8 流速分布可視化に使用するトレーサ粒子の比較

神戸大学 篠 源 亮

Research of tracer particle in flow visualization

Motoaki Yano

Picard's process of successive approximation is applied to solve the B.B.O. (Basset, Boussinesq, Oseen) equation.

The theoretical results are examined in the visualized experiments using the particles of two different materials.

1. まえがき

流れに混入されたトレーサ粒子の速度と、流れの流速そのものとの関係は、可視化にかぎらず粒子を用いる流れの計測ではよく問題とされる。

トレーサ粒子の運動は、粒子に作用する外力が、その慣性力と釣合う運動の式により表現され、粒子速度はこの運動の式より求められる。

流れに単一粒子が混入された場合を考え、粒子を半径 a の球とし、流速 u_f と粒子速度 u_p の差が小さいものとする ($Re = a(u_f - u_p)/\nu \ll 1$)、B.B.O. 式といわれる (1) 式が成立する。

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{3} a^3 \rho_p \frac{du_p}{dt} &= 6\pi\mu a (u_f - u_p) + \frac{4\pi}{3} a^3 \rho_f \frac{du_f}{dt} + \frac{1}{2} \frac{4\pi}{3} a^3 \rho_f \frac{d}{dt} (u_f - u_p) \\ &\quad \text{(慣性力)} \qquad \qquad \text{(摩擦力)} \qquad \qquad \text{(圧力)} \qquad \qquad \text{(見掛け上の質量に働く力)} \\ &\quad + 6a^2 \sqrt{\pi \rho_f \mu} \int_0^t \frac{d}{dt'} (u_f - u_p) \sqrt{t - t'} dt' - \frac{4\pi}{3} a^3 (\rho_p - \rho_f) g \qquad (1) \\ &\qquad \qquad \qquad \text{(ハートセフト力)} \qquad \qquad \qquad \text{(浮力)} \end{aligned}$$

ただし、こゝで $\frac{d}{dt_p} = \frac{d}{dt_f} = \frac{d}{dt}$ とし、添字 f, p はそれぞれ流体、粒子に関する量を示し、また粒子は時間 $t=0$ に流れに混入するものと考えている。

この B.B.O. の式に関しては多くの研究があり、その代表的なものを以下に示す。

- (i) Boggio による解と Basset による検討 (静水落下) (1910年)
- (ii) Chao 他によるフーリエ変換の解と検討 (乱流) (1964年)
- (iii) 佐野によるラプラス変換の解と検討 (過渡的流れ) (1974年)

B.B.O. 式については Basset 自身も述べているように不完全性を有しているけれども、こゝでは、一応この式の解とトレーサ粒子を用いた実験の比較を行うこととした。

2. B.B.O. 式の解

今、 $\rho_p/\rho_f = \sigma$, $u_f - u_p = v$ と (1) 式を整理すると

$$(\sigma-1)\left(\frac{du}{dt}+g\right)=(\sigma+1/2)\frac{dv}{dt}+\frac{g\nu}{2a^2}\left[v+\frac{a}{\pi\nu}\int_0^t\frac{dv}{dz}\sqrt{t-\tau}d\tau\right] \quad (2)$$

となり、さらに $T=\frac{2a^2(\sigma+1/2)}{g\nu}$, $t_*=\frac{t}{T}$, $\frac{2a^2(\sigma-1)}{g\nu}g=U_s$ (Settling Velocity), $\lambda=\sqrt{\frac{g}{2\pi(\sigma+1/2)}}$ とおくと、(2) 式は

$$\left[U_s\left(1+\frac{1}{Tg}\frac{du}{dt_*}\right)\right]=\frac{dv}{dt_*}+\left[v+\lambda\int_0^{t_*}\frac{dv}{d\tau_*}\sqrt{t_*-\tau_*}d\tau_*\right] \quad (3)$$

