展望・解説

振動とカオス*

矢ヶ崎 一幸**

Vibrations and Chaos

Kazuyuki YAGASAKI

1. はじめに

はりや弦、板などの機械や構造物を構成する要素は、材料固有の性質あるいは形状などの幾何学的な条件のために変位と復元力の関係は非線形性を示すので、非線形系としてモデル化することが適切である場合が多い。このような非線形系に関する従来の伝統的な研究では、その自由振動や、周期外力が作用する場合の周期的な振動や共振現象などが調べられている。また、外部から振動的な励振力が作用せずに発生する自励振動や、外力の周波数と変位の振幅の関係を表す周波数応答曲線においてジャンプ現象が起こることなどはよく知られた事実となっている。

一方、1960年代から70年代にかけてカオスというまったく新しい現象が発見され、力学系理論に大きな変革をもたらされた。そして、1970年代の終り頃から、はりや弦、板の振動などの手あかのついたような問題に対して力学系理論の新しい方法が適用され、カオス現象の起こることが理論、数値シミュレーションおよび実験により明らかにされてきている。さらには、船舶、歯車機構やインパクトプリンタなどのより実用的な系のカオス現象についても研究が行われている。ここでは、これらの機械系のカオス現象のうちいくつかのものを取りあげ、それらについての研究成果を概説し、今後の課題等について展望する。なお、最近出版された Moon の本¹⁾では、カオス現象が起こ

るさまざまな物理的な例が解説されており、応用および工学的な立場からの格好の入門書となっている。

2. 座屈ばりの振動

図1に示すように、軸方向にある一定以上の圧縮力が作用すると、はりや弦は座屈し、上側あるいは下側に変形するようになる。Tseng and Dugundji²⁾は、このような座屈ばりに周期外力が作用した場合の強制振動を理論および実験的に調べ、その結果を1971年に発表した。彼らは、はりの1次モードに対する近似的な1自由度系の数値シミュレーションおよび実験において、座屈後の二つの平衡状態の近くを行ったり来たりする図2²⁾に示すような振動が起こることを観測し、それらの振動を“snap through”と呼んだ。図2は数値

図1 座屈ばり

$A_F = .025, Q = .892, \zeta = .001$
I.C.: $q_1 = 1.0, \dot{q}_1 = 0$

図2 snap through 挙動

*原稿受付 1993年5月17日

**玉川大学工学部

シミュレーションの結果で、横軸は外力の角振動数で無次元化した時間を、縦軸は座屈後の静たわみで無次元化したはりのたわみを表している。当時、カオス現象はまだ一般的には知られてはおらず、彼らは“snap through”挙動の不規則性については何ら言及していない。

このような現象に対して現代的な力学系理論の光を当てたのは Holmes³⁾ である。Tseng and Dugundji が数値解析した座屈ばりの 1 自由度系モデルは、パラメータを適当にスケールした後、次の形の Duffing 方程式となる。

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} - x + x^3 = \gamma \cos \omega t. \quad (1)$$

Holmes は、現在 Melnikov の方法⁴⁾ と呼ばれる大域的な摂動法を適用して、式(1)が Smale の馬蹄写像⁴⁾ によって記述されるような解の集合を有し、カオス現象が起こり得ることを証明した。ここで、Smale の馬蹄写像とは、図 3 に示すように、正方形の領域 ABCD を引き延ばし、U 字形に曲げ、そしてもとの正方形 ABCD に重ねるという操作から得られる写像のことをいう。いま、この 2 次元写像 f を正方形 ABCD のある 1 点 x に n 回作用させて得られる点 $f^n(x)$ がつねに正方形 ABCD に存在するものと仮定し、その点が図 3 の V_1 あるいは V_2 のうちのどちらの領域に属するかによって $a_n=1$ あるいは $a_n=2$ と

図 3 Smale の馬蹄写像

図 4 磁力により座屈したはり

(a) 数値シミュレーション結果

(b) 実験結果

図 5 ストレンジアトラクタ

定める。すると、写像 f を繰り返し作用させて得られる軌道 $\{f^n(x)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ は、完全に確率的な現象と考えられるコイン投げのように、1 と 2 からなる無限列 $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ と対応させることができる。したがって、式(1)の Smale の馬蹄写像に対応した解は確率的に変動し、カオス現象が起こることになる。また、Holmes and Marsden⁵⁾ はこの解析を拡張して、はりの運動方程式である偏微分方程式において Smale の馬蹄写像タイプのカオスの挙動が起こることを証明している。

