25 有限要素法による円柱まわりの非定常流れの解析

慶應義塾大学理工学部機械工学科

金井恵理也、棚橋隆彦、澤田達男、斉藤恒洋

Unsteady flow fields around a cylinder by finite element analysis

Eriya KANAI*, Takahiko TANAHASHI*, Tatsuo SAWADA* and Tsunehiro SAITO**

A newly developed algorithm, GSMAC, remove the main problems for analyzing unsteady flow fields by finite element method, CPU time consumption and maximum storage limitation. This algorithm uses the concept of orthogonal decomposition and cycle-to cycle self-adjustment method. Unsteady viscous flow fields around a circular cylinder are considered to prove the effectiveness. The solution obtained by GSMAC agrees very well with the experimental results by Perry et al., especially for Karman vortex shedding process. Shapes, length and other properties of a pair-vortex behind a cylinder are also compared and in good agreement with the experimental results by Bouard & Coutanceau.

1. まえがき

静止流体中に置かれた無限に長い円柱がある時刻 $t=0$ において衝撃的に一定速度で円柱のスパン方向と直角に運動を開始したときの、その後の円柱まわりの非定常流れの初期の状態では、図1に示されるような、渦対による閉じた伴流領域が形成される。この伴流領域は双子渦と呼ばれる。時間が経過するにつれて、この流れは不安定となり、ついには円柱の背後から交互に渦が放出され、後流に渦列を生ずる。この渦列はカルマン渦と呼ばれている。

この様な円柱まわりの流れの研究は以前から行われているが、代表的な数値解の例としては、Thom⁽¹⁾、Kawaguchi⁽²⁾、Kawaguchi & Jain⁽³⁾、Collins & Dennis⁽⁴⁾、Loc⁽⁵⁾、Kawahara & Takami⁽⁶⁾などがあげられる。また、カルマン渦列を最初にシミ

*Fac. of Sci. and Tech., Keio Univ., 3-14-1 Hiyoshi Kohoku-ku, Yokohama, Japan

**Asahi Glass Co. Ltd., 2-1-2 Marunouchi Chiyodaku, Tokyo, Japan

ュレートした研究として、Fromm⁽⁷⁾の研究が有名である。すぐれた実験的研究としては、Honji & Taneda⁽⁸⁾, Bouard & Coutanceau⁽⁹⁾, Coutanceau & Bouard^{(10), (11)}があげられる。特に Bouard & Coutanceau の実験は、円柱後流の非定常な双子渦の挙動を、 $40 < Re < 10^4$ の Re 数の範囲に対して詳細な実験を行った研究として注目される。

有限要素法によって円柱まわりの流れを解いた例も少なくなく、Brooks & Hughes⁽¹²⁾, Donea, et al.,^{(13), (14)}, Fortin & Thomasset⁽¹⁵⁾, Kawahara & Hirano⁽¹⁶⁾, Chan & Gresho⁽¹⁷⁾などはその代表的な例である。これらの中で、Kawahara & Hiranoを除くと、 $40 \leq Re \leq 400$ 程度の比較的低い Re 数における計算のみを行っている。これは、計算機の容量の制約から十分に細かなメッシュが切れないために、高 Re 数をシミュレートできなかったためである。これに対して Kawahara & Hirano の方法は完全な陽解法であるから容量の制約はなく、一万に近い要素数のメッシュを用いて $Re=10^5$ の非常に高い Re 数の流れをシミュレートしている。しかし、彼等の方法は、流体の音速が大きい場合や流れが遅い場合は用いることが難しく、また、 $Re=10^5$ の計算も、無次元時刻 $t=8$ 程度まで時間前進するために大型計算機で 2~3 時間を必要としている。従って比較的短時間の計算で、Re 数が $100 \leq Re \leq$ 数千の範囲をシミュレートできるスキームが必要となる。著者らが開発した高速な有限要素スキーム GSMAC⁽¹⁸⁾ はこれらの要求に答えるものであり、本論文では、まず GSMAC スキームの原理を概説し、その有効性を実証するために、 $Re=50$ の円柱まわりの非定常流れの計算結果を示す。またこれと Bouard & Coutanceau の実験結果とを比較する。

2. GSMAC スキーム

GSMAC スキームには、過去の数値計算で使用された二つの重要な手法、つまり、サイクル自己誤差調整法 (cycle-to-cycle self adjustment method)⁽¹⁹⁾ と直交分解法⁽²⁰⁾ が採用されている。前者はゆるい収束条件下で誤差が累積しない反復法を可能とするもので、MAC 法、SMAC 法、HSMAC 法などに用いられ、後者は流れ場を Helmholtz の定理により、発散零の場と回転零の場の重ね合わせとしてあらわすものであり、Fractional step 法にも取り込まれている。

