三次元流中の平面内の流量関数と流線*

大槻 茂雄**, 田中 元直***

Flow Function for Streamlines Representative of the Flow
on a Plane in Three-Dimensional Flow

Shigeo OHTSUKI and Motonao TANAKA

ABSTRACT

Two-dimensional display of streamlines is considered to be suitable for the quantitative evaluation of the characteristics of the flow. In this investigation, a new concept of the flow function is proposed in order to obtain streamlines on an arbitrary section of three-dimensional flow for visualizing and evaluating the characteristics of the flow. The streamlines separated by an arbitrary unit flow can be fixed with the approximated point sources of the unit flow. These point sources are named simple sources.

Key words: Flow function, Laminar function, Streamline, Simple source, Three-dimensional flow

1. はじめに

流れの性状を直観的に定量評価するには流れを二次元面上の流線分布で表現し、可視化する方法が最適であると考えられる。しかし、三次元流れの中に任意に設定した二次元観測面上で三次元流の特徴を流線分布として表示して流れの性状を表現する方法は確立されていない。

そこで、これを実現するために新しく層状関数 (laminar function) を定義し、これを用いた流量関数 (flow function) の概念を導入した。さらに、この関数の等流量線で流線を表現できるための条件を明らかにした。

2. 流れの平面内情報を表現する流量関数

2.1 流量関数の定義

三次元流の流速ベクトル場に平面を設定し、カーテシアン座標系を x 軸と y 軸がこの面内になるように定める。このとき流速ベクトルを $\vec{V}(x,y,z,t)$ で表示し、時刻 $t=t_0$ における平面 ($z=0$) 内のベクトル $\vec{V}(x,y,0,t_0)$ の面内成分を $\vec{U}(x,y)$ とする。

ここで、設定した平面内で、流速ベクトルの面成分 $\vec{U}(x,y)$ が与えられている場合の流量を次のように定義する。

流量をベクトルの内積で表現できるように、面内でベクトルを 90° 回転させるオペレータを R_{90} とし、流速ベ

クトル面成分 $\vec{U}(x,y)$ を 90° 回転したベクトル $\vec{G}(x,y)$ を流量勾配ベクトルと考える。この流量勾配ベクトル $\vec{G}(x,y)$ は次のように表せる。

$$\vec{G}(x,y) = R_{90}\vec{U}(x,y) \quad (1)$$

その結果、図1の点 P_r と点 P の間の曲線 c を横切る流量 Q は、 $x-y$ 面内の線積分として次のように求められる。

$$Q = \int_c \vec{G} \cdot d\vec{l} \quad (2)$$

ここで、Fig.1の基準点 P_r に関する流量関数 (flow function) $Q(x,y)$ を基準点 P_r と任意の点 $P(x,y)$ とを結ぶ任意の経路 c についての流量として定義する。

すなわち、

$$Q(x,y) = \int_{P_r}^P \vec{G} \cdot d\vec{l} \quad (3)$$

Fig.1 Flow Q across the path c between two points P_r and $P(x,y)$ is defined by the equation (2) where $\vec{G}$ is the vector rotated a flow vector $\vec{U}$ by 90° (Operator: R_{90}).

* 原稿受付 1997年3月13日

** 正会員 東京工業大学

*** 正会員 東北厚生年金病院

Fig. 2 Flow at the point $P(x, y)$ referred to a point P_r depends on the path c through the distributed source s .

ところで、一般の三次元流を平面内で観測すると、この平面では湧き出し (source) や吸い込み (sink, 負の湧き出し) が平面内に分布していると考えられる。そこで、Fig. 2 のように平面内の経路 c に円形の部分があり、その円を含む領域では一様な湧き出し s があると考えられる。このとき、この経路 c に沿った流量が点 $P(x, y)$ の流量関数 $Q(x, y)$ の値となる。ここで、湧き出し領域内の円形の経路の大きさを少しずつ連続して変えていくと流量関数 $Q(x, y)$ の値も連続して変化する。また、円形経路のまわる回数や方向を変えると関数の値はすべての実数値をとる。このように、一般に、流量関数 $Q(x, y)$ は連続無限 (実数の濃度) である実数値をとる無限多価関数である。

次に、式(3)を微分形式で表すと次のようになる。

$$\nabla Q(x, y) = \vec{G}(x, y) \quad (4)$$

ここで、

$$\nabla Q(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial Q}{\partial y} \vec{j} \quad (5)$$

および、

$$\vec{G}(x, y) = R_{90} \vec{U}(x, y) = R_{90}(u\vec{i} + v\vec{j}) = -v\vec{i} + u\vec{j} \quad (6)$$

であるから、次の関係があることが分かる。

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -v, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = u \quad (7)$$

すなわち、流量関数 $Q(x, y)$ は偏微分可能な関数である。

そこで、実数値をとる無限多価関数で偏微分可能な関数を層状関数 (laminar function) と名づけると、一般に、流量関数 $Q(x, y)$ は層状関数である。

ところで、式(7)の関係は二次元流の流れ関数 (stream function) の定義と同じであるから、流量関数 (flow function) は流れ関数を流量の視点から拡張したものとみなせる。しかし、「流量」という考え方を重視すると「流量関数」と呼ぶのが適切であると考えられる。

2.2 平面内の流線

二次元面内の流速成分 $U(x, y)$ の面内の分布の特徴は流線で表現すると把握しやすくなる。そこで、三次元空間での流速場における流線と同様に、観測面内の流線を次のように定義する。Fig. 3 に示すように曲線の接線の方向が面内の流速ベクトル成分 $\vec{U}(x, y)$ の方向と一致しているとき、この曲線を面内流線と名づける。混乱のないときには単に「流線」と呼ぶことにする。

Fig. 3 Streamlines on a plane are defined as the curves the direction of which at the point (x, y) is the direction of the vector component $\vec{U}(x, y)$ of the flow vector $\vec{V}(x, y, z)$ on the plane.

