211 平行噴流に発生する振動現象について

大島貴充 (愛知工業大学)

On the Vibration generated in the Parallel Jet

Takamitsu Ohshima, Aichi Institute of Technology

The injection of a two-dimensional free jet into a stationary fluid results in the formation of two parallel vortex streets whose vortexes are located alternately when the Reynolds number is determined by the velocity of the jet and the nozzle width is in the range of $10^2 \sim 10^3$.

To study the behavior of such vortex street, we used milk as a tracer and recorded the pattern of the flow, i.e. the vibration, of two vortex street and the central axis of the jet.

Furthermore, we recorded the power spectrum of the pressure changes in the flow field using pressure sensors, and studied the behavior of the vibrating flow jet field. In addition, assuming that the flow is that of an ideal fluid, we represented the flow field using Euler's kinetic equation and a linear approximation equation of continuity, and demonstrated that the two parallel jet vibrated. We also present the vortex street generated by the parallel jet.

Key Word : Parallel Jet, Parallel Flow, Flow Induced Vibration, Internal Wave Model, Free Jet, Flow Pattern, Vortex Dynamics, Unsteady Flow, Rectangular Jet, Tracer Method

1. はじめに

同種の静止流体中へ噴出する二次元自由噴流は、噴流の中心線に直角方向に規則的な振動をすることがよく知られている。この現象の発生原因については、噴流両側に形成される渦列に起因するとする説、自由剪断流としての噴流の安定性にもとづくとする説など数々の説が提唱されているが、定説はない。本研究は上記の噴流の振動現象は、噴流が形成する速度場に発生する内部波（波動形攪乱）に起因するものとする立場から、内部波の数学モデルから導かれる噴流の性質を数値解析によって求め、前記の考え方の妥当性を検討したものである。噴流の可視化結果との対比は、振動する噴流の形状およびその時間推移による変化の模様を主とした定性的側面からおこない、また噴流の振動している流れ場のパワースペクトルの測定結果は、その一例を示すにとどめ詳細については本報では言及しない。噴流の振動数、振動数と噴流の幅など、噴流の振動している流れ場のパワースペクトル、クロススペクトル解析結果などの定量的側面については別報にゆずる。

2. モデルの構成

流体は完全流体とし、流れ場には次の仮定をおく。

1. 流れ場は二次元とする。
2. 攪乱が発生する以前の定常流（主流）は、流れの方向（ x 方向）の速度が流れの方向に直な方向（ y 方向）に変化する平行流とする。
3. 攪乱（速度変動）の大きさは主流に比べて1

位の微小量とする。

基礎方程式はオイラーの運動方程式と連続の式で、デカルト座標系で以下のようなものである。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial y} \quad (3)$$

u, v : それぞれ速度の x, y 成分

p : 運動学的圧力（圧力/密度）

t : 時間

ここで、流れは定常な噴流に微小攪乱を重複した形で表しうると考え、各速度成分を次式で表す（平行流の仮定により v の定常成分はない）。

$$\begin{aligned} u &= \bar{u}(y) + \tilde{u}(x, y, t) \\ v &= \tilde{v}(x, y, t) \\ p &= p_0 + \tilde{p}(x, y, t) \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 $\bar{u}(y)$ は定常な噴流で y のみの関数、 p_0 は定常な噴流（主流）の圧力。また記号 $\bar{\cdot}$ で平均値、 $\tilde{\cdot}$ で平均値まわりに変動する攪乱をあらわす。

(4) を (1) ~ (3) に代入し、2 位以下の微小量を見捨てる。攪乱を記述する線形化された次の 3 個の方程式をうる。なお $u(x, y, t)$ などにおける (x, y, t) の記述は省略する。