一方、Moon and Holmes⁶⁾ は、図 4⁶⁾ に示すような、2 個の永久磁石とそれらの磁力によって座屈変形した鋼製はりからなる実験装置に対して加振実験を行い、はりがカオス的に振動することを確認した。式(1)は、適当な仮定のもとで、このはりの 1 次モードに対する近似的な運動方程式となる。図 5^{4), 6)} に、式(1)の数値シミュレーションと実験で得られたストレンジアトラクタを示す。これらの図は、横軸に外力の 1 周期ごとにサンプリングしたはりの変位あるいはひずみを、縦軸にその速度を連続的にプロットしたもので、フラクタルな構造を有し、はりがカオス的に振動することがわかる。

3. 衝突系の振動

Holmes⁷⁾ は、図 6(a) に示すような、振動するテーブルの上で飛び跳ねるボールのカオスの挙動を解析し、そのカオスの挙動が Smale の馬蹄写像によって特徴づけられることを証明した。図 6(b)⁷⁾ に数値シミュレーションによって得られたストレンジアトラクタを示す。ここで、横軸はボールがテーブルに衝突する瞬間のテーブルの変位の位相を、縦軸はその瞬間のボールの速度を表す。

Shaw and Holmes⁸⁾ は、図 7(a)⁸⁾ に示すような、片側にストッパーのついた 1 自由度系が正弦的に加振される場合を研究した。このモデルにおいて、質量はストッパーと衝突するとその瞬間の速さに比例した速さで跳ね返るものと仮定されている。彼らは Smale の馬蹄写像によって特徴づけられるようなカオスの挙動が起こることを示した。Shaw⁹⁾ は、この結果を、図 7(b)⁹⁾ に示すような、両側にストッパーのついた 1 自由度系の場合に対して拡張した。図 8⁹⁾ に図 7(b) のモデルに対する数値シミュレーションで得られたストレンジアトラクタを示す。ここで、横軸は質量がストッパーに衝突する瞬間の外力の位相を、縦軸はそ

(a) 片側にストッパーがある場合

(b) 両側にストッパーがある場合

図 7 衝突系

図 8 衝突系のストレンジアトラクタ

の瞬間の質量の速度を表す。

また、同様な解析が図 9(a)¹⁰⁾ に示すような区分線形系に対して行われている¹⁰⁾。このモデルにおいて、質量が右側のばねと接触すると、質量に作用する復元力のばね定数は k_1 から $k_1 + k_2$ に変化する。Moon and Shaw¹¹⁾ は、図 9(b)¹¹⁾ に示すような、はりとストッパーからなる実験装置に対して加振実験を行い、カオスの振動が起こることを明らかにした。ここで、はりがストッパーと接触しているときと接触していないときでは、はりの見かけ上の復元力特性は異なり、1 次モードのみを考慮した場合のはりの挙動は図 9(a) の 1 自由度系によって近似的に表される。Shaw¹²⁾ は、図

図 6 振動するテーブルの上で飛び跳ねるボール

(a) 1自由度モデル

(b) はりモデル

図9 区分線形系

9(a)の1自由度系の数値シミュレーション結果と図9(b)のはりの実験結果の詳細な比較を行っている。

4. 弦の振動

図10に示すように、両端が固定されて引張られた弦が正弦的に加振される場合を考える。弦は、加振力が大きくなると、その非線形性によって、加振方向に平面的に振動するだけでなく、ふれまわりながら振動するようになる。Johnson and Bajaj¹³⁾ は、加振方向とそれに垂直な方向の1次のモードに関する2自由度系の近似的なモデルに対して数値シミュレーションを行い、弦がカオス的なふれまわり振動を行う可能性のあることを示した。O'Reilly and Holmes¹⁴⁾ は、減衰のない場合に対して、これらのカオスの挙動がSmaleの馬蹄写像によって特徴づけられることを証明した。この結果は、減衰のある場合に対して拡張されている¹⁵⁾。また、周期外力の作用する弦がカオ的に振動することは実験的に確認されている^{14), 16)}。