となる。こゝで $\frac{dv}{dt_*}=u(t_*)$, $v(t_*)=\int_0^{t_*}u(\tau_*)d\tau_*+v_0$, $v_0=v(0)$ とすると、(3) 式は

$$u(t_*)=f(t_*)+\int_0^{t_*}K(t_*,\tau_*)u(\tau_*)d\tau_* \quad (4)$$

となる。ただし、 $f(t_*)=(U_s-v_0)+\frac{U_s}{Tg}\frac{du}{dt}$, $K(t_*,\tau_*)=-(1+\lambda/\sqrt{t_*-\tau_*})$ である。

積分方程式 (4) 式は、 $f(t_*)=f_1(t_*)+f_2(t_*)$ とする時、 $u_1=f_1+\int_0^{t_*}K_1\cdot u_1d\tau$, $u_2=f_2+\int_0^{t_*}K_2\cdot u_2d\tau$ (u_1+u_2)= $(f_1+f_2)+\int_0^{t_*}(K_1+K_2)\cdot(u_1+u_2)d\tau=u=f+\int_0^{t_*}K\cdot u d\tau$ となり、解の重ね合せが可能であるから、 $f(t_*)=C=\text{const}$, $f(t_*)=F(t_*)$ と分けて考えることとする。

また Kernel $K(t_*,\tau_*)$ は摩擦係数とバースト力の大小関係により、(i) $K(t_*,\tau_*)=-1$ (摩擦係数大) (ii) $K(t_*,\tau_*)=-\lambda/\sqrt{t_*-\tau_*}$ (バースト力大)、(iii) $K(t_*,\tau_*)=-(1+\lambda/\sqrt{t_*-\tau_*})$ (摩擦係数 $\propto$ バースト力) となる。

$K_n(t_*,\tau_*)=\int_0^{t_*}K(t_*,t_1)K_{n-1}(t_1,\tau_*)dt_1$, $H(t_*,\tau_*)=\sum_{n=0}^{\infty}K_n(t_*,\tau_*)$ とすると、(4) 式は

$$u(t_*)=f(t_*)+\int_0^{t_*}H(t_*,\tau_*)f(\tau_*)d\tau_* \quad (5)$$

となり、 $f(t_*)$ を与えると $u(t_*)$ が求められることとなる。

(I) $f(t_*)=C$

(i) $K(t_*,\tau_*)=-1$, $H(t_*,\tau_*)=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(t_*-\tau_*)^{n-1}}{(n-1)!}=-e^{-(t_*-\tau_*)}$ 故、 $u=Ce^{-t_*}$, $v=C[1-e^{-t_*}]+v_0$ と求まる。 ($C=(U_s-v_0)+\frac{U_s}{Tg}\alpha$ (ただし一様加速流 $\frac{du}{dt}=const=\alpha$)

$$v=U_f-U_p=(U_s+\frac{U_s}{Tg}\alpha)-(U_s-v_0+\frac{U_s}{Tg}\alpha)e^{-t_*}$$

となり、 $t_*\rightarrow\infty$ において、 $U_f-U_p=U_s+\frac{U_s}{Tg}\alpha$ となり、定常流では、これは Settling Velocity 重力が無視される場合、一様流では $U_f=U_p$ となり粒子速度と流速の一致を見るけれども、一様加速流では $U_f-U_p=\frac{U_s}{Tg}\alpha=(\sigma-1)/(\sigma+1/2)\alpha$ となり、粒子比重 σ が流体の σ と異なると、粒子速度は流速と一致しない。

(ii) $K(t_*,\tau_*)=-\lambda/\sqrt{t_*-\tau_*}$, $H(t_*,\tau_*)=\lambda\{\lambda\pi-(t_*-\tau_*)^{-1/2}\}+\sum_{n=1}^{\infty}2\lambda^{2n+1}\pi^{2n}2^{(n-1)^2}\left[\frac{\lambda\pi(t_*-\tau_*)^{2n}}{(2n)!}-\frac{(t_*-\tau_*)^{2n-1/2}}{(2n-1)!}\right]$ 故、

$$u=C\left[1+\lambda\left(\lambda\pi t_*-2t_*^{1/2}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}2^{2n+1}\pi^{2n}2^{(n-1)^2}\left(\frac{\lambda\pi t_*^{2n}}{(2n+2)!}-\frac{t_*^{2n+1/2}}{(2n+1)!}\right)\right],$$

$$v=v_0\left[t_*+\lambda\left(\frac{1}{2}\lambda\pi t_*^2-\frac{4}{3}t_*^{3/2}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}2^{2n+1}\pi^{2n}2^{(n-1)^2}\left(\frac{\lambda\pi t_*^{2n+1}}{(2n+3)!}-\frac{t_*^{2n+3/2}}{(2n+2)!}\right)\right]+v_0 \quad (\text{重力無視、一様流})$$

