8 トレーサー粒子群運動の安定性

神戸大学
リクルート

笠 源亮[○]
佐浦 和三

Stability of the tracer particles motion in liquid flow

Motoaki Yano*

Kazuzo Saura**

The motion of tracer particles in liquid flow is discussed by the stability theorem of the macroscopic concept.

When the volume fraction of the tracer particles in liquid flow is small, the neutral or stable stability condition can be expected in the motion of tracer particles in flow.

1. ま え が き

トレーサー粒子群の追従性を調べる為に静水中を落下するトレーサー粒子群運動において微小変動を加えた場合の安定問題について検討を行った。

流体中に離散している粒子群をここでは仮想的に連続体として取り扱うため、考えている時、空間領域における粒子群を含む全流体の密度 ρ を流体中に占める粒子群の容積比 ε_s を用いて

$$\rho = \sum_a \varepsilon_a \rho_a = \varepsilon_s + \varepsilon_f \quad \sum_a \varepsilon_a = 1, \quad a = s, f \quad (1)$$

と表現する。但しここで添字 $a = s$ は粒子、 $a = f$ は流体部分を表し、 $\rho_s (= \text{const.})$ は粒子、 $\rho_f (= \text{const.})$ は流体部分の密度である。

2. トレーサー粒子群を含む流れの保存則^{(1),(2)}

粒子群を含む流れの質量フラックス $\rho \mathbf{g}$ ($\mathbf{g}$: 速度ベクトル) はその密度を先に述べたように考えると、

$$\rho \mathbf{g} = \sum_a \varepsilon_a \rho_a \mathbf{g}_a \quad (2)$$

で表現されることから、質量保存則は、

$$\sum_a \left[\frac{\partial \varepsilon_a}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon_a \mathbf{g}_a) \right] = 0 \quad (3)$$

となり、また運動量保存則は、

$$\sum_a \left[\varepsilon_a \rho_a \frac{d \mathbf{g}_a}{dt} = -\nabla (\varepsilon_a p_a) + \nabla \cdot \mathbf{T}_a + \mathbf{I}_a + \varepsilon_a \rho_a \mathbf{g} \right] \quad (4)$$

と粒子相、流体相の各相について求められる。ただし、(4)式において、 $\nabla \cdot \mathbf{T}_a$ は摩擦力であり、 $\mathbf{I}_a$ は粒子群と流体部分との間に働く内部力である。

*Kobe Univ. Rokkodai, Nada, Kobe 657 Japan; ** Recruit Co. Ltd.

あり、 $\sum_a I_a = 0$ である。内部力 I_a として、ここでは粒子の摩擦力と見掛け上の質量に働く圧力のみを考慮、係数 $\alpha_1(\varepsilon_s)$ と $\alpha_2(\varepsilon_s)$ を用い以下の(5)式で表されるものとする。

$$I_f = -I_s = -[\alpha_1(\varepsilon_s) \varepsilon_f \rho_f (g_f - g_s) + \alpha_2(\varepsilon_s) \varepsilon_f \rho_f \frac{d}{dt} (g_f - g_s)] \quad (5)$$

この(5)式の内部力を(4)式に代入し、流体部、粒子群各相の運動の式を求め、組み合わせると次の(6)式が得られる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_s \rho_s \frac{d g_s}{dt} = & (1 - \varepsilon_s) \rho_f \frac{d g_f}{dt} - \nabla [\varepsilon_s p_s - (1 - \varepsilon_s) p_f] + \nabla [T_s - T_f] + 2(1 - \varepsilon_s) \rho_f \alpha_1(\varepsilon_s) (g_f - g_s) \\ & + 2(1 - \varepsilon_s) \rho_f \alpha_2(\varepsilon_s) \frac{d}{dt} (g_f - g_s) + [\varepsilon_s \rho_s - (1 - \varepsilon_s) \rho_f] g \end{aligned} \quad (6)$$

粒子群の落下方向に正の座標軸 x ととり、粒子群落下の定常状態について最初に考えることとする。粒子群の容積比 ε_s は一般に10%以下の小さい値であり、また粒子群落下に伴って生じる流体部の定常流速 U_0 も小さいものと考えられるから(6)式右辺第二項の圧力、第三項せん断力に関する各項の値は小さいものとして省略され(6)式は、

$$0 = 0 - \nearrow + \nearrow + 2(1 - \varepsilon_s) \rho_f \alpha_1(\varepsilon_s) (g_f - g_s) + 0 + [\varepsilon_s \rho_s - (1 - \varepsilon_s) \rho_f] g$$

