7 反転可視化法による軸対称三次元場の電界計算

東海大・院 向井 栄治[○]

東海大・工 大山龍一郎 金古喜代治

Numerical Calculation of Electric Fields in Axisymmetric Three-Dimensional fields by Means of Inversible Visual Method

Eiji MUKAI*, Ryu-ichiro OHYAMA* & Kiyoji KANEKO*

A numerical calculation technique is presented in this paper in order to calculate the lines of electric force and equipotential contours in axisymmetric three-dimensional fields by means of inversive visual method. The inversive visual method is based on "the inversibility of potential flow fields", in which the lines of electric force and equipotential contours can be exchanged each other. In this paper, an application of this technique to electric fields is illustrated by calculating lines of electric force and equipotential contours around a suspension-type insulator. It is concluded that the presented technique is effective to calculate the lines of electric force in the fields such as composite dielectric substances with complex boundary surface of different dielectric constants.

1. まえがき

著者らは、これまで静電界を解析する手段として、ポテンシャル場の電気力線(電束)を可視化することのできるFluid Mapper(以下FMと略記)装置について検討を行ってきた⁽¹⁾⁻⁽³⁾。FM装置を用いた静電界の可視化実験により、ポテンシャル流れ場に反転的な性質のあることを見いだした⁽⁴⁾。この流れ場における反転性を利用して、二次元のラプラス場における電気力線と等電位線をFM装置により同時に可視化することが可能である。前報⁽⁵⁾では、二次元場における電気力線と等電位線の役割を交換するための反転条件を明らかにして反転可視化法による数値計算の手法を提案した。すなわち、反転可視化法を用いた計算手法は有限要素法により等電位線と電気力線を同時に数値計算する新しい計算法である。本手法による数値計算は、比較的簡単な手続きによって精度良く静電界の等電位線と電気力線を求めることができる点に特長を有している。

これまで流れ場の性質を利用して電界計算を行う同種の手法としては、ラプラス方程式の双対原理を用いた代用うず法⁽⁶⁾が提案されている。代用うず法は流れ場が与えられたとき、その解が直交するディリクレ問題を代用電荷法により数値計算し、複素関数の実数部と虚数部の直交性を用いて原問題の解を求めるものである。しかしながら、この方法は単一媒質に対しては適用が容易に可能であるが、多媒質の問題に対する検討が成されておらず適用することが困難である。

* Faculty of Engineering, Tokai University, 1117, Kitakaname, Hiratsuka, 259-12 Japan

本報告は、反転可視化法を利用した数値計算の手法を軸対称三次元のラプラス場へ拡張する方法について検討したものである。本手法による数値計算は、有限要素法によって行うために、複雑な電極形状をもった場の計算や多媒質問題の計算に対しても容易に適用できる利点がある。本研究では、反転可視化法を多媒質問題に適用した例としてボールソケット型標準懸垂がいしの周辺における等電位線と電気力線を数値計算し、その有用性を明らかにした。

2. 反転可視化法の軸対称三次元場への拡張

反転可視化法による等電位線の計算は、通常の有限要素法を用いて数値計算を実行する。また、電気力線の計算は固定境界、自然境界ならびに媒質境界に関する反転条件を満足させて、等電位線と電気力線の役割を交換することにより求められる。すでに、二次元のラプラス場に対する反転条件については前報⁽⁵⁾において詳細に考察してきた。本報告では、可視化反転法を軸対称三次元場へ拡張する方法について検討する。

Fig. 1(a), (b)は3媒質の場合における反転可視化法の概念図を示す。軸対称三次元場に対する反転条件については、二次元場における反転条件の考え方が基礎になっているので、その概要を簡単に述べる。二次元場では等電位線と電気力線の役割を交換するために、次ような領域境界の反転条件を満足させる⁽⁵⁾。すなわち

[領域境界の反転条件]：領域境界において、等電位面($\phi = \text{const.}$)が存在すれば、その境界を電気力線に平行する境界($\hat{\Psi} = \text{const.}$)に置換する。また、電気力線に平行な境界($\Psi = \text{const.}$)が存在すれば、その境界を等電位線($\hat{\phi} = \text{const.}$)に置換する。

ここで、Fig. 1(b)における電位 $\hat{\phi}$ と電界関数 $\hat{\Psi}$ は、同図(a)におけるポテンシャル場の ϕ と Ψ を反転して置換したものを表している。単一媒質の場合は、この反転条件のみを満足させればよいが、3媒質複合誘電体の場合には、さらに次に示すような反転条件を考慮する必要がある。

[媒質境界の反転条件]：複合誘電体の媒質境界面において、誘電体の誘電率比を $\varepsilon_1 : \varepsilon_2 : \varepsilon_3 = \hat{\varepsilon}_1 : \hat{\varepsilon}_2 : \hat{\varepsilon}_3$ のように反転させる。

ここで、反転後における複合誘電体の誘電率は $\hat{\varepsilon}_1 = \varepsilon_2$, $\hat{\varepsilon}_2 = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1 / \varepsilon_2$, $\hat{\varepsilon}_3 = \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_2 / \varepsilon_3$ である。一般に、 n 媒質からなる複合誘電体の反転後の誘電率は次のように表すことができる。

$$\hat{\varepsilon}_1 = \varepsilon_2, \quad \hat{\varepsilon}_n = \varepsilon_{n-1} \cdot \varepsilon_{n-1} / \varepsilon_n, \quad (n > 1) \quad (1)$$

