緩やかな 3 次元濃度分布の 線形計画法による可視化計測*

田山典男**, 楊 学東***

Visualizing Measurement for 3D Smooth Density Distributions by Means of Linear Programming

Norio TAYAMA and Xue Dong YANG

ABSTRACT

This paper is concerned with a theoretical possibility of a new visualizing measurement method based on an optimum 3D reconstruction from a few selected projections. A theory of optimum 3D reconstruction by a linear programming is discussed, utilizing a few projections for sampled 3D smooth-density-distribution model which satisfies the condition of the 3D sampling theorem. First by use of the sampling theorem, it is shown that we can set up simultaneous simple equations which corresponds to the case of the parallel beams. Then we solve the simultaneous simple equations by means of linear programming algorithm, and we can get an optimum 3D density distribution images with minimum error in the reconstruction. The results of computer simulation with the algorithm are presented.

Key words: Optimum 3D Reconstruction, 3D Sampling Theorem, 3D Smooth Density Distribution Model, Linear Programming Algorithm

1. 緒 言

人体の内部を 2 次元断層画像として可視化する X 線 CT 装置¹⁾は、医療診断分野に革命をもたらした。CT の原理は汎用性が高いので、近年医学分野から産業分野へ派生し、X 線だけでなく各種センサーを活用²⁾して盛んに研究され始めている。たとえば、レーザー核融合炉内プラズマ温度分布³⁾、誘電液中の電界分布⁴⁾、磁気ディスクの漏れ磁界分布⁵⁾、地球の地質構造⁶⁾、火炎内の温度分布⁷⁾、大気中汚染分布⁸⁾ など、産業分野の不

可視な対象を可視化して計測しようとする試みが、年々多くの分野に広がりつつある。

CT の再構成法に対して、医学分野で求められてきた要件と産業分野で求められている要件とは必ずしも同じではない。医学分野では、高価でも高品質な画像を得ることに最大の努力が払われており、非常に多数の投影方向のデータを用いる。しかし産業分野では、画像がそれ程高品質でなくても利用できる対象があり、むしろ安価で簡単であることが求められ、投影方向をできれば少数にしたいという要求が強い。たとえば核融合炉内の爆縮プラズマ計測のように、装置構造の制約から投影方向をごく少数しか設定できない場合もある。また投影方向を減らせるならば、装置が簡単

*原稿受付 1993年7月26日

**正会員 岩手大学工学部

***岩手大学大学院

で安価になり、X線被爆量も削減できる。しかし通常は、投影方向を減らすと再構成画像が著しく劣化してしまう。そこで、投影方向を減らしても、画像がそれ程劣化しないという再構成方法が開発されるならば、産業分野では極めて有効と思われる。

これまでに、投影方向を少数に制限して再構成するという研究がなされている^{9)~13)}。中でも文献10)の数値計画法による手法は、最適化原理で画像再構成するので比較的良好な画像が得られ、有望と思われる。しかし、投影方向をさらにごく少数に減らすと画像が劣化してしまう。

本研究では、対象物に標本化モデルを設定するという新しい考え方をとり入れて、線形計画法により最適な画像を求めることで、ごく少数方向の投影でも良好な画像を得ようとしている。つまり対象物に3次元標本化定理が成り立つという濃度変化の緩やかな濃度分布モデルを設定し、任意点の濃度値と標本点での濃度値間の影響関係を活用する。これと線形計画法を組み合わせることにより、投影方向をごく少数に減らしても、再構成誤差が最小になる最適化再構成を行い、画像劣化ないように工夫している。本研究では、分解能がどの程度あればよいかという対象毎の知識をいかしてモデルを設定してごく少数の投影から再構成する3次元可視化計測手法の理論的可能性を検討する。

本論文では、まず対象空間に空間周波数の高域遮断された緩やかな3次元標本化濃度分布モデルを設定して、3次元標本化定理による濃度値影響関係を活用し透過線積分影響係数を計算しておく。特定の少数方向から透過性平行ビームを照射してその投影データに対して、標本点濃度値と透過線積分影響係数の積和で表される連立線形方程式を導く。つぎにこの連立線形方程式に対して物理的な制約条件の下で線形計画法により再構成の誤差が最小になる最適画像を再構成し可視化計測する。最後に本手法の再構成を確認するためにコンピュータシミュレーションの結果を例示する。