となり、定常落下時の粒子群の落下速度は下記のように得られる。

$$g_s = U_0 + U_{sx} \quad \text{「 } U_{sx} = (\delta_x - 1) g / 2 \alpha_1(\varepsilon_s), \delta_x = \varepsilon_s \rho_s / \varepsilon_f \rho_f \text{ } \quad (7)$$

3 粒子群運動の安定性

定常状態にある一様な流れに微小変動が加わると各要素は下記のように変化すると考えられる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= \varepsilon_0 + \varepsilon'(x, y, z, t) \\ g_f &= U_0 + g_f'(x, y, z, t) \\ g_s &= (U_0 + U_{sx}) + g_s'(x, y, z, t) \end{aligned} \quad \varepsilon_0, U_0, U_{sx} = \text{const.} \quad (8)$$

この関係を(3)、(6)式に代入し高次の微小項を省略すると ε' に関する(9)式が求められる。

$$C_1 \frac{\partial^2 \varepsilon'}{\partial t^2} + C_2 \frac{\partial^2 \varepsilon'}{\partial t \partial x} + C_3 \frac{\partial^2 \varepsilon'}{\partial x^2} + C_4 \frac{\partial \varepsilon'}{\partial t} + C_5 \frac{\partial \varepsilon'}{\partial x} = 0 \quad (9)$$

ただし、係数 $C_1 \sim C_5$ は

$$\begin{aligned} C_1 &= 2\alpha_2 + \varepsilon_0(\delta + 1) \\ C_2 &= 2\alpha_2(U_0 + U_{sx}) \cdot 2 + \varepsilon_0[(\delta + 1) \cdot (U_0 + U_{sx}) \cdot 2 - (\alpha_2 + 1) \cdot 2U_{sx}] \\ C_3 &= 2\alpha_2(U_0 + U_{sx})^2 + \varepsilon_0[\delta \cdot (U_0 + U_{sx})^2 + U_0^2 - 2\alpha_2(U_0 + U_{sx})U_{sx}] \\ C_4 &= 2\alpha_1 \\ C_5 &= 2\alpha_1(U_0 + U_{sx}) + (\delta + 1)g \end{aligned}$$

である。

(9)式の解を $\varepsilon' = \phi \exp(i k x + \omega t)$; $\omega = \omega_r + i \omega_i$ とすると、 ω_r は振幅 ϕ にかかる単位時間当たりの増幅率であり、 $\omega_r > 0$ の場合変動量は増幅されいわゆる不安定な状態となる。この解を(9)式に代入すると、

$$C_1 \omega^2 + i C_2 k \omega - C_3 k^2 + C_4 \omega + i C_5 \omega = 0 \quad (10)$$

となり、 $\omega = \frac{1}{2C_1} [-(C_4 + i C_2 k) \pm \sqrt{C_4^2 + (4C_3 - C_2^2)k^2 + i(2C_2 C_4 - 4C_3 C_5)k}]$ (11)

が得られる。(9)式における係数 $C_1 \sim C_5$ について $\varepsilon_0 = O(0)$ の項のみについて(11)式を検討すると $(4C_3 - C_2^2) = 0$; $(2C_2 C_4 - 4C_3 C_5) = 0$

となり、従って $\omega_r = 0$ あるいは $\omega_r = -C_4/C_1$ となり中立または安定状態の流れが得られる。

係数 $C_1 \sim C_5$ について $E_0 = 0(1)$ の項まで考慮すると、後述の実験例のような場合、係数 C_4 の値は他の係数の値に比べて大となり $C_4^2 + (4C_1C_3 - C_2^2)/k^2 \gg (2C_2C_3 - 4C_1C_5)$ が成立し、単位時間 Δt あたりの増幅率 ω_r は、

$$\omega_r = (C \cdot \Delta t) / \lambda^2 \quad C \doteq \frac{[C_1C_3 - (C_2/2)^2] \cdot (2\pi)^2}{C_1C_4} \quad \lambda: \text{波長} \quad (12)$$

