C241 長方形噴流に発生する対称形渦列について

愛工大 大島貴充

On the Symmetrical Vortex Street Generated by the Rectangular Jet

Takamitsu Ohshima

The purpose of this paper is to describe a mathematical model of the unsteady flow field induced by a two-dimensional rectangular free jet into a stationary fluid. On the assumption that flow field is two-dimensional flow of an ideal fluid and velocity distribution of the jet is parallel flow in x-direction, we represented the flow field using the linear approximation formula of Euler's kinetic equation and continuity equation, as an object of application of stability theorem to the flow field. We obtained the linear approximation wave solution as real-valued solution of these equation. These mathematical model show a symmetrical vortex street and symmetrical vortex street. We present several numerical simulation of characteristics term of the flow field in the symmetrical vortex street model.

1. 緒言

二次元長方形噴流に、互い違い形渦列^{1), 2)}、対称形渦列^{3), 4)}が発生することが報告されている。これらの渦列は噴流速度の減少に伴ってすぐに崩壊する^{1), 3)}ので、後流に発生するカルマン渦列のようによく知られていない。互い違い形渦列、対称形渦列の発生条件も噴出口でのレイノルズ数による³⁾とも言われているが、上流側、下流側の流れ場の影響が大きい³⁾とも言われており定かでない。前報^{5), 6)}において、 $u = u_0 \operatorname{sech}^2(ky)$ (u_0 : 欠損速度の最大値, k : y 方向への広がりを表すパラメータ) の欠損速度分布 (平均値) をもつ後流に発生する渦列の数学モデル (波動モデル) を求め、カルマンの渦列モデルと定性的に一致することを示した。二次元長方形噴流の場合も u_0 を噴流軸上の噴流速度の最大値とすれば、後流の速度分布と近似的に同じものである。したがって、噴流に発生する渦列の数学モデル (波動モデル) が、後流の場合と同一手法で導出できる。噴流に発生する、互い違い形渦列モデルについてはすでに報告⁷⁾した。本報では噴流に発生する、対称形渦列モデルについて報告する。

2. 波動モデルの導出

二次元長方形噴流がつくる非定常な流れ場に次の仮定をおく。1). 流れ場は二次元である。2). 流れ場は主流 (定常流) と攪乱の和で表すことができ、主流は流れの方向 (x 方向) の速度 u が流れの方向と直角な方向 (y 方向) に変化する平行流とする。3). 攪乱 (速度変動) の大きさは主流に比べて1位の微小量とする。4). 流体は完全流体とする。この仮定は必ずしも必要ではないが、後流の波動モデル導出の過程で、カルマンの渦列モデルと対比させるために取り入れた。本報でもこの仮定をおく。

基礎方程式はオイラーの運動方程式と連続の式で、デカルト座標系で (1) ~ (3) 式のようなである。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1) \quad \text{ここで,}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2) \quad \begin{array}{l} u, v : \text{それぞれ速度の } x, y \text{ 方向成分} \\ p : \text{運動学的圧力 (圧力/密度)} \end{array}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial y} \quad (3) \quad t : \text{時間}$$

流れ場は主流 (定常流) と攪乱の和で表すことができるから、それぞれの速度成分は (4) 式となる (平行流の仮定より v の定常成分はない)。ここで、 $u(y)$: 定常な噴流で y のみの関数、 p_0 : 定常な噴流 (主流) の圧力。また、記号 $-$ で平均値、 $\sim$ で平均値まわりに変動する攪乱を表す。

(4) 式を (1) ~ (3) 式に代入し、2位以下の微小項を無視すれば、攪乱を記述する線形化された (5) ~ (7) 式の3個

の方程式をうる。なお、 $u(x, y, t)$ などにおける (x, y, t) などの変数の記述は省略してある。この (5)~(7) の方程式群は、実係数の線形微分方程式である。

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, t) &= \bar{u}(y) + \tilde{u}(x, y, t) \\ v(x, y, t) &= \tilde{v}(x, y, t) \\ p(x, y, t) &= p_0 + \tilde{p}(x, y, t) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

この線形微分方程式の実数解を求めるために、複素数解 $\hat{u}, \hat{v}, \hat{p}$ を (8) 式のような波動擾乱の形におく。ここに、 i : 虚数単位、 U, V, P : y のみの複素関数、 α : 波数 (実数)、 c : 波動速度 (複素数)、 $c = c_r + i c_i$ と書け、 c_i の正負はそれぞれ時間経過による擾乱の増幅、減衰に対応する。また、記号 $\sim$ は複素数解をあらわす。(8) 式を (5)~(7) 式に代入すると U, V, P を支配する (9)~(11) 式の方程式群がえられる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{u} &= U(y) \times e^{i\alpha(x-ct)} \\ \hat{v} &= V(y) \times e^{i\alpha(x-ct)} \\ \hat{p} &= P(y) \times e^{i\alpha(x-ct)} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$i\alpha U + \frac{dV}{dy} = 0 \quad (9)$$