2. 3次元標本化定理に基づく最適化再構成

2.1 透過線積分影響係数

従来の線形計画法による2次元再構成手法¹⁰⁾では、サイズが $u \times u$ のデジタル物体を対象にしており、特定傾き $\theta = \tan^{-1}u$ なる4方向から透過性平行ビームを照射し、投影データから連立1次方程式を立て、線形計画法により最適2次元画像を求めている。つまり各画素の正方領域内部では濃度値が一定と仮定している。そこで1本の透過線における濃度値の線積分値を、透過線が通り抜ける各画素の濃度値 f とその画素での長さ L との積の和として表しており、透過線が通り抜ける各画素での濃度値だけを用いている。1本の透過線に対して一つの1次方程式を立て、得られる連立1次方程式から線形計画法で最適解を求めている。

それに対して本研究では、3次元標本化定理を満たす濃度変化の緩やかな3次元連続濃度分布を対象にしている。つまり画素の立方領域内部では濃度値が緩やかに変化すると考えている。そこで標本化定理に基づき、1本の透過線における濃度値の線積分値を、透過線が通り抜ける各画素だけでなく周りすべての画素での濃度値を用いて、以下に示す透過線積分影響係数との積の和で表している。

まず対象物体のモデルを導入し、つぎに透過線の投影値と標本点濃度値の間の関係式を導出する。3次元濃度分布を $f(x, y, z)$ とし、その空間周波数を w_x, w_y, w_z とし、遮断周波数を w_m とする。 $|w_x| \leq w_m, |w_y| \leq w_m, |w_z| \leq w_m$ を満たす対象物体のモデルを“緩やかな3次元標本化濃度分布”と呼ぶ。この対象物体においては、3次元標本化定理より、間隔 $T_x = 1/2w_m, T_y = 1/2w_m, T_z = 1/2w_m$ で立方格子状に標本化された標本点 (x_k, y_j, z_i) における濃度値 $f(x_k, y_j, z_i)$ により、元の3次元連続空間における任意点での濃度分布 $f(x, y, z)$ が完全に復元できる。ここで $x_k = kT_x, y_j = jT_y, z_i = iT_z, k, j, i = -\infty, \dots, +\infty$ である。このとき濃度分布 $f(x, y, z)$ が標本化関数 $S(q)$ により次式で表されることはよく知られている¹⁴⁾。

$$\begin{aligned}
 & f(x, y, z) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(x_k, y_j, z_i) \\
 & \quad \cdot S(x-x_k) \cdot S(y-y_j) \cdot S(z-z_i) \\
 & S(q) = \sin 2\pi w_m q / 2\pi w_m q \quad (1)
 \end{aligned}$$

ここで, 実際には対象物体の標本点は有限領域にあり, 上式は次のように近似される。

$$\begin{aligned}
 f(x, y, z) &\doteq \sum_{k=0}^u \sum_{j=0}^u \sum_{i=0}^u f(x_k, y_j, z_i) \\
 & \quad \cdot S(x-x_k) \cdot S(y-y_j) \cdot S(z-z_i) \quad (2)
 \end{aligned}$$

つまり任意点での濃度値 $f(x, y, z)$ は, 対象物体空間におけるすべての標本点での濃度値 $f(x_k, y_j, z_i)$ から影響を受けていることを示している。そこでこれを“濃度値影響関係”と呼ぶ。

つぎに, 濃度値影響関係から透過線の投影値と各標本点濃度値の間の関係式を求める。投影値 p は対象物体 $f(x, y, z)$ を透過線に沿って線積分した値に相当するので次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
 p &= \int_0^L f(x, y, z) dl \\
 &= \int_0^L \sum_{k=0}^u \sum_{j=0}^u \sum_{i=0}^u f(x_k, y_j, z_i) \cdot S(x-x_k) \\
 & \quad \cdot S(y-y_j) \cdot S(z-z_i) dl \\
 &= \sum_{k=0}^u \sum_{j=0}^u \sum_{i=0}^u f(x_k, y_j, z_i) \cdot V_{k,j,i} \quad (3)
 \end{aligned}$$

ここで, 透過線の単位方向ベクトルを (a_x, a_y, a_z) , 対象物体空間への侵入点を (b_x, b_y, b_z) , 脱出点を (e_x, e_y, e_z) として, 侵入点から脱出点までの長さを L とし, 侵入点から点 (x, y, z) までの長さを l とする。 $0 \leq l \leq L$ 。透過線の方程式は, l をパラメータとして次式で表される。

$$\begin{aligned}
 x &= b_x + a_x l, \quad y = b_y + a_y l, \quad z = b_z + a_z l \\
 L &= \sqrt{(b_x - e_x)^2 + (b_y - e_y)^2 + (b_z - e_z)^2}
 \end{aligned}$$

