現象論的モデルによる時空カオスの解析*

——熱対流系を例として——

柳田 達雄**

Phenomenology for Convection

Tatsuo YANAGITA

1. はじめに

カオスの発見により時間的に不規則な振舞いをする多くの物理系が決定論的方程式にしたがっていることが明らかになった。しかし、通常、われわれが目にする現象は空間自由度を持つ大自由度カオスであり、小数自由度カオスでは見られない複雑な振舞いを示す。たとえば、熱対流現象は容器の形状や Rayleigh 数等の変化にともない、定常状態から周期倍化・準周期運動・間欠運動などの複雑かつ多様なカオスへの分岐を示す¹⁾。また、空間自由度を大きくすると、上に述べたようなきれいなカオスへの分岐現象は観測されず、乱れた状態が時間空間的に間欠的に現れ(時間空間間欠運動)乱流化する。さらに、Rayleigh 数が高い乱流においてもソフト・ハード乱流遷移現象が観測されている²⁾。

このような多様な振舞いも原理的には Navier-Stokes 方程式によって記述される。したがって、Navier-Stokes 方程式を正確に計算すれば現象を定量的に再現することが可能である。しかし、現象を再現することと現象の理解は必ずしも一致しない。

熱対流のような複雑系に対しては定性的性質を支配するダイナミクスを明らかにするのが理解への第一歩である。定性的性質は現象を記述する方程式系の細部によらない普遍性を持つ。すなわち、

現象の定性的性質を再現するモデルは一つではなく、ある範囲のモデル族として存在する。したがって、モデルに多少の変更を加えても定性的性質に影響はない。このような観点に立つと定性的性質の説明には必ずしも Navier-Stokes 方程式を基礎とする必要はない。

定性的解析を目的としたモデルを構築する場合、カップルド・マップ・ラティスが有効である³⁾。カップルド・マップ・ラティスは時間空間を離散化し、連続変数である場の量からなる写像力学系であり、物理現象を記述するモデルとして広く用いられている^{4)~7)}。カップルド・マップ・ラティスは短時間でシミュレーションができるため、多種多様な現象を調べられるほか、構成論的にモデルのデザインができるため現象を支配しているダイナミクスを明らかにすることができる。この小論では、熱対流 (Rayleigh-Bénard) 系を例にとり、その現象論的モデルを構築し、熱対流のダイナミクスを理解することを試みる⁷⁾。

2. 熱対流モデル

カップルド・マップ・ラティスによるモデル化は、離散化された格子上 (x, y) に状態を記述するための粗視化した場の量を選ぶことから始める。ここでは、熱対流の複雑かつ多様な振舞いを表現するための最小限の場の量として温度 E 、速度場 $\vec{v}$ を選んだ。モデルを簡単化するため圧力をダイナミクスに直接に組み入れていないが、これによる物理的要因は写像によって間接的に取り入

*原稿受付 1993年5月20日

**東京工業大学理学部

れられている。つぎに、これらの場の量が本質的にどのような変換を受けて時間発展するかを考え、それを E , $\vec{v}$ に対する写像として表現する。ここでは、対流のダイナミクスとして重要と思われる、浮力、熱拡散、粘性、 $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ を保つための圧力の効果を考慮し、以下のような写像で表す。

1. 浮 力

温度が高いサイトは上昇する力を受ける。

$$v_y^*(x, y) = v_y^t(x, y) + \frac{c}{2} \{2E^t(x, y) - E^t(x+1, y) - E^t(x-1, y)\} \quad (1)$$

$$v_x^*(x, y) = v_x^t(x, y) \quad (2)$$

2. 熱拡散

熱拡散は離散化した Laplacian で表現する。

$$E'(x, y) = E^t(x, y) + \kappa \Delta E^t(x, y) \quad (3)$$

ここで Δ は離散化した Laplace 演算子

$$\Delta A(x, y) = \{A(x+1, y) + A(x-1, y) + A(x, y+1) + A(x, y-1) - 4A(x, y)\} / 4$$

