⁴⁾の実験値との比較を示したが、ほぼ一致している。Fig.2によると、時間がある程度大きい所では流れは完全には対称になっていないが、このような場合には一対の渦のうち短い方を渦の長さとした。Fig.6には、 C_D の時間変化を示したが、やはり、Collins & Dennisの結果と良く一致している。本解析では、フーリエ級数法との比較を行なうためにSOR法による解析も行なった。Fig.6によると、前者は後者よりも誤差が小さい。また、計算時間においてもSOR法の平均繰り返し回数が約70回である場合、フーリエ級数法は、SOR法よりも10倍以上速いことがあった。

Fig.4では、 45° の迎え角を持った楕円柱($\eta=0.1$)の場合の流線と等渦度線の時間変化を、またFig.7には、同じ楕円柱で 90° の迎え角の場合の流線と等渦度線の時間変化を示した。

参考文献

- (1) 千野・棚橋・安藤・河本, 流れの可視化, Vol.1 No.2, 1981, pp.131-134
- (2) Lugt, H.J. & Haussling, H.J., J. Fluid Mech., 65, 1974, pp. 711-734.
- (3) Collins, W.M. & Dennis, S.C.R., J. Fluid mech., 65, 1974, pp. 461-480.
- (4) Honji, H. & Taneda, S., Rep. Res. Inst. Appl. Mech., Kyushu Uni., 19, 1972, pp. 256-269.
- (5) Roache, P.J., (高橋達也訳) コンピュータによる流体力学, 初版, 構造計画研究所, 1978.
- (6) Richtmyer, R.D., and Morton, K.W., Difference Methods for Initial-Value Problems, 2nd Ed., Interscience Publishers, J. Wiley and Sons, New York, 1967.
- (7) Taneda, S. and Honji, H., J. Phys. Soc. Japan, 30(1971), pp. 262-272.

Fig.2 Some patterns of streamlines and equi-vorticity lines for $Re=108.2, \eta_1=3.0, \alpha=90^\circ$.

Fig.3 The influence of initial condition on the drag coefficient C_D for $\eta_1=3.0, Re=108.2$.

Fig.4 Some patterns of streamlines and equi-vorticity lines for $Re=108.2, \eta_1=0.1, \alpha=45^\circ$.

Fig.5 Variation of the vortex length.
 --- : this method.
 — : Collins & Dennis.
 • : Honji & Taneda.

Fig.6 The drag coefficient C_D with time T for $\eta_1=3.0, Re=108.2$.
 --- : this method (SOR)
 - · - : this method (Fourier-Series method)
 — : Collins & Dennis

Fig.7 Some patterns of streamlines and equi-vorticity lines for $Re=108.2, \eta_1=0.1, \alpha=90^\circ$.

Fig.8 The flow past an uniformly accelerated flat plate at $Re=98.1, t=2.9$. (Honji & Taneda)