となる。 $t_*\rightarrow\infty$ の場合、右辺 Σ の項の [] 内は $\left[\frac{(\lambda\pi T/m)-1}{(2n+3)!}\right]t_*^{2n+3/2}$ とまとめられ、それより $\delta < 4$ の場合には、この Σ の項は正項となる。

(iii) $K(t_*,\tau_*)=-(1+\lambda/\sqrt{t_*-\tau_*})$,

$$K=K^I+K^II=-1-\lambda/\sqrt{t_*-\tau_*} \quad \text{とすると、}$$

$$K_n=\int_0^{t_*}K_{n-1}^I K_1^I dt_1+C_1\int_0^{t_*}K_{n-1}^I K_1^{II} dt_1+C_2\int_0^{t_*}K_{n-1}^{II} K_2^I dt_1+\dots+C_{n-1}\int_0^{t_*}K_{n-2}^I K_{n-1}^{II} dt_1+C_n\int_0^{t_*}K_{n-1}^I K_n^{II} dt_1+\int_0^{t_*}K_{n-1}^{II} K_n^I dt_1$$

より, $H(t_*, \tau_*) = \sum K_n$ である. $H(t_*, \tau_*) = -\lambda(t_* - \tau_*)^{-1/2} + (\lambda^2\pi - 1) + (4\lambda - 2\lambda^3\pi)(t_* - \tau_*)^{1/2} + (1 - 3\lambda^3\pi + \lambda^4\pi^2)(t_* - \tau_*) + (-4\lambda + \frac{4}{3}\lambda^3\pi - \frac{4}{3}\lambda^5\pi^2)(t_* - \tau_*)^{3/2} + (-1 + 3\lambda^3\pi - \frac{3}{2}\lambda^4\pi^2 + \frac{1}{2}\lambda^6\pi^3)(t_* - \tau_*)^{5/2} + \dots$

より, $U(t_*) = C[1 - 2\lambda t_*^{1/2} + (\lambda^2\pi - 1)t_* + \frac{2}{3}(4\lambda - 2\lambda^3\pi)t_*^{3/2} + \frac{1}{2}(1 - 3\lambda^3\pi + \lambda^4\pi^2)t_*^2 + \dots]$

$$V(t_*) = -U_0[t_* - \frac{4}{3}\lambda t_*^{3/2} + \frac{1}{2}(\lambda^2\pi - 1)t_*^2 + \frac{4}{15}(4\lambda - 2\lambda^3\pi)t_*^{5/2} + \frac{1}{6}(1 - 3\lambda^3\pi + \lambda^4\pi^2)t_*^3 + \dots] + U_0$$

となる. ただし U_0 は重力項を無視した定常流れの場合である. $H(t_*, \tau_*)$ の関数形を明確にしないが, $V = U_f - U_p$ が減衰するか否かが明らかでない. 図-12-1 の粒子について V を求めたものを示す.

$$(I) f(t_*) = A \cos \omega t_*$$

$$(i) K(t_*, \tau_*) = -1 \quad H(t_*, \tau_*) = -e^{-(t_* - \tau_*)} \quad \text{故, } U(t_*) = A \cos \omega t_* - \int_0^{t_*} e^{-(t_* - \tau_*)} A \cos \omega \tau_* d\tau_*$$

$$U(t_*) = \frac{A}{1 + \omega^2} [\omega^2 \cos \omega t_* - \omega \sin \omega t_* + e^{-t_*}]$$

$$V(t_*) = \frac{A}{1 + \omega^2} [\omega \sin \omega t_* + \cos \omega t_* - 1 - e^{-t_*}] + (U_0 = 0)$$