図10 両端を固定された弦

5. 準周期外力を受ける系の振動

これまでは正弦的で一つの周波数成分を有するような外力に対するカオス現象について考えてきた。しかし、現実的にはこのような理想的な場合はまれで、いくつかの振動源が存在したり、一つの振動源それ自体が複雑に変動するなどの理由から、ある場合には、外力はいくつかの周波数成分を有する準周期的なものと考えられる。

Moon and Holmes¹⁷⁾ は、図4に示す磁力により座屈したはりが二つの周波数成分を有する準周期外力によって加振される場合に対して実験を行った。図11¹⁷⁾は、はりがカオ的に振動する場合の実験結果で、図(a)は外力の一つの周波数成分の1周期ごとにはりの固定端近くのひずみ(横軸)とその速度(縦軸)をサンプリングして得られたもの、図(b)はさらにもう一つの周波数成分の位相がある微小な範囲にある場合にだけひずみとその速度をサンプリングするという Double Poincaré Section と呼ばれる方法を用いて得られたものである。Double Poincaré Section の方法によって描かれた図(b)には、図(a)では見られなかったストレンジアトラクタのフラクタルな構造が現れている。また、このはりの1次モードに対する近似的な運動方程式(式(1)で外力項を準周期外力とした Duffing 方程式)に対して Melnikov の方

(a) Poincaré 写像の軌道

(b) Double Poincaré 写像の軌道

図11 準周期外力の作用するはりのストレンジアトラクタ

図12 準周期外力の作用する系のストレンジアトラクタ

法が拡張されて適用され、そのカオスの挙動のメカニズムが明らかにされている^{18), 19)}。

一方、カオス現象は非線形性の強い系でのみ起こるように考えられがちであるが、準周期外力の作用する場合には非線形性の弱い場合でも生じる。例として、外部励振とパラメトリック励振が作用する次の形の Duffing 系を考える。

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + (1 + \beta \cos \nu t)x + \alpha x^3 = \gamma \cos \omega t. \quad (2)$$

ここで、 $0 < \delta, \beta, \alpha, \gamma \leq 1$ である。このように、式(2)は弱い非線形性を有し、角振動数 ν と ω の二つの周波数成分をもつ準周期外力が作用する系を表している。外部励振と主共振状態 ($\omega \approx 1$) にあり、かつパラメトリック励振が主共振状態 ($\nu \approx 2$)、2次共振状態 ($\nu \approx 1$ or 4)、あるいはパラメトリック励振の角振動数 ν が微小 ($\nu \approx 0$) の場合にカオス現象が起こり得ることが理論および数値シミュレーションにより示されている^{20)~22)}。図12²²⁾は、外部励振とパラメトリック励振の両方が主共振状態にある場合のシミュレーションの結果で、図(a)は外部励振の1周期ごとに変位 x と速度 $\dot{x}$ をサンプリングして得られたもの、図(b)はさらにパラメトリック励振の位相がある微小な範囲にある場合にだけ変位と速度をサンプリングした、Double Poincaré Section の方法によって得られたものである。また、準周期外力が作用する、屈屈していないまっすぐなほうがカオス的に振動する可能性のあることが、同様な方法を用いて理論的に証明されている²³⁾。

6. おわりに

機械系で起こるカオス現象のいくつかを紹介し、それらについての研究成果を解説した。ここで取りあげたものに対してはカオス現象のメカニズムなどが理論的に明らかにされているが、数値シミュレーションや実験においてカオス現象が観測されているだけで、理論的な取扱いがなされていないものも多い。また、従来の研究のほとんどは、周期外力が作用する系を対象としており、準周期外力やさらに複雑に変動する外力が作用する系のカオスの挙動についての研究は少ない。特に、不規則外力が作用するような場合の研究は、流体の乱流現象との関連からも、非常に重要と考えられる。物理的および工学的な問題では多自由度系によるモデル化がしばしば必要となるが、多自由度系のカオスの挙動についても未知の部分が多く残っている。さらに、工学的な観点からは、カオス現象が起こらないようにつねに防止することを考えがちであるが、最近では、カオスを積極的に利用する試みもなされている²⁴⁾。これらの方面への今後の研究が期待される。