式(3)において, 次式の部分を $V_{k,j,i}$ で置き換えている。

$$\begin{aligned}
 V_{k,j,i} &= \int_0^L S(b_x + a_x l - x_k) \cdot S(b_y + a_y l - y_j) \\
 & \quad \cdot S(b_z + a_z l - z_i) dl \quad (4)
 \end{aligned}$$

式(3)において, 式(4)の部分が標本点の濃度値 $f(x_k, y_j, z_i)$ に関係していないことに留意しこのように変形した。この $V_{k,j,i}$ の物理的意味は, 透過線上の濃度値の復元に対して周りの各標

本点での濃度値がどの程度影響を与えるのかを表している。そこで $V_{k,j,i}$ を“透過線積分影響係数”と呼ぶ。 $V_{k,j,i}$ は透過線の方程式にだけ依存しており, 標本点の濃度値には依存していない。したがって種々の透過線に対する $V_{k,j,i}$ を式(4)によりあらかじめ計算しておくことができる。

2.2 最適化3次元再構成の定式化

緩やかな標本化3次元濃度分布に対して透過性平行ビームを少数方向から照射した時の投影データを用いて, 線形計画法により制約条件の下で残差を最小にする最適化再構成問題を定式化する。まず投影データ毎にその透過線に対し1次方程式を立て, 連立1次方程式(5)を得る。

$$p_m = \sum_{n=1}^N c_{mn} \cdot f_n + e_m \quad (m=1, 2, \dots, M) \quad (5)$$

ここで M を透過線の総数, N を標本点の総数とし, $M > N$ とする。 p_m は実際に測定する m 番目透過線の投影値である。 $m=1, 2, \dots, M$ 。 f_n は, n 番目標本点の濃度値である。 $n=1, 2, \dots, N$ 。 c_{mn} は, m 番目透過線における濃度値線積分値に n 番目標本点の濃度値がどの程度影響を与えるのかを示す透過線積分影響係数である。 e_m は, m 番目透過線に関する誤差であり, X線等の投影値自体に含まれるノイズや測定する時の測定誤差や, 対象とモデルの違いによる偏差を含んでいる。

式(5)において, 誤差 e_m は, 正や負の値を取るのので, 非負の変数である残差 r_m を用いて次のように書き改める。また物理的制約として, 濃度値 f_n は非負の値でありかつある上限値 F を越えないので, これを制約条件として付け加える。

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^N c_{mn} \cdot f_n + r_m &\geq p_m \\
 \sum_{n=1}^N c_{mn} \cdot f_n - r_m &\leq p_m \\
 f_n &\leq F, \quad f_n \geq 0, \quad r_m \geq 0 \quad (6)
 \end{aligned}$$

つぎに不等式を等式に変えるために, 非負の変数 s を導入して, 次の連立1次方程式を得る。

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^N c_{mn} \cdot f_n + r_m - s_m &= p_m \quad (m=1, 2, \dots, M) \\
 \sum_{n=1}^N c_{mn} \cdot f_n - r_m + s_{M+m} &= p_m \\
 & \quad (m=1, 2, \dots, M)
 \end{aligned}$$

$$f_n + s_{2M+n} = F \quad (n=1, 2, \dots, N)$$

画像再構成の問題は、これらの制約条件の下で次の評価関数 R を最小にする最適化問題に帰着する。

$$R = \sum_{m=1}^M r_m \quad (7)$$

変数 s に関して、その係数が正の場合には最初の基底解を求める時にも利用できる。しかし負の場合には利用できない。そこで基底解を求めるための新たな変数として、物理的意味をもたない変数 h_m を導入する。この変数は最終的には消去されねばならないので、充分大きな正係数 Ψ を掛けてそれを評価関数に加える。したがって次式となる。

制約条件として、

$$\sum_{n=1}^N c_{mn} \cdot f_n + r_m - s_m + h_m = p_m$$

$$\sum_{n=1}^N c_{mn} \cdot f_n - r_m + s_{M+m} = p_m$$

$$f_n + s_{2M+n} = F$$

正の変数として、

$$f_n \geq 0, r_m \geq 0, s_m \geq 0$$

$$h_m \geq 0, s_{M+m} \geq 0, s_{2M+n} \geq 0$$

評価関数として、

$$R = \sum_{m=1}^M r_m + \Psi \cdot \sum_{m=1}^M h_m \quad (8)$$

このように、緩やかな3次元標準化濃度分布を再構成する問題は、制約条件の下で残差に関する評価関数 R を最小にする線形計画法に基づいた最適化問題として定式化することができる。