$$i\alpha(\bar{u}-c)U + V \frac{d\bar{u}}{dy} + i\alpha P = 0 \quad (10)$$

$$i\alpha(\bar{u}-c)V + \frac{dP}{dy} = 0 \quad (11)$$

この (9)~(11) 式より U, P を消去すると V に関する (12) 式をうる。この式は Rayleigh の式としてよく知られているもので、 $\bar{u}(y)$ なる速度分布をもつ、非粘性流体の平行流の安定性を支配する基礎方程式である。適切な境界条件のもとで、任意の α の値に関して解け、 α と c および V の関係を与える。擾乱を支配する方程式は、実係数微分方程式であるから、仮定した (4) 式の複素数解の複素共役もまた解である。したがって擾乱の実数解が求まる。実際の噴流の速度分布は、下流にいくにしたがって y 方向へ広がり、速度分布の形状が変化し x 方向へ平行な流れで

$$\frac{d^2 V}{dy^2} = \left[\frac{1}{\bar{u}-c} \times \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} + \alpha^2 \right] V \quad (12)$$

はない。長方形の噴出口直後の速度分布は、 y 方向へほぼ一様の速度をもつ方形に近い速度分布 (上流のノズルの長さの影響をうける) であるが、下流にいくにしたがって、図 1 に示すような速度分布へ移行する。 y 方向への広がりが比較的小さければ平行流として取り扱える。非定常流であっても平均の速度分布が図 1 のようであればよい。この速度分布にたいしてはよく知られている理論式⁹⁾があるが、近似的に (13) 式⁹⁾ におかれる。ここで、 u_c : 噴流の中心軸上の速度 (最大速度)、 k : 噴流の y 方向への広がりを表すパラメータ。図 1 に示すような、噴流の中心軸上の速度 u_c と半値幅 L をもちいて無次元かすると、定常な噴流速度分布の式と Rayleigh の式は (14)、(15) 式のようになる。

$$\bar{u}(y) = u_c \operatorname{sech}^2(ky) \quad (13)$$

$$\bar{u}_n(y_n) = \operatorname{sech}^2(k_n y_n) \quad (14)$$

Fig.1 Velocity distribution in a two-dimensional, turbulent jet. Measurement due to Foerthman.

$$\frac{d^2 V_n}{dy^2} = \left[\frac{1}{\bar{u}_n - c_n} \times \frac{d^2 \bar{u}_n}{dy^2} + \alpha_n^2 \right] V \quad (15)$$

ここで、 $\bar{u}_n(y_n) = \bar{u}(y)/u_c$, $y_n = y/L$, $k_n = kL = \cosh^{-1} \sqrt{2}$

(14) 式を (15) 式に代入すると (16) 式をうる。

$$\frac{d^2 V_n}{dy_n^2} = \left[\frac{6k_n^2 \operatorname{sech}^2(k_n y_n) \{ (2/3) - \operatorname{sech}^2(k_n y_n) \}}{\operatorname{sech}^2(k_n y_n) - c_n} + \alpha_n \right] V_n \quad (16)$$

ここで、 $V_n = V(y_n) = V(y)/u_c$, $c_n = c/u_c$, $\alpha_n = \alpha L$

(16) 式の解は (17) 式のように求まる。ここで、 $A_n = A/u_c$, A : 擾乱速度の振幅。この解は、波動速度の虚数部 $c_{i,n} = 0$, すなわち擾乱が増幅も減衰もしない偶関数、奇関数の中立擾乱の解である。 c_r は実数部のみであるので、実数部 $c_{r,n}$ を以後 c_n とする。なお (16) 式から α_n のある範囲にわたって $c_i > 0$ なる擾乱の増幅解が、 α_n の

値に対応してそれぞれ数値的にえられることが知られているが、本報では振幅不変の中立擾乱の解のみを対象とする。

$$\left. \begin{aligned} V_n(y_n) &= A_n \operatorname{sech}^2(k_n y_n), & \text{ただし, } \alpha_n &= 2k_n, \quad c_n = (2/3)u_c. & (17-1) \\ V_n(y_n) &= A_n \sinh(k_n y_n) \operatorname{sech}^2(k_n y_n), & \text{ただし, } \alpha_n &= k_n, \quad c_n = (2/3)u_c. & (17-2) \end{aligned} \right\} (17)$$

(17-1) 式は y_n について偶関数、(17-2) 式は y_n について奇関数である。これら (17) 式を (9)~(11) 式へ代入すると U, P がえられる。この U, V, P を (8) 式へ代入すると、複素数解 $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p}$ が求まる。その共役複素数も解であるから、実数解 $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p}$ が求まる。擾乱の実数解 $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p}$ を (4) 式へ代入すると、流れ場の数式モデル（波動モデル）をうる。ただし、 $p_{0n} = p_0/u_c^2$ 。