参考文献

- 1) Moon, F. C.: Chaotic and Fractal Dynamics (1992) John Wiley and Sons.
- 2) Tseng, W. -Y. and Dugundji, J.: Nonlinear Vibrations of a Buckled Beam Under Harmonic Excitation, Trans. ASME J. Appl. Mech., 38 (1971) 467.
- 3) Holmes, P.: A Nonlinear Oscillator With a Strange Attractor, Phil. Trans. Royal Soc. London A, 292 (1979) 419.
- 4) Guckenheimer, J. and Holmes, P.: Nonlinear Oscilla-

- tions, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields (1983) Springer-Verlag.
- 5) Holmes, P. and Marsden, J.: A Partial Differential Equation With Infinitely Many Periodic Orbits: Chaotic Oscillations of a Forced Beam, Arch. Rat. Mech. Anal., 76 (1981) 135.
 - 6) Moon, F. C. and Holmes, P. J.: A Magnetoelastic Strange Attractor, J. Sound and Vib., 65 (1979) 275.
 - 7) Holmes, P. J.: The Dynamics of Repeated Impacts With Sinusoidally Vibrating Table, J. Sound and Vib., 84 (1982) 173.
 - 8) Shaw, S. W. and Holmes, P. J.: A Periodically Forced Impact Oscillator With Large Dissipation, Trans. ASME J. Appl. Mech., 50 (1983) 849.
 - 9) Shaw, S. W.: The Dynamics of a Harmonically Excited System Having Rigid Amplitude Constraints, Part I: Subharmonic Motions and Local Bifurcations and Part II: Chaotic Motions and Global Bifurcations, Trans. ASME J. Appl. Mech., 52 (1985) 453 and 459.
 - 10) Shaw, S. W. and Holmes, P. J.: A Periodically Forced Piecewise Linear Oscillator, J. Sound and Vib., 90 (1983) 129.
 - 11) Moon, F. C. and Shaw, S. W.: Chaotic Vibrations of a Beam With Non-Linear Boundary Conditions, Int. J. Non-Linear Mech., 18 (1983) 465.
 - 12) Shaw, S. W.: Forced Vibrations of a Beam With One-Sided Amplitude Constraint: Theory and Experiment, J. Sound and Vib., 99 (1985) 199.
 - 13) Johnson, J. M. and Bajaj, A. K.: Amplitude Modulated and Chaotic Dynamics in Resonant Motion of Strings, J. Sound and Vib., 128 (1989) 87.
 - 14) O'Reilly, O. and Holmes, P. J.: Non-Linear, Non-Planar and Non-Periodic Vibrations of a String, J. Sound and Vib., 153 (1992) 413.
 - 15) O'Reilly, O.: Global Bifurcations in the Forced Vibration of a Dumped String, Int. J. Non-Linear Mech., to appear.
 - 16) Molteni, T. C. A. and Tufillaro, N. B.: Torus Doubling and Chaotic String Vibrations: Experimental Results, J. Sound and Vib., 137 (1990) 327.
 - 17) Moon, F. C. and Holmes, W. T.: Double Poincaré Sections of a Quasiperiodically Forced, Chaotic Attractor, Phys. Lett. A, 111 (1985) 157.
 - 18) Wiggins, S.: Global Bifurcations and Chaos (1988) Springer-Verlag.
 - 19) Yagasaki, K.: Chaotic Dynamics of Quasi-Periodically Forced Oscillators Detected by Melnikov's Method, SIAM J. Math. Anal., 23 (1992) 1230.
 - 20) Yagasaki, K., 他2名: Dynamics of a Weakly Nonlinear System Subjected to Combined Parametric and External Excitation, Trans. ASME J. Appl. Mech., 57 (1990) 209.
 - 21) Yagasaki, K.: Second-Order Averaging and Chaos in Quasiperiodically Forced Weakly Nonlinear Oscillators, Physica D, 44 (1990) 445.
 - 22) Yagasaki, K.: Chaos in a Weakly Nonlinear Oscillator With Parametric and External Resonances, Trans. ASME J. Appl. Mech., 58 (1991) 244.
 - 23) Yagasaki, K.: Chaotic Dynamics of a Quasi-Periodically Forced Beam, Trans. ASME J. Appl. Mech., 59 (1992) 161.
 - 24) Kim, J. H. and Stringer, J. (eds.): Applied Chaos (1992) John Wiley and Sons.