125 粒子通過頻度を用いた流場の画像計測 (第2報) — 2次元速度場の計測 —

大阪府立大学 西尾 茂, 平田奈美 ○, 奥野武俊

Image Measurement with Statistical Analysis (2nd report: Two-dimensional Velocity Field)

Shigeru NISHIO*, Nami HIRATA** and Taketoshi OKUNO*

An image measurement technique using the possibility of particle passing has been extended to obtain two-dimensional velocity field. Present paper describes the principle of the statistical analysis for the velocity field. An numerical simulation was carried out to examine the process of the present technique, and it shows that the digitalized image data may cause an error factor on the obtained velocity vector directions.

1 緒 言

流れの可視化画像を用いて流速などを計測する、いわゆる画像計測の手法は数多く提案されているが、著者らは前報¹⁾において統計解析手法を用いて画像データから時間平均流速を直接求める新しい手法の提案を行った。これは、トレーサ粒子の分布密度が流場内で一定とみなせる場合には粒子の通過頻度がその点の流速に比例することに着目し、3次元流場でもスリット光面上の流速の絶対値の分布を得ることのできる手法である。

本論文では、前報で粒子通過頻度を求めるものとして行った計測原理の定式化を時空間微分概念を用いてより一般的な形とすることにより、統計的手法においても速度ベクトルを求めることが可能であることを示した。また、数値シミュレーションの結果から、デジタル画像を処理する上での誤差要因の特定を行った結果についても述べる。

2 時空間微分を用いた定式化

本論では、スリット光を用いて可視化を行う場合を考えるが、理論展開の必要上から仮想的にスリット光と同じ強度の照明を流場全体に与えたときの輝度分布を $f(x, y, z, t)$ とする。この輝度分布が流れとともに移動し、輝度分布 $f(x, y, z, t)$ が時間的にも空間的にも Taylor 展開可能なとき、流体粒子の移動に伴う輝度の変化は Lagrange 微分を用いて次式のように記述できる²⁾³⁾。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g(x, y, z, t, \Delta t)}{2\Delta t} \quad (1)$$

*Osaka Prefecture University, 1-1 Gakuen-cho, Sakai, Osaka 593, Japan

**Graduate Student of Osaka Prefecture University

ここで、(1) 式を流線座標 (ξ, η, ζ) で書き換えるために流速を (u_ξ, u_η, u_ζ) とおくと、 $u_\eta = u_\zeta = 0$ であるから、

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u_\xi \frac{\partial f}{\partial \xi} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g(\xi, \eta, \zeta, t, \Delta t)}{2\Delta t} \quad (2)$$

となる。したがって、 $\partial f / \partial \xi$ が 0 でない区間が計測時間内に観測点を通過するとき、 u_ξ がその時間平均値 $\bar{u}_\xi$ で一定値とし、過程がエルゴード性を満たすならば、

$$|\bar{u}_\xi| = \frac{\frac{1}{T} \int_0^T \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| dt}{\frac{1}{T} \int_0^T \left| \frac{\partial f}{\partial \xi} \right| dt} = \frac{E \left[\left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| \right]}{E \left[\left| \frac{\partial f}{\partial \xi} \right| \right]}, \quad (3)$$

として、 $|\bar{u}_\xi|$ を求めることができる。ここで、 $E[\]$ はサンプルデータの集合平均を表わし、(2) 式右辺の極限は十分に小さく、他の項に対して無視できるものとした。ただし、流線はスリット光面上にあるとは限らないため、可視化画像から $|\partial f / \partial \xi|$ が常に得られるわけではない。しかし、粒子の分布密度は局所的にはどの方向にも等しいと考えられるので、

$$E \left[\left| \frac{\partial f}{\partial \xi} \right| \right] = E \left[\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \right] = E \left[\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \right] = E \left[\left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| \right], \quad (4)$$

とでき、スリット光面上の画像の空間微分から $E[|\partial f / \partial \xi|]$ の値を推定すればよい。(3) 式は濃淡分布をもつ輝度関数を用いて定式化されているが、計測にあたっては 2 値化画像を用い、微分値を差分値で置き換えることで、簡単な計測システムを構築することができる。

3 速度成分を求める統計解析手法

2 次元流の計測に用いる支配方程式は、照明強度の時間的・空間的なばらつきが無視できるものとする、次式のようになる。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad (5)$$

(5) 式の支配方程式を用いる、いわゆる時空間微分法では、傾き $(\partial f / \partial x, \partial f / \partial y)$ をもつ関数 f が速度 $\mathbf{u}(u, v)$ で平行移動したとき、その点における時間微分値の大きさが、速度 $\mathbf{u}$ と関数の勾配の内積に等しいことを利用している。 $(\partial f / \partial x)^2 + (\partial f / \partial y)^2 \neq 0$ の任意の点で

Fig.1 Displacement of boundary of particle image.

Fig.2 Diagram for determination of flow direction.