$V_n(y_n)$ が (17-1) 式の偶関数解の場合の結果を次に示す。

$$\left. \begin{aligned} u_n &= \bar{u}_n + \tilde{u}_n = \operatorname{sech}^2(k_n y_n) + A_n \sinh(k_n y_n) \operatorname{sech}^3(k_n y_n) \sin\{\alpha_n(x_n - c_n t_n)\} \\ v_n &= \bar{v}_n + \tilde{v}_n = A_n \operatorname{sech}^2(k_n y_n) \cos\{\alpha_n(x_n - c_n t_n)\} \\ p_n &= p_{0n} + A_n c \sinh(k_n y_n) \operatorname{sech}^3(k_n y_n) \sin\{\alpha_n(x_n - c_n t_n)\} \end{aligned} \right\} (18-1)$$

$V_n(y_n)$ が (17-2) 式の奇関数解の場合の結果を次に示す。

$$\left. \begin{aligned} u_n &= \bar{u}_n + \tilde{u}_n = \operatorname{sech}^2(k_n y_n) + A_n \{\sinh^2(k_n y_n) - 1\} \operatorname{sech}^3(k_n y_n) \sin\{\alpha_n(x_n - c_n t_n)\} \\ v_n &= \bar{v}_n + \tilde{v}_n = A_n \sinh(k_n y_n) \operatorname{sech}^2(k_n y_n) \cos\{\alpha_n(x_n - c_n t_n)\} \\ p_n &= p_{0n} + A_n c \{\sinh^2(k_n y_n) - 1\} \operatorname{sech}^3(k_n y_n) \sin\{\alpha_n(x_n - c_n t_n)\} \end{aligned} \right\} (18-2)$$

偶関数解の場合が互い違い形渦列を表し、奇関数解の場合が対称形渦列を表す。

3. 波動モデルの検証

波動モデルの検証を、渦列が明確に観察される円柱の後流でおこなう。図2に、絶対座標系でみた流線を、図3に、波動速度 c で移動する座標系からみた流線を示す。波動モデルによる計算結果と可視化実験の結果（R. Will による、永田、他による）が、定性的にほぼ一致していることがわかる。図4に、流脈線の波動モデルによる計算結果と、種子田による可視化実験の結果を示す、流線と同様に定性的に一致している。図を示さないが等温度線も計算結果と可視化実験の結果は、定性的に一致している。波動モデルによる計算結果と、カルマン渦列による計算結果もやはり定性的にほぼ一致している。以上のことから、波動モデルは非定常な後流を表す近似モデルとして妥当なものである。

(a) Result of calculation

(b) Result of experiment

Fig.2 Stream lines for an absolute co-ordinate system

(a) Result of calculation

(b) Result of experiment

Fig.3 Stream lines for a locomotive co-ordinate system with c

(a) Result of calculation

(b) Result of experiment

Fig.4 Examl of streaks line

4. 流れ場のシュミレーション (対称形渦列)

噴流の速度分布と後流の速度分布を (13) 式で統一的に表すため、パラメータ k を導入した。噴流の速度分布は後流の速度分布に比べて y 方向への広がり大きい。したがって、噴流の渦列は後流の渦列より早く崩壊することが、波動モデルよりわかる (速度分布が x 方向に平行)。したがって噴流の渦列はあまり観察されていないが、波動モデルによれば短いけれど渦列は存在する。図5に、短い対称形渦列を示す。図6に、波動モデルより求めた、波動速度 c で移動する座標系よりみた流線を示す。攪乱の振幅が小さいときは、同一 x 軸上に鞍点が2個存在するが、振幅が大きくなると鞍点は1個になり、流れ場のフローパターンがことなる。

Fig.5 Exmpl of symmetrical vortex street model

Fig.6 Stream lines of symmetrical vortex street model for a locomotive co-ordinate system with c

5. まとめ

内部波モデルから、短いけれど渦列は存在することがわかる。内部波モデルの奇関数解モデルが対称形渦列を表す。対称形渦列から互い違い形渦列へ移行するまえに渦列は崩壊するので、実験条件により対称形渦列がでたり互い違い形渦列がでたりするようにみえるのではないかと考えられる。対称形渦列の流線 (波動速度で移動する座標系) を、攪乱の大きさを変えて求めた。攪乱の大きさによって、流れ場のフローパターンが大きく二分される。

6. 文献

- 1). 大島, 第25回可視化情報シンポジウム講演論文集, (1997)
- 2). L. E. FRAENKEL, J. of Fluid Mech. Vol.149, (1984), 355
- 3). 服部, 池田, 浅野, 機論, 52巻, 473号, (昭61-1), 305
- 4). D. O. ROCKWELL, W. O. NICCOLLS, Trans. ASME, J. of Basic Engineering, DECEMBER, (1972), 720
- 5). 大島, 第24回可視化情報シンポジウム講演論文集, (1996), 153
- 6). 以下 省略