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

この方程式群は実係数の線形微分方程式である。この方程式の実数解を求めるために、複素数解 $\hat{u}$, $\hat{v}$, $\hat{p}$ を次のような波動形攪乱の形におく。

$$\begin{aligned} \hat{u} &= U(y) \times e^{i\alpha(u-ct)} \\ \hat{v} &= V(y) \times e^{i\alpha(u-ct)} \\ \hat{p} &= P(y) \times e^{i\alpha(u-ct)} \end{aligned} \quad (8)$$

ここに、 i は虚数単位、 U , V , P は y のみの複素関数、 α は波数（実数）、 c は波動速度（複素数）である。したがって $c = c_r + i c_i$ とかけ、 c_i の正負はそれぞれ時間経過による攪乱の増幅、減衰に対応する。また記号 $\sim$ は複素数解を表す。

(8) を (5)～(7) に代入すると U , V , P を支配する次の方程式群が得られる。

$$i\alpha U + \frac{dV}{dy} = 0 \quad (9)$$

$$i\alpha(\bar{u}-c)U + V \frac{d\bar{u}}{dy} + i\alpha P = 0 \quad (10)$$

$$i\alpha(\bar{u}-c)V + \frac{dP}{dy} = 0 \quad (11)$$

この3式より U , P を消去すると V に関する次式が得られる。

$$\frac{d^2 V}{dy^2} = \left\{ \frac{1}{\bar{u}-c} \times \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} + \alpha^2 \right\} V \quad (12)$$

この式は Rayleigh の式としてよく知られているもので、 $u(y)$ なる速度分布をもつ非粘性流体の平行流の安定性を支配する基礎方程式である。適切な境界条件のもとで、任意の α の値に関して解け、 α と c および $V(y)$ の関係を与える。攪乱を支配する方程式は実係数線形微分方程式であるから、仮定した複素解の複素共役も解である。したがって攪乱の実数解が求まる。実際の噴流の速度分布は、下流にいくにしたがって広がり、速度分布の形状が変化する。長方形の噴出口直後の方形の速度分布から、図1⁽¹⁾に示すような速度分布へ移行して、しば

Fig.1 Velocity distribution in a two-dimensional turbulent jet. Measurement due to Foerthman.

らくの間この速度分布の形状が維持される。速度分布の y 方向への広がり小さいところを、平行流れであるとしてモデル化する。このような速度分布は一般に次のような式で表される⁽²⁾。

$$\bar{u}(y) = u_c \operatorname{sech}^2(ky) \quad (13)$$

ここで、 u_c は噴流の中心軸上の速度、 k は噴流の y 方向への広がりを表すパラメータである。図に示すような、噴流の中心軸上の速度 u_c と半値幅 L をもちいて無次元化すると、定常な噴流の速度分布の式と Rayleigh の式は次のように表される。

$$\bar{u}_n(y) = \operatorname{sech}^2(k_n y_n) \quad (14)$$

$$\frac{d^2 V_n}{dy^2} = \left\{ \frac{1}{\bar{u}_n - c_n} \times \frac{d^2 \bar{u}_n}{dy^2} + \alpha_n^2 \right\} V_n \quad (15)$$

ここで、 $u_n(y) = u(y)/u_c$, $y_n = y/L$,

$$k_n = kL = \cosh^{-1} \sqrt{2}$$

(14) を (15) に代入すると次式を得る。

$$\frac{d^2 V_n}{dy_n^2} = \left\{ \frac{6k_n^2 \operatorname{sech}^2(k_n y_n) \{ (2/3) - \operatorname{sech}^2(k_n y_n) \}}{\operatorname{sech}^2(k_n y_n) - c_n} + \alpha_n^2 \right\} V_n \quad (16)$$

ここで、 $V_n = V(y_n) = V(y)/u_c$, $c_n = c/u_c$,

$$\alpha_n = \alpha L$$

(16) 式を解き、 $c_i = 0$ 、すなわち攪乱が増幅も減衰もしないときの、 $V_n(y_n)$ の実数解を求める。 c_n は実数部のみとなるので、以後 c_{nr} を c とする。