流体は非圧縮粘性流体とし、流れ場は二次元で扱えるものとする、次の Navier-Stokes の方程式で示される。

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{v} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \quad (2)$$

直交分解して、

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla H - \frac{1}{\text{Re}} \nabla \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} \quad (3)$$

ただし、

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}, \quad H = p + \frac{\mathbf{v}^2}{2}$$

とする。ここで $\boldsymbol{\omega}$ は渦度ベクトルであり、 H は動圧項 (dynamic pressure) である。(3)式に対して、 H を陰的に流速を陽的に離散化し、解くべき方程式を整理すると、

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \tilde{\mathbf{v}}}{\Delta t} = -\nabla H^* \quad (4)$$

$$\nabla^2 H^* = \frac{\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}}{\Delta t} \quad (5)$$

$$\frac{\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v}^n}{\Delta t} = -\nabla H^n - \frac{1}{\text{Re}} \nabla \times \boldsymbol{\omega}^n + \mathbf{v}^n \times \boldsymbol{\omega}^n \quad (6)$$

となる。ここで $\tilde{\mathbf{v}}$ は予測値ベクトル、 $H^* = H^{n+1} - H^n$ は動圧の修正量である。

3. 結果

本解析に使用したパラメータ群を表1に示す。解析対象は、 $\text{Re}=550$ の非定常流れである。時刻 $t=30$ まで時間前進してカルマン渦列をシミュレートした。なお、計算には慶應義塾大学FACOM M380を使用し、結果はレーザービームプリンターで出力したものである。計算時間は20分程度であった。

表 1

Re	時間ステップ Δt	緩和係数 λ	Hの反復計算の 収束判定基準 ϵ	時間 t
550	0.01 (初期200 step)	0.18	0.5×10^{-2}	0~30
	0.005

$t = 1.0$ $t = 1.0$ $t = 8.0$ $t = 8.0$ $t = 14.0$ $t = 14.0$ $t = 22.0$ $t = 22.0$ $t = 30.0$ $t = 30.0$

Fig. 1 Velocity vectors

Fig. 2 Equi-pressure lines

$t = 1.0$ $t = 8.0$ $t = 14.0$ $t = 22.0$ $t = 30.0$

Fig. 3 Stream lines

$t = 1.0$ $t = 8.0$ $t = 14.0$ $t = 22.0$ $t = 30.0$

Fig. 4 Equi-vorticity lines

Fig. 5 Geometrical parameter of a pair-vortex

Fig. 6 Comparison between solution and experiment (Bouard-Coutanceau)

Fig. 7 Vortex shedding process (Perry et al.)

Reference

- (1) Thom, A., Proc. Roy. Soc. Lond., A141(1933), 651.
- (2) Kawaguchi, M., J. Phys. Soc. Jap., 8-6(1953), 747.
- (3) Kawaguchi, M. and Jain, P., J. Phys. Soc. Jap., 21-10(1966), 2055.
- (4) Collins, W. and Dennis, S. C. R., J. Fluid Mech., 60(1973), 105.
- (5) Loc, T.P., J. Fluid Mech., 100(1980), 111.
- (6) Kawamura, T. and Takami, H., Theoretical and applied Mechanics, 32(1984), 19.
- (7) Fromm, J., Methods in Computational Physics, 3(1964), 345, Academic Press.
- (8) Honji, H. and Taneda, S., J. Phys. Soc. Jap., 27-6(1969), 1668.
- (9) Bouard, R. and Coutanceau, M., J. Fluid Mech., 101(1980), 583.
- (10) Coutanceau, M. and Bouard R., J. Fluid Mech., 79(1977A), 231.
- (11) Coutanceau, M. and Bouard R., J. Fluid Mech., 79(1977B), 257.
- (12) Brooks, A. N. and Hughes, T. J. R., Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 32(1982), 199.
- (13) Donea, J. et al., Computational Techniques in Transient and Turbulent Flow, (1981A), 97, Pineridge Press.
- (14) Donea, J. et al., Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 30(1982A), 53.
- (15) Fortin, M. and Thomasset, F., J. Comput. Phys., 31(1979), 113.
- (16) Kawahara, M. and Hirano, H., Proc. of JSCE, 329(1983c), 127.
- (17) Chan, S. T. and Gresho, P. M., Finite Element Flow Analysis, (1983), 201, Univ. Tokyo Press.
- (18) Kanai, E. et al., (to be published)
- (19) Harlow, F. and Welch, J. E., Phys. Fluids, 8-12(1965), 2182.
- (20) Chorin, A. J., J. Comput. Phys., 2(1967), 12.