である。

3. 粘性, 圧力効果

粘性は離散化された Laplace 演算子で表す。また、非圧縮性 $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ を表現するため $\nabla(\nabla \cdot \vec{v})$ を離散化したダイナミクスを導入した。この写像は各格子点上の発散 $\nabla \cdot \vec{v}$ を 0 にするように作用する。Navier-Stokes 方程式では非圧縮性の条件は圧力場を計算し満足させるが、ここではこれを行わず簡単な写像によって表した。

$$v_x'(x, y) = v_x^*(x, y) + \nu \Delta v_x^*(x, y) + \eta \{(v_x^*(x+1, y) + v_x^*(x-1, y))/2 - v_x^*(x, y) + (v_y^*(x+1, y+1) + v_y^*(x-1, y-1) - v_y^*(x-1, y+1) - v_y^*(x+1, y-1))/4\} \quad (4)$$

y に関しても同様 [$x \leftrightarrow y$]

以上の手続きを逐次実行した後、移流項 $((\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}, (\vec{v} \cdot \nabla) E)$ を表現するための Lagrange 写像を導入する。各格子点上 (x, y) に準粒子を考え、この準粒子はその格子点での速度 $\vec{v}(x, y)$ にしたがって位置 $(x, y) + \vec{v}$ に移動し、場の量 (ここではエネルギー E と速度 $\vec{v}$) を運搬する。一般的に移動先は格子点上ではないため、場の量は移動した点の四つ

の近接格子点に準粒子と近接格子点との距離に反比例 (てこの法則) させて分配する。

以上の写像を合成したダイナミクス

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \vec{v}^t(x, y) \\ E^t(x, y) \end{array} \right\} &\longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{v}^*(x, y) \\ E^t(x, y) \end{array} \right\} \\ &\longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{v}'(x, y) \\ E'(x, y) \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Lagrangean}} \left\{ \begin{array}{l} \vec{v}^{t+1}(x, y) \\ E^{t+1}(x, y) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

によって、熱対流の時間発展を表す。

このモデルの基礎パラメータは Rayleigh 数に対応する上面と下面の温度差 ($\Delta E = E(x, 0) - E(x, N_y)$), Prandtl 数に対応する温度拡散と粘性率の比 (ν/κ), アスペクト数 (N_x/N_y) である。以下これらのパラメータを変化させたときの多様な振舞いを実験と対比して述べてゆく。

3. シミュレーション

3.1 カオスへの分岐

カオスへの分岐現象はアスペクト比を小さくし空間自由度を制限したときに観測され、Prandtl 数などによって異なったカオスへの道筋が選択される⁸⁾。たとえば、周期倍化からカオス状態となる分岐は Prandtl 数が小さい場合に観測され⁹⁾、Prandtl 数の大きい場合にはロールの準周期振動 (トーラス運動) からトーラスの崩壊によってカオス状態となる¹⁰⁾。また、ロール数を制限することによって、同じ Prandtl 数でも間欠運動からカオス化する場合もある¹¹⁾。

モデルにおいても Rayleigh 数に対応する ΔE の増加とともに熱伝導状態から対流状態へ転移する (図 1 に二次元モデルのベクトル場を示した)。

また、複雑かつ多様なカオスへの分岐現象を再現し、分岐の Prandtl 数依存性も実験結果と定性的に一致する。例として、準周期運動の低周波

2次元モデルのベクトル場。ロールが形成されていることが分かる。 $N_x=34$, $N_y=17$, $\kappa=0.4$, $\nu=\eta=0.2$, $\Delta E=0.5$