この実数解には次の二つがある。

$$V_n(y_n) = A \operatorname{sech}^2(k_n y_n) \quad (17-1)$$

$$\text{ただし、 } \alpha_n = 2k_n, c = (2/3)u_c$$

$$V_n(y_n) = A \sinh(k_n y_n) \operatorname{sech}^2(k_n y_n) \quad (17-2)$$

$$\text{ただし、 } \alpha_n = k_n, c = (2/3)u_c$$

(17-1) は y_n について偶関数、(17-2) は y_n について奇関数である。これらの $V_n(y_n)$ をもちいて (9)～(11) から $U_n(y_n)$, $P_n(y_n)$ が求まり、その結果を (8) へ代入すれば複素数解 $\hat{u}$, $\hat{v}$, $\hat{p}$ が求まる。その共役も解であるから、実数解 $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, $\tilde{p}$ が求まる。この実数解に定常な噴流の速度分布を加えれば、非定常な噴流の流れ場の波動モデルが求まる。

$V_n(y_n)$ が偶関数の場合、波動モデルは次式となる。

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} + \tilde{u} \\ &= \operatorname{sech}^2(k_n y_n) \\ &\quad + A \sinh(k_n y_n) \operatorname{sech}^3(k_n y_n) \sin\{\alpha_n(x_n - c t_n)\} \\ v &= \tilde{v} = A \operatorname{sech}^2(k_n y_n) \cos\{\alpha_n(x_n - c t_n)\} \\ p &= p_0 \\ &\quad + A c \sinh(k_n y_n) \operatorname{sech}^3(k_n y_n) \sin\{\alpha_n(x_n - c t_n)\} \end{aligned} \quad (18)$$

$V_n(y_n)$ が奇関数の場合、波動モデルは次式となる。

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} + \tilde{u} \\ &= \operatorname{sech}^2(k_n y_n) \\ &\quad + A \{ \sinh^2(k_n y_n) - 1 \} \operatorname{sech}^3(k_n y_n) \sin\{\alpha_n(x_n - c t_n)\} \\ v &= \tilde{v} = A \sinh(k_n y_n) \operatorname{sech}^2(k_n y_n) \cos\{\alpha_n(x_n - c t_n)\} \end{aligned} \quad (19)$$

$$p = p_0$$

$$+ A c \{ \sinh^2(k_n y_n) - 1 \} \operatorname{sech}^3(k_n y_n) \sin \{ \alpha_n (x_n - c t_n) \}$$

ただし、 $t_n = t / (L / u_c)$

(18)の形の解が、互い違い形(千鳥形)の渦列に対応し、(19)の形の解が対称形の渦列に対応する⁽³⁾。なお(16)式から α_n のある範囲にわたって $c_i > 0$ の擾乱の増幅解が、 α_n のある値に対応して数値的に得られることが知られているが、そのことについては別報で述べる。

3. モデルの検証

本報では一般的に身近で観察される互い違い形の渦列についてモデルの検証をおこなう。対称形のモデルの検証は本報ではおこなわない。

3-1. 流脈線

図2に検証にもちいた噴流の可視化実験装置を示す。図2.(a)は装置全体図で、貯水タンクより流量調節弁を通った水は整流タンクへ入る。整流タンクから吹き出しノズルまでは、30×60×550mmの矩形の直線流路である。そして絞りを通り10×60×100mmのノズルより噴出する。図2.(b)は噴流の流れ場の詳細図である。天井板と床板に仕切られた、間隔60mmの二次元の流れ場である。噴流の流れ場の可視化にはトレーサーにミルクをもちい、噴流の中心の流脈線と噴流の両側の剪断層に発生する渦列(流脈線)を可視化した。図3に噴流の可視化結果を示す。ノズル幅 w とノズル出口の平均速度 $\bar{u}$ で定義したレイノルズ数は260、520、780である。ビデオカメラの位置は $x/w = 9$ 、シャッター速度は1/250秒である。トレーサーには市販されている牛乳の脂肪分の多いものを用いた。ミルクで薄く白濁させた静止流体の中へ、矩形断面のノズルより真水を噴出させた。噴流の中心の黒い線はミルクである。Re.=260では、噴流中心の流脈線が直線から波形に変わり、渦の中へ取り込