(5) 式の関係は成立するが、前節の方法では速度の絶対値の情報しか残らない。(5) 式は速度ベクトルに関する情報を含んでいるから、統計的に処理する際にこの情報を残すようにすればよい。そこで、まず $h = \sqrt{(\partial f / \partial x)^2 + (\partial f / \partial y)^2}$ とし、

$$\alpha_x = \frac{\partial f / \partial x}{h}, \quad \alpha_y = \frac{\partial f / \partial y}{h}, \quad \beta = \frac{\partial f / \partial t}{h}, \quad (6)$$

とき、 $h \neq 0$ のとき (5) 式の標準化を行う。

$$\alpha_x u + \alpha_y v + \beta = 0. \quad (7)$$

(7) 式は、Fig.1 に示すように方向 $\mathbf{n}(\alpha_x, \alpha_y)$ に傾き 1 の勾配をもつ関数が速度 $\mathbf{u}(u, v)$ で平行移動したときの関数の時間微分 β を与える。このとき、

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} + \beta = 0, \quad \text{ただし } |\mathbf{n}| = 1, \quad (8)$$

であることから、 $-\beta$ は $\mathbf{n}$ 方向の $\mathbf{u}$ の速度成分を与えることがわかる。したがって、 $-\beta \mathbf{n} = (-\beta \alpha_x, -\beta \alpha_y)$ を統計的に処理することにより、 $\mathbf{u}$ の方向を求めることができる。すなわち、各時刻の画像データから $-\beta \mathbf{n}$ を取り出すと Fig.2 に示すようなベクトル分布を得ることができ、このベクトル分布の平均から流速 $\mathbf{u}$ の方向を求めることができる。ただし、 $h = 0$ のときには (8) 式は得られず、意味のある解を求めることはできないので、流向を求める統計値にはこれらの寄与を排除する必要がある。結局、2次元流の場合には統計量としては、従来通りの $E[|\partial f / \partial t|]$, $E[|\partial f / \partial x|]$, $E[|\partial f / \partial y|]$ のほかに $E[(\partial f / \partial t \cdot \partial f / \partial x) / h^2]$, $E[(\partial f / \partial t \cdot \partial f / \partial y) / h^2]$ を求めることにより、流向・流速を求めることができる。

4 数値シミュレーション

可視化画像を統計的に処理し速度ベクトルを求める手法の原理を前節で示したが、本節では数値的に発生させた可視化画像を解析した結果について述べる。20×20 画素の領域内で任意の位置に発生させた粒子像を数値的に発生させ、シミュレーションに用いる可視化画像とした。粒子直径は $r = 4.0$ とし、粒子の移動距離 $|\mathbf{u}| = 1.0$ とした。速度ベクトルを $\mathbf{u} = (\cos \theta, \sin \theta)$ とするとき、 $\theta = 0, \pi/12, \pi/6$ のときにシミュレーションで得られたベクトルの各方向の頻度分布ならびに平均値を Fig.3 に示す。本シミュレーションで用いた画像は 2 値化画像であり、周囲 4 点の輝度値からエッジの法線方向を求めているため、法線方向は 8 方位にしか現われない。したがって、Fig.3 においては頻度分布は 4 方向のベクト

Fig.3 Calculated probability distribution and averaged flow vectors.

ルにしか現われず、これらの平均から速度ベクトルを推定することになる。また、本結果は計算領域内において得られたデータの平均値で表示されており、各画素に対してはこれらの値に対してばらつきをもって分布する。

Fig.4 に、数値シミュレーションにおいて粒子の方向として入力とした u の方向 θ と計算から得られた速度ベクトルの方向 $\bar{\theta}$ を示す。 $0 < \theta < \pi/4$ では $\bar{\theta}$ は θ より小さい値をとり、 $\pi/4 < \theta < \pi/2$ では大きい値をとる。これは、格子上に離散的に配置された輝度データから粒子像のエッジを同定するとき、 x , y 方向と 45° 方向のエッジに対する感度特性が異なるためと考えられる。Fig.5 において横軸はエッジの法線方向を表わし、速度と法線方向のなす角をベクトルの方向で表わす。それぞれのベクトルの大きさはエッジの検出確率を表わしており、例えば x 方向の法線をもつエッジに対しては $E[(\partial f/\partial t \cdot \partial f/\partial x)/h^2]$ の値を示している。解析的に得られる解ではこのグラフは円となるが、デジタルデータからのエッジ検出特性の違いから、 x 方向と 45° 方向は異なるグラフとなる。

Fig.4 Comparison of exact velocity direction and the calculated result.

Fig.5 Comparison of sensitivity of edge detection.

5 結 言

粒子の通過頻度を用いた統計的画像計測手法について、基礎方程式をより一般的な形に書き換えるとともに、速度ベクトルの計測原理について提案し、数値シミュレーションで計測原理の検証を行った。また、デジタル化された画像からの速度ベクトルの抽出は、法線方向の検出感度の違いから画面に対して速度のなす角によってことなる特性を示すことが数値シミュレーションからわかった。

参考文献

- (1) 西尾 茂, 奥野武俊, 平田奈美, 粒子通過頻度を用いた流場の画像計測, 可視化情報学会誌, Vol.15, Suppl No.2, 1995, pp.201-204
- (2) 西尾 茂, 奥野武俊, 可視化画像の時空間微分を利用した流場の画像計測 (第2報) -高次微分項を採用した場合-, 関西造船協会誌, 第218号, 1992, pp.41-45
- (3) 安藤 繁, 画像の時空間微分算法を用いた速度ベクトル分布計測システム, 計測自動制御学会論文集, Vol.22, No.12, 1986, pp.1330-1336