となる。

この時、係数 $C_1 \sim C_4$ に含まれる $\alpha(\epsilon_0)$, $\alpha_2(\epsilon_0)$ 等は不明であるため次ぎのようにかんがえる。先に述べた理由により圧力、せん断力に関する項を省略した (6) 式を書き換えると

$$\delta_* \frac{d\delta_s}{dt} = \frac{d\delta_f}{dt} + 2\alpha_1(\epsilon_s)(q_f - q_s) + 2\alpha_2(\epsilon_s) \frac{d}{dt}(q_f - q_s) + (\delta_* - 1)g \quad \delta_* = \epsilon_s/\epsilon_f$$

となり、 $\epsilon_s \approx 0$ の場合係数 $2\alpha_1(0)$, $2\alpha_2(0)$, δ_* がそれぞれ $18\sqrt{d^2}$, $1/2$, σ であるとする。単一粒子の運動の式と一致する。従ってここでは ϵ_s は小さいため $2\alpha_1(\epsilon_s) \doteq 2\alpha_1(0)$, $2\alpha_2(\epsilon_s) \doteq 2\alpha_2(0)$ として単一粒子の係数と同一値を近似的に用いている。

4. 実験

実験は水深 1 m、奥行き 10 cm、幅 3.5 m の静止水槽内上部に断面 9 x 10 cm、水深 20 cm、粒子落下孔 4 mm x 10 cm の粒子混合落下水槽を設置して粒子群を自然落下させることにより行つた。この時両水槽水面は常に一致するようにしてある。

粒子群は落下時に直線状に落下するように落下孔付近にガイドをもうけている。(図-1)

実験には粒径 0.42 - 0.25 mm (砂 A)、0.25 - 0.18 mm (砂 B)、0.18 - 0.074 mm (砂 C) の 3 種類の砂を使用し、容積比は 5%、7.5%、10% の 3 種類について行つた。

容積比 $\epsilon_s > 10\%$ の場合には混合水槽において粒子群が充分混ざりあつた状態を得ることはできなかった。

粒子群の落下状態は直線状となるようにしてあるけれども、実験を行うと直線状落下の場合と図-2に示すような波状落下(蛇行)の場合が交互に生じる。直線状落下の場合、粒子群の個々の粒子について落下速度を求め、単一粒子落下の場合の速度と比較を行つた。落下速度の実験結果はどちらもガウス分布状に中心速度の約 2.0% の上下幅の範囲に分散する。

分布中心速度は単一粒子の場合 3.3 cm/s (砂 A)、2.0 cm/s (砂 B)、1.67 cm/s (砂 C) となり砂 C 以外はいずれも理論値より小さい。粒子群の場合は砂の容積比と落下速度の関係は明確でなく、5.25 cm/s (砂 A)、5.0 cm/s (砂 B)、4.55 cm/s (砂 C) でありいずれも単一粒子の場合より大きく、粒子群落下にともない流体部に流れを誘起しているものと考えられる。

粒子群が波状落下する場合は、 $\Delta t = 0.6$ 秒間隔で連続写真撮影を行い 波高増幅率 ω_r と波長 λ の関係を実測した。

一方実験条件から粒子粒径 $d = 0.03 \text{ cm}$ 、 $\varepsilon_0 = 0.1$ 、粒子落下速度 $(U_0 + U_{sx}) = 5 \text{ cm/s}$ 、 $2\alpha_1(\varepsilon_0) = 1.8 \text{ } \nu / d^2 = 200 \text{ s}^{-1}$ 、 $2\alpha_2(\varepsilon_0) = 0.5$ 、 $\delta = 2.65$ 、また $U_{sx} > U_0$ として (12) 式の係数 C を求めると $C = 0.93 \text{ cm/s}$ が得られる。

これから、粒子群波状落下時の理論増幅率-波長の関係式は

$$\omega_r = 0.62 / \lambda^2 \quad (13)$$

と求められる。図-3 に実験値との適合性をしめす。

5 結論

トレーサー粒子群の追従性を検討するため、静水中を自由落下する粒子群の運動について考察を行った。

これだけでは、まだ理論上からも実験上からも十分でなく、定量的な答を得るまでにいたっていない。

しかし定性的には、粒子群をトレーサーとして使用し、流れに追従させる場合には、粒子径が充分小さく、流れに混入する容積比が小である粒子群が望ましいものと考えられる。

図-1 粒子投下装置

図-2 波状落下例

図-3 波高増幅率と波長の関係 ($\Delta t = 0.6$ 秒)

6 参考文献

- (1) C. Truesdell Rational Thermodynamics Spring-Verlag 1984
- (2) M. Ishii Thermo-Fluid Dynamic Theory of Two-Phase Flow Eyrolles Paris 1975