Fig.1 Conception of inversible visual method

上記の反転条件を満足すれば、二次元のラプラス場において等電位線と電気力線を同時に数値計算することが可能となる。

反転可視化法を用いて軸対称三次元場の計算を行う場合には、前述した条件の他に次の点を考慮しなければならない。一般に、FM装置によって軸対称三次元場静電界の電気力線を可視化するためには円筒座標系 (r, θ, z) を用いて取り扱っている⁽²⁾。したがって、等電位線を可視化するには、流れ場の圧力方程式はラプラスの方程式を満足しているが、流線関数についてはラプラスの方程式を満たさないために、等電位線と電気力線の相互の交換が不可能である。

先に、Beaver⁽⁷⁾は軸対称三次元場の電解槽の実験において、直角座標系 (x, y, z) を用いるかわりに、双曲筒座標系 (p, q, z) を用いれば $z = \text{const.}$ において $p = \text{const.}$ 面と $q = \text{const.}$ 面とが互いに直交する双曲面となり、電気力線と等電位線を求める双方の場合において圧力方程式と流線関数がラプラスの方程式を満足するというを報告している。したがって、有限要素法により数値計算を行う場合には、一般に用いられている回転対称場のポテンシャルエネルギーの汎関数 χ を双曲筒座標系に変換すれば、反転可視化法を用いて電気力線を数値計算することができる。等電位線の数値計算を行う場合の汎関数 χ は次式で表される。

$$\chi = \frac{1}{2} \iint \varepsilon \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 \right\} 2\pi r dr \cdot dz \quad (2)$$

一方、電気力線を計算するための双曲筒座標系に対するポテンシャルエネルギー汎関数 $\hat{\chi}$ は、次式のように表すことができる。

$$\hat{\chi} = \frac{1}{2} \iint \hat{\varepsilon} \left\{ \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r} \right)^2 \right\} \frac{1}{r} dr \cdot dz \quad (3)$$

すなわち、等電位線を有限要素法によって数値計算する場合には、(2)式に示すような従来から用いられてきた回転対称場に対する汎関数により計算を実行し、電気力線の計算には(3)式の汎関数 $\hat{\chi}$ を使用して、その値を最小にするような $\hat{\phi}$ の値を求める。

3. 数値計算例とその検討

次に、本手法を軸対称三次元場の多媒質問題への適用を検討する。Fig. 2 に示す解析モデルはボールソケット型の250mmφ標準懸垂がいしである。このモデルは、空気($\varepsilon_1=1$)—セメント($\varepsilon_2=40$)—硬質磁器($\varepsilon_3=6$)の三層の媒質から構成されている。本計算法では有限要素法により数値計算を行う関係で解析領域全体を3079個の三角形要素に分割している。懸垂がいしモデルの数値計算は前節において述べた手順によって計算を実行するが、電気力線の計算においては媒質境界の反転条件により誘電率比を $\hat{\varepsilon}_1:\hat{\varepsilon}_2:\hat{\varepsilon}_3=40:1:(40/6)$ のように反転させる。数値計算は大型計算機SX-1(NEC)を使用して各節点の電位を有限要素法により求めている。

Fig. 3 は大型計算機SX-1により数値計算した結果をパソコンへ転送してMS-DOS上のC言語(Turbo-C, Ver. 2.0)で記述された後処理プログラムによってディスプ

Fig. 2 Analysis model and subdivision

レイ上にカラーグラフィック表示したものである。同図からも明らかなように、導体近傍の硬質磁器内の部分で電圧の負担率が高められていることがわかる。一般に、懸垂がいしの導体金具部分と硬質磁器の部分との接着にはセメントを使用している。現在のところセメントの誘電率については明確な値が知られていない。接着材として用いられるセメントは、硬質磁器に対して導体として取り扱われることが多い。しかし、本研究においては便宜上セメント部分の誘電率を $\epsilon_2=40$ として計算を行った。数値計算の結果、反転可視化法は有限要素法により計算を行うために、複雑な電極形状をもつ多媒質の誘電体に対しても容易に適用が可能であり、なおかつ高精度で等電位線と電気力線を求めることができることがわかった。

Fig.3 Lines of electric force and equi-potential contours around suspension-type insulator

4. むすび

本報告は、流れ場の反転的な性質を利用して等電位線と電気力線を数値計算する反転可視化法について、その計算法の概要を述べたものである。また、反転可視化法を軸対称三次元場へ拡張する手法について述べ、その適用性に関しても検討した。本手法は、有限要素法により数値計算を行っているために、複雑な電極形状や多媒質問題にも適用できるという利点がある。反転可視化法の適用性を確認するために、計算例としてボールソケット型の標準懸垂がいし周辺の電界の様子を計算し、本手法の有用性を明らかにした。本手法による数値計算は、電気力線と等電位線を同一のプログラムによって計算するために、簡単な手続きで精度良く電気力線を求めることができる。

参考文献

- (1) 金古・福岡:「フルイド・マッパー(ポテンシャル場の可視アナログ装置)による二次元ポアソン場の解析」電気学会論文誌 A, **107**, 49(昭62-2)
- (2) 大山・金古:「流れの可視化による軸対称三次元場の電界解析」電気学会論文誌A, **108**, 375(昭63-9)
- (3) 大山・金古:「Fluid Mapperによる針-平板電極系の空間電荷電界の可視化」流れの可視化Vol. **9**, No. 3, 5, 37(1989-10)
- (4) 金古・中西・大山・菅野:「Fluid Mapperの反転性と2媒質誘電体における二次元場電界の可視化解析」電気学会論文誌 A, **110**, 693(平2-10)
- (5) 向井・菅野・大山・金古:「反転可視化法による電界の数値計算手法」可視化情報, Vol. **10**, Suppl. No. 2, 129(1990-11)
- (6) 村島:「代用電荷法とその応用」森北出版, P. 59(1983)
- (7) Beaver: "Flux Plotting Analog for an Axially Symmetric Potential Field" J. Appl. Phys., **28**, 579(1957)