となり, 流れの $U_f = \frac{A}{\omega} \sin \omega t_*$ であるから, U_p は振巾, 位相が異なり, バイアスのかかったものとなる. 高周波の場合, $|\omega \sin \omega t_*| > |\cos \omega t_* - 1|$ 故, $t_* \rightarrow \infty$ において, $V \approx \frac{A}{\omega} \sin \omega t_* = U_f$ となり, 従って粒子速度 $U_p = 0$ となる.

$$(ii) K(t_*, \tau_*) = -\lambda / \sqrt{t_* - \tau_*}$$

$$H(t_*, \tau_*) = \lambda(\lambda\pi - (t_* - \tau_*)^{-1/2}) + \sum_{n=1}^{\infty} 2\lambda^n \pi^n 2^{n(n-1)/2} \left[\frac{\lambda \pi (t_* - \tau_*)^{2n-1/2}}{2^{n!}} - \frac{(t_* - \tau_*)^{2n-1}}{(2^{n-1})!} \right] \quad \text{故,}$$

$$\int_0^{t_*} \cos \omega \tau_* \sqrt{t_* - \tau_*} d\tau_* = G_1(t_*) \quad , \quad \int_0^{t_*} \sin \omega \tau_* \sqrt{t_* - \tau_*} d\tau_* = G_2(t_*) \quad \text{とすると,}$$

$$U(t_*) = A \cos \omega t_* + \frac{2\pi\lambda A}{\omega} \sin \omega t_* - \frac{2A}{\omega} G_1(t_*) + \sum_{n=1}^{\infty} 2\lambda^n \pi^n 2^{n(n-1)/2} \left[\frac{\lambda \pi A}{2^{n!}} \sum_{k=1}^{n-1/2} (-1)^{k+1} \frac{(2n - (4k-1))!}{\omega^{2k}} \frac{(2n - (4k-2))!}{2^{2k}} \right. \\ \left. + \frac{A}{(2^{n-1})!} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{(2n - (4k-3))!}{\omega^{2k}} \frac{(2n - (4k-1))!}{2^{2k}} \right] \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{\omega^{2k+1}} \frac{(2n - (4k+1))!}{2^{(2k+1)!}} G_1(t_*) \quad (n: \text{odd}) \\ + \frac{1}{\omega^{2k}} \frac{(2n - (4k-1))!}{2^{2k!}} G_2(t_*) \quad (n: \text{even}) \end{array} \right.$$

$$V(t_*) = \frac{A}{\omega} \sin \omega t_* - \frac{\lambda \pi A}{\omega^2} (\cos \omega t_* - 1) + \frac{\lambda A}{2\omega} \int_0^{t_*} G_1(t_*) d\tau_* + \sum_{n=1}^{\infty} 2\lambda^n \pi^n 2^{n(n-1)/2} \left[\frac{\lambda \pi A}{2^{n!}} \sum_{k=1}^{n-1/2} (-1)^{k+1} \frac{(2n - (4k-1))!}{\omega^{2k}} \frac{(2n - (4k-2))!}{2^{2k}} \right. \\ \left. + \frac{A}{(2^{n-1})!} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{(2n - (4k-1))!}{\omega^{2k}} \frac{(2n - (4k-1))!}{2^{2k}} \right] \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{\omega^{2k+1}} \frac{(2n - (4k+1))!}{2^{(2k+1)!}} \int_0^{t_*} G_1(t_*) d\tau_* \quad (n: \text{odd}) \\ + \frac{1}{\omega^{2k}} \frac{(2n - (4k-1))!}{2^{2k!}} \int_0^{t_*} G_2(t_*) d\tau_* \quad (n: \text{even}) \end{array} \right.$$

となる. $t_* \rightarrow \infty$ の Σ 項の正負は $0 \leq 4$ より定まる. ところで流れが高周波の場合には, $\int_0^{t_*} G_2(t_*) d\tau_* = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\omega} (\sin \omega t_* + \cos \omega t_* - 1)$ ($t_* \rightarrow \infty$) であるから, $V = U_f - U_p = \frac{A}{\omega} \sin \omega t_* = U_f$ より $U_p = 0$ となる.