- ①: over flow water tank
- ②: flow control valve
- ③: tank of uniforming of flow
- ④: rectangular pipe
- ⑤: apparatus of visualization
- ⑥: video camera
- ⑦: jet flow field
- ⑧: water tank

(a). Layout of experimental two-dimensional jet injector of tracer

(b). Two-dimensional jet flow field
(Detail diagram of ⑦)

Fig.2 Schematic diagram of the experimental two-dimensional jet

まれていく様子がわかる。また噴流の両側の剪断層に互い違いの渦列が観察される。この連続影像は14/30秒間隔の流脈線の対時応動である。観察される渦列は、後流に発生する渦列より渦列の長さは短く、渦列はすぐに崩壊にいたることがわかる。Re.=520では、噴流の中央が渦へ巻き上がっていく様子がわかる。しかし y 方向

$t = 0/30 \text{ sec.}$

$t = 14/30 \text{ sec.}$

$t = 28/30 \text{ sec.}$

$t = 42/30 \text{ sec.}$

(a). $\bar{u} = 3 \text{ cm/s}$ (Re. = 260)

$t = 0/30 \text{ sec.}$

$t = 14/30 \text{ sec.}$

$t = 28/30 \text{ sec.}$

$t = 42/30 \text{ sec.}$

(b). $\bar{u} = 6 \text{ cm/s}$ (Re. = 520)

Fig. 3 Motion pictures of streak line, two-dimensional free jet

Fig. 4 The calculative result of streak line, two-dimensional free jet

Fig. 5 Motion pictures of streak line for center line of two-dimensional free jet

への広がりが大きくなり渦列の長さはさらに短くなって、一対の渦が観察されるだけである。Re. = 780 では、トレーサーに使用したミルクによる噴流の中央の流脈は波形にはなるが、渦へ成長せず崩壊する。さらに噴流の両側の剪断層の幅が広がり、噴流の平行流れの部分が無くなる。図4は波動モデルの計算結果である。攪乱の振幅 A は $\bar{u}$ に対して一位の微小量であるので最大値を1にとった。 $A = 1, 0.5$ の場合の流脈線の計算結果である。完全流体の平行噴流の仮定の基でのモデルであるので平行な渦列がつずいている。しかし実験結果の渦列のつづく、レイノルズ数が260の場合とは定性的に一致する。図5に噴流の中心の流脈線の対時応動を示す。(a)は攪乱の振幅 A が0.3の場合の計算結果である。(b)はレイノルズ数260の実験結果であり、ビデオ映像の噴流の対時応動をトレースしたものである。両者は定性的には似ている。

3-2. 噴流場のパワースペクトル

図6に噴流場の圧力変化のパワースペクトルの測定結果の一例を示す。自由噴流場にエッジを入れると卓越周波数が大きく生じることをしめしている。エッジの無い場合の自由噴流場の圧力変化は、このような鮮明な卓越周波数は無く、ゆるやかなピークを持つ。渦列を形

Fig. 6 Powerspectrum of pressure in flow field
成しても周期が変動する非常に不安定な流れ場であることが推察できる。

4. まとめ

完全流体の二次元平行噴流の仮定の基に、非定常な噴流の流れ場のモデル(線形モデル)を導いた。可視化実験の結果と比較すると、噴流の両端の剪断層が平行で長くつづくときは、2列の互い違いの渦列ができ、波動モデルと定性的に同じものとなる。噴流の中心軸の流脈線の対時応動も定性的に似たフローパターンを示す。

5. 参考文献

- 1). Schlichting, Boundary Layer Theory, McGraw-Hill
- 2). 日野, 流体力学, p. 335, 朝倉書店

以下省略