3. 12方向投影からの最適化3次元再構成手法

3.1 投影方向と係数行列の作り方

$u \times u \times u$ の画素からなる3次元空間において、

Fig. 1 Projection from 12 directions

最適な3次元再構成を行う事例として、12方向から透過性平行ビームを照射し、その投影値から線形計画法により最適化3次元再構成を行う手法を明らかにする。Fig. 1に示すように、 $y=0$ の平面に向かって特定傾きの4方向から順に照射し、 $y=0$ に平行な投影平面において対応する4枚の投影画像を同期し順に読出す。つまり画素一辺長に等しい間隔で2次元サンプリングして $u \times u$ の u^2 個の投影値を順に4回読出す。 $x=0$ の平面や $z=0$ の平面でも同時に行う。したがって12方向から平行ビームを照射し合計 $12u^2$ 本の透過線に対応する $12u^2$ 個の投影値 p_m を読出す。

透過線がすべて定まったので、各々の透過線に対して式(4)を用いすべての標本点位置 (x_k, y_j, z_i) での透過線積分影響係数 $V_{k,j,i}$ を計算して、 M 行 N 列の係数行列 $[c_{mn}]$ を作る。ただし $k, j, i = 0, 1, 2, \dots, u$ である。この係数行列の各行は、各透過線に対応しており、 $m=1, 2, \dots, M$ で $M=12u^2$ である。各列は、各標本点に対応しており、 $n=1, 2, \dots, N$ で $N=(u+1)^3$ である。標本点の順番 n のつけ方を $n=k \times (u+1)^2 + j \times (u+1) + i + 1$ とすると、 m 番目の透過線に対する標本点位置 (x_k, y_j, z_i) での透過線積分影響係数 $V_{k,j,i}$ は、係数行列における m 行 n 列の成分 c_{mn} として格納すればよい。

3.2 3次元再構成の計算機シミュレーション

上述の12方向投影データから線形計画法により最適化3次元再構成の手法を確認するために、計算機シミュレーションを行った。使用計算機としては、SONY 製ワークステーション NEWS (UNIX, C言語) を用いた。対象として次の緩やかな3次元標準化濃度分布の事例を示す。

$$f(x, y, z) = \begin{cases} (1 - \cos(\pi x/2))(1 - \cos(\pi y/2)) \\ (1 - \cos(\pi z/2))/8 & 0 \leq x, y, z \leq 4 \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \quad (9)$$

従来の線形計画法による2次元再構成手法¹⁴⁾を3次元に拡張した手法と本手法とで3次元再構成のシミュレーション実験を行った。投影方向は同じ12方向で $u=4$ である。濃度分布モデルとして3.1の方法で作成した係数行列 $[c_{mn}]$ を与えた。対象濃度分布の周波数は1であり、モデルの遮断周波数が2なので、標本化定理の条件が成立している。3次元再構成の結果を Fig. 2 に示す。slice 1, 2, 3, 4 には、 $z=0.5, 1.5, 2.5, 3.5$ の断面位置における $0 \leq x, y \leq 4$ の領域範囲での2次元濃度分布 $f(x, y)$ を示した。本手法により再構成された断面画像(c)は、従来の手法により再構成された(b)に比べ、元の画像(a)により近い。

(a) Original 3D images
(b) Reconstructed 3D images by conventional method
(c) Reconstructed 3D images by proposed method
Fig. 2 Reconstruction simulation of 3D images

Fig. 3 には、収束回数に伴い評価関数 R が減少して収束していく様子を示した。従来の手法では、評価関数 R の値が最終的に3.3位でとどまってしまうのに対して、本手法では0.03位まで減少してから収束した。Table 1 には、投影データ数、平均誤差、再構成時間、収束回数の比較を示した。平均誤差は、計算量の比較的小さい次式の正規化絶対平均誤差 E を用いた。

$$E = \frac{\sum_{x=0}^u \sum_{y=0}^u \sum_{z=0}^u |f(x, y, z) - f'(x, y, z)|}{\sum_{x=0}^u \sum_{y=0}^u \sum_{z=0}^u |f(x, y, z)|} \quad (10)$$