図1 2次元ベクトル場

Prandtl 数が大きい場合 $\kappa=0.002$, $\mu=0.2$, ロールが周期 f_1 で振動し, ΔE の増加とともに f_1 とは独立な周期 f_2 が出現し準周期運動を行う。この例では, f_1 が周期倍化を起こし (トラス倍化) $f_1/2$ の周期が観測されている。(a) $\Delta E=0.5$ での中心点 ($N_x/2$, $N_y/2$) での速度の鉛直成分 v_y の時間変化。(b) 時間変化のパワースペクトラム

図2 準周期運動

数の振動が周期倍化を起こしてカオス状態となるトラス倍化を図2に示す。

3.2 時間空間間欠運動

アスペクト比を増加させ多数のロールがある系では上述したカオスへの道筋は見られず, 乱れた運動が時間空間的に間欠的に現れる運動 (時間空間間欠運動) が観測される (図3)。この運動は空間的に拡がりを持つ系が乱れる時に見られる普遍的現象であり, 層流状態が続く空間的長さの確率分布によって特徴づけられる^{12), 13)}。特に, 時間空間間欠運動の開始点ではベキ分布を示し, そのベキも実験と一致する⁷⁾。

3.3 乱流遷移

ΔE を増加させるにしたがいブリュームが生じ始め空間的に乱れた構造となる (図4)。この乱流状態は中心点での温度の分布関数によって特徴づけられ, Rayleigh 数の増加にともない分布は

2次元モデルの $y=N_y/2$ 断面における v_y の時間変化。白は上昇流を黒は下降流を表す。時間空間的に乱れが生じていることが分かる。

図3 時間空間間欠運動

ガウス型から指数型へと変化する²⁾。われわれのモデルにおいても, このソフト・ハード遷移を再

ΔE の増加にともないブリュームが発生し乱流化する。(a) $\Delta E=1.0$ 対流状態 (b) $\Delta E=3.0$ ソフト乱流 (c) $\Delta E=10$ ハード乱流

図4 ΔE の増加に伴う温度場の変化

中心点 ($N_x/2, N_y/2$) で観測した温度の分布関数。ΔE の増加にともない温度分布はガウス型分布 (a) ΔE=3.0 から指数型 (b)(c) ΔE=5.0, 10.0 に遷移をし、実験事実とよく一致する。

図5 ソフト-ハード乱流遷移

現し (図5), 分布の違いはプリュームが反対側の境界まで到達することができるかどうかに関係していることが分かる。さらに, 分布をフラットネス $\langle (E - \langle E \rangle)^4 \rangle / \langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle^2$ により特徴づけ, その Prandtl 数依存性を調べた (図6)。Prandtl 数が低い系ではフラットネスは3~6まで変化し, ガウス型から指数型への遷移を明確に表している。これに対し, 高 Prandtl 数では6を越え11程度まで増加することが分かる。このような広範囲にわたるパラメータ空間の探索は Navier-Stokes 方程式を用いた数値解析では困難である。

温度の分布関数の Prandtl 数依存性をフラットネスによって特徴づけた。Prandtl 数が低い場合にはフラットネスは3.0~6.0まで変化し, ガウス型から指数型に遷移することがわかる。Prandtl 数が高い場合には6.0を越え11.0まで増加することが分かる。

図6 温度分布の Prandtl 数依存性

3.4 パターン形成

モデルの三次元への拡張は容易で, パターン形成, パターン競合によるカオス, 欠陥カオス, さらに乱流への変化等を調べることができる。三次元モデルの空間パターンの時間変化を図7に示す。パターン形成の初期段階では短時間内に大域的構造が形成されるが, ロール欠陥の消滅には非常に長時間の時間発展を必要とする。このような空間構造の時間発展も実験結果とよく一致する。

$z = N_z/2$ での断面での鉛直速度成分の時間発展。ΔE=1.0 で300ステップごとのスナップショット。始めに大域的構造が作られ, 欠陥の消滅には長時間の時間発展が必要であることが分かる。