$$(iii) K(t_*, \tau_*) = -(1 + \lambda / \sqrt{t_* - \tau_*}) \quad H(t_*, \tau_*) = -\lambda(t_* - \tau_*)^{-1/2} + (\lambda^2\pi - 1) + (4\lambda - 2\lambda^3\pi)(t_* - \tau_*)^{1/2} + \dots \quad \text{故}$$

$$U(t_*) = A \cos \omega t_* - \lambda A G_1(t_*) + (\lambda^2\pi - 1) \frac{A}{\omega} \sin \omega t_* + (4\lambda - 2\lambda^3\pi) \frac{A}{2\omega} G_2(t_*) - (1 - 3\lambda^3\pi + \lambda^4\pi^2) \frac{A}{\omega^2} (\cos \omega t_* - 1) + \dots$$

$$V(t_*) = \frac{A}{\omega} \sin \omega t_* - \lambda A \int_0^{t_*} G_1(t_*) d\tau_* - (\lambda^2\pi - 1) \frac{A}{\omega^2} (\cos \omega t_* - 1) + (4\lambda - 2\lambda^3\pi) \frac{A}{2\omega} \int_0^{t_*} G_2(t_*) d\tau_* \\ - (1 - 3\lambda^3\pi + \lambda^4\pi^2) \frac{A}{\omega^3} (\sin \omega t_* - t_*) + \dots$$

となる. $t_* \rightarrow \infty$, $\omega \rightarrow \text{大}$ の場合 $\int_0^{t_*} G_1(t_*) d\tau_* = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\omega} (\sin \omega t_* - \cos \omega t_* + 1)$ 故,

$$V(t_*) = U_f - U_p = \frac{A}{\omega} \sin \omega t_* - \frac{A}{\omega} \lambda \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\sin \omega t_* - \cos \omega t_* + 1)$$

すなわち,

$$u_p = \frac{A}{\omega} \sqrt{\epsilon} \left(\sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad \text{となる。} \quad \sigma = 4 \text{ の場合, } u_p$$
 の振巾は流木のものと一致するけれども、位相は $\frac{\pi}{2}$ ずれ、バイアスが $\frac{A}{\sqrt{2}\omega}$ がある。

3. 実験

トレーサ粒子の実験は南水路を用い、測定部上流に網を入れて流速に乱れを与えるようにした。また流れに加速流と減速流の両者が得られるよう測定部に内柱を設けその周辺の流速分布を測定することとした。南水路流れの場合は内柱前面に沿った下降流を生じるため、測定部は部分的に管水路とした。

トレーサ粒子は半径 0.5 mm のポリスチロール(比重 $\sigma = 1.04$)と半径 $1 \mu\text{m}$ 以下の水性絵具の両者について、同一条件の流れにおいて比較を行った。

流れには多数粒子を混入しており、この点は理論の条件と異なる上、見掛上の粘性係数も異ってくる。

ポリスチロールの場合はストロボ光源を用い、時間々隔 $1/250$ 秒の 4 回発光を行い、トレーサ粒子軌跡を水路より下方に撮影を行った。水性絵具の場合は二重露光ホログラフ法により時間々隔 $40 \mu\text{s}$ にて水平垂直水路断面の測定を行った。これらの結果を写真 1～3 に示す。

ポリスチロール粒子の場合は管路部上下壁面付近の粒子がいやまして、やい粒子軌跡が見にくいけれども、内柱前面のよどみ点付近の流速分布が得られているのに反して、絵具の場合は確実に求められている。

この結果は理論上からまだ完全に説明出来ない。

今後継続して研究を進めたいと考えている。

4. 参考文献 省略

図-1 ポリスチロール粒子の追従性

写真-1 ポリスチロール粒子

写真-2 水性絵具 (水平断面)

写真-3
水性絵具
(垂直断面
内柱直上流)