ここで $f(x, y, z)$ は原画像で、 $f'(x, y, z)$ は再構成画像である。従来の手法に比べてこの事例では、再構成時間は1.3倍になるが、再構成平均誤差が大幅に小さくなり18倍位の良い3次元画像を再構成することが分かった。これは、従来手法に対して本手法手では、標本化定理を満たす緩やかな3次元標本化濃度分布モデルを導入しており、濃度値影響関係により対象物体をより詳細に表現して再構成誤差が最小になる最適化再構成を行っているため、良い画像が得られたと考えられる。ここでは、まだ新しい手法について大まかな

Fig. 3 Convergent change of evaluating function R with the number of repetitions t

Table 1 Comparison of the results of conventional method with proposed method

	Number of projections	Mean error E	Convergent time	Convergent number
Conventional method	192	0.80050	360 m	1,808
Proposed method	192	0.04375	545 m	2,337

比較を試みた段階であり、詳細な定量的な検討を今後行うことが必要である。

4. む す び

本論文では、対象物体に緩やかな3次元標本化濃度分布モデルを導入して、ごく少数方向の投影データから、濃度値影響関係を活用し線形計画法により再構成誤差を最小にする最適化画像再構成の新しい手法を提案した。計算機シミュレーションにより、12方向投影でも従来手法よりかなり良い3次元画像が再構成できることを例示した。

本手法の特色は、対象濃度分布の最大周波数がモデルの遮断周波数より低いならば、投影方向をごく少数にしても良い3次元画像を再構成できることである。複雑形状の再構成には向かないが、標本化定理が成り立つ程度に画素間隔に対して変化が緩やかであれば、良い画像を再構成できる。対象濃度分布が複雑な時には、理論上のずれが最小になる最適なモデル画像を再構成する。

投影方向を減らせれば、装置構造が簡単になり手軽で安価になる。投影回数が減りX線被爆量を削減できる。特に加速器のビーム観測や核融合炉のプラズマ観測のように装置構造上の制約から、投影方向がごく少数しかとれないという要求に対応する可能性がある。本手法の問題点は、多くの記憶容量が必要なことである。しかし半導体素子の開発速度は急速であり、高速な大容量記憶素子の登場が期待されるので解決すると思われる。

今後の課題は、具体的な応用対象へより詳細な検討をして、実際に画像を再構成し確認すること

である。緩やかな3次元濃度分布をごく少数方向から大まかに再構成する新しい可視化計測手法への一つの可能性がある。

参 考 文 献

- 1) 尾上守夫：医用画像処理，(1982) 245-312，朝倉書店。
- 2) 高木幹雄：特集画像センシング技術，計測と制御，26-8 (1987) 651-680。
- 3) 中井，篠原，片山，陳，宮永，田中，山中，西原，山中，中井：X線エミッションCTによる爆縮プラズマ3次元濃度分布測定，電子情報通信学会技術報告，IE90-25 (1990) 53-57。
- 4) H. Hertz：Kerr effect tomography for nonintrusive spatially resolved measurements of asymmetric electric field distributions, Applied Optics, 25-6 (1986), 914-921。
- 5) J. B. Elsbrock, W. Schroeder, E. Kubalek：Evaluation of three-dimensional micromagnetic strayfields by means of electron-beam tomography, IEEE Trans. Mag, MAG-21-5 (1985), 1593-1595。
- 6) S. Rokugawa：Geotomography-theoretical background, Geophys. Explor, 39 (1986) 377-383。
- 7) 内山，竹沢，阿部，白，中島，油田：熱線CTの提案，信学論(D)，J67-D-9 (1984)，1021-1027。
- 8) R. L. Byer and L. A. Shepp：Two-dimensional remote air-pollution monitoring via tomography, Optics Letters, 4-3 (1979), 75-77。
- 9) 仁木，神原，高橋：少数投影からの画像再構成法について，信学論(D)，J68-D-2 (1985) 201-202。
- 10) 小林，山口：数値計画法による少数投影からの断層像再構成，信学論(D)，J68-D-12 (1985) 2056-2063。
- 11) 工藤，斎藤：少数方向投影からのCT画像再構成，信学論(D)，J71-D-7 (1988) 1335-1337。
- 12) 田山，孫，太田原：3次元デジタル物体に対する投影画像からの再構成，信学論，J72-D-II-7 (1989) 1095-1102。
- 13) 田山，楊：緩やかな3次元濃度分布に対する投影からのパターン計測，計測自動制御学会論文集，27-7 (1991) 741-748。
- 14) たとえば尾上守夫：画像処理ハンドブック，(1987) 40-44，昭晃堂
ここで信学論：電子情報通信学会論文誌。