図7 パターン形成

4. ま と め

ここで紹介した熱対流モデルは周期倍化, 準周期運動などの多様なカオスへの分岐現象, 時間空間間欠運動, ソフト・ハード乱流遷移, パターン形成などの幅広い現象を再現し, Prandtl 数依存性や統計的特徴も定性的によく一致する。Navier-Stokes 方程式を基礎とした数値解析では広範囲にわたるパラメータ空間の探索は困難である。このため, 現象の大域的構造を調べるためには定性的モデルによる解析が有用である。

現象の定性的振舞いはモデルの細部によらない普遍性を持つ。たとえば, 乱流遷移現象における分布の遷移はプリュームの性質の反映であり, モデルの詳細によっていない。したがって, 定性的性質を支配しているダイナミクスを理解するには, どのようなモデルの範囲ならばその定性的性質を再現することができるかを明らかにすることである。言い換えれば, 現実を再現するモデルと再現しないモデルの境界(虚実境界)を明らかにすることである。カップルド・マップ・ラティスは個々の要素を一つの写像として表しているため, 要素を取り除いたり, 変化させたりと構成的にモデルを構築でき虚実境界を探索する方法として有効である。

われわれの視覚は動的な振舞いの性質を捉えるのに優れた能力を持っている。したがって, 動的な性質を解析するために現象の可視化は重要な要素である。カップルド・マップ・ラティスは短時間の演算で時間発展するため, その動的な振舞いをワークステーションで観測できる。したがっ

て, 熱対流系のみならず複雑な現象の動的・定性的性質を理解するために強力な方法である。たとえば, 相転移現象を伴う沸騰⁹⁾ や雲のダイナミクス, またシアフローや Kármán 渦とそれらの崩壊に伴う乱れの空間的伝達機構の解析に有効と思われる。

参考文献

- 1) P. Manneville: *Dissipative Structure and Weak Turbulence*, Academic Press, 1990.
- 2) M. Sano, X. Z. Wu A. Libchaber: *Phys. Rev. A*, 40: 6421, 1989.
- 3) K. Kaneko: *Collapse of Tori and Genesis of Chaos in Dissipative Systems*, World Scientific, 1983.
- 4) K. Kaneko: *Simulating Physics with Coupled Map Lattice*, volume 1 of *Formation, Dynamics and Statistics of Patterns*, World Scientific, 1990.
- 5) Y. Oono, S. Puri: Study of phase-separation dynamics by use of cell dynamical systems, 1. modeling, *Phys. Rev.*, 38A: 434, 1988.
- 6) T. Yanagita: Phenomenology for boiling: A coupled map lattice model, *Chaos*, 3-2: 343, 1992.
- 7) T. Yanagita, K. Kaneko: Coupled map lattice model for convection, *Phys. Lett.*, 175A: 415-420, 1993.
- 8) A. Libchaber, J. Maurer: A Rayleigh-Bénard experiment: Helium in a small box, In T. Riste, editor, *Nonlinear phenomena at phase transitions and instabilities*, page 259. Plenum Pub., 1982.
- 9) J. Maurer, A. Libchaber: *J. de Physique Colloques*, 41-C3: 51, 1980.
- 10) M. Dubois, P. Bergé: *J. Physique Letters*, 42: 167, 1981.
- 11) J. P. Gollub, S. V. Benson: Many routes to turbulent convection: *J. Fluid Mech.*, 100: 449-470, 1980.
- 12) S. Ciliberto, P. Bigazzi: Spatiotemporal intermittency in Rayleigh-Bénard convection, *Phys. Rev. Lett.*, 60: 286, 1988.
- 13) F. Daviadiu, M. Bonetti, M. Dubois: Transition to turbulence via spatiotemporal intermittency in one-dimensional Rayleigh-Bénard convection, *Phys. Rev. A*, 42-6: 3388, 1990.

口絵1 2次元ベクトル場 (東京工業大学 柳田達雄)

(本文149頁参照)

口絵2 3次元モデルの空間パターン (東京工業大学 柳田達雄)

(本文149頁参照)