2.3 平面内の経路と流線

ここでは、流量関数が等流量となる経路はすべての流線を包含することを示す。

ある領域で流量が変化しない経路では、この領域内で式(3)について次の関係が成り立つ。

$$\vec{G} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (8)$$

$d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$ とすると、式(6)の関係から上式は次のようになる。

$$-vdx + udy = 0 \quad (9)$$

すなわち、 $u \neq 0$ または $v \neq 0$ であれば

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \quad (10)$$

または、

$$\frac{dx}{dy} = \frac{u}{v} \quad (11)$$

となる。これは流速ベクトル $\vec{U}(x, y)$ の大きさがゼロでなければ、流速ベクトルの向きと経路の接線の向きとが一致していることを示している。

また、流線を経路に選べば式(8)が常に成り立つので流量は変化しない。したがって、等流量となる経路の集合は流線の集合を包含している。

以上を考慮すると、流量関数は Fig. 4 のように模式化できる。この関数は層状関数なので、点線で示されるような層状構造の各層は同じ形状であり、密着している。この層の $x-Q$ 面の曲線は x 軸を経路とする流量の変化を表しており、 $y-Q$ 面の曲線は y 軸を経路とする流量を表しており、 $x-y$ 面の曲線は流線を表している。これらの曲線は密に存在するので見分けることができない。

2.4 流体の連続の式

次に、流体の連続の式を求める。式(7)の関係から、

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} \quad (12)$$

ここで、湧き出しがある場合は

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} \quad (13)$$

となる。この関係について考える。

Fig. 5 のように流量 Q の x と y についての二階の偏微分は線形の部分に非線型の量を加えて次のように表示される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} &\approx \frac{\partial}{\partial x} (u(x, y+\Delta y) - u(x, y)) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q(x, y+\Delta y) - Q(x, y)}{\Delta y} \right) \\ &\approx \frac{1}{\Delta x \Delta y} (Q^+(x+\Delta x, y+\Delta y) \\ &\quad - Q(x+\Delta x, y) - Q(x, y+\Delta y) + Q(x, y)) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} &\approx \frac{1}{\Delta x \Delta y} (Q^-(x+\Delta x, y+\Delta y) \\ &\quad - Q(x+\Delta x, y) - Q(x, y+\Delta y) + Q(x, y)) \end{aligned} \quad (15)$$

したがって、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \left(\frac{1}{\Delta x \Delta y} (Q^+(x+\Delta x, y+\Delta y) \right. \\ &\quad \left. - Q^-(x+\Delta x, y+\Delta y)) \right) \end{aligned} \quad (16)$$

となる。

ここで、単位面積当たりの湧き出しを $s(x, y)$ とし、点 (x, y) から点 $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ への直線の経路での点 $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ の流量を $Q(x+\Delta x, y+\Delta y)$ とすると、流量 $Q^+(x+\Delta x, y+\Delta y)$ と $Q^-(x+\Delta x, y+\Delta y)$ には経路で囲まれた面積に比例する非線型な項が加わることになる。すなわち、

Fig. 4 Laminar function is a multi-valued function and its partial derivatives can be fixed. The name of the function is from strata. Flow function is a laminar function. The x - y section of the general flow function consists of infinite streamlines.

$$\begin{aligned} Q^+(x+\Delta x, y+\Delta y) &= Q(x+\Delta x, y+\Delta y) \\ &\quad + s(x, y) \frac{\Delta x \Delta y}{2} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} Q^-(x+\Delta x, y+\Delta y) &= Q(x+\Delta x, y+\Delta y) \\ &\quad - s(x, y) \frac{\Delta x \Delta y}{2} \end{aligned} \quad (18)$$

である。したがって、式(16)は

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} = s(x, y) \quad (19)$$

となるので、式(12)と式(19)から、連続の式は

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = s(x, y) \quad (20)$$

となる。

Fig. 5 Second-order partial derivatives $\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}$ and $\frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x}$ of flow function $Q(x, y)$ are different generally.

(a) The flow Q^+ along the path $ABD : (\Delta x \rightarrow \Delta y)$ is larger than the flow Q along the path AD by $s(x, y) \frac{\Delta x \Delta y}{2}$ in linear approximation where $s(x, y)$ is the increment of flow per unit area at the point $A(x, y)$. This leads the derivative $\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}$.

(b) The flow Q^- along the path $ACD : (\Delta y \rightarrow \Delta x)$ is less than the flow Q along the path AD by $s(x, y) \frac{\Delta x \Delta y}{2}$. This leads the derivative $\frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x}$. The relations in (a) and (b) lead the equation (19).

3. 流線源と流量関数

平面内の流線の向きで流れの向きを、流線の間隔で流れの大きさを示すことにより、流れを定量的に表現できる。このような流線を流量関数の等流量線で表示できると流量関数の有用性が高くなる。ここでは流量関数を用いて定量的な流線を描ける条件について検討する。

3.1 湧き出しの集中定数化(点源)による近似

湧き出しのある流れの場合、湧き出しを集中定数化した点源 (point source) として近似すると、流速ベクトルが定まっている場においては、有限の領域内で有限の大きさの点源が有限個存在することになる。したがって、有限長の経路で流量関数の値が定められているとすると値の個数は可算無限個になる。さらに、流量関数の値が任意に設定した単位流量 (unit flow) q_u ごとの離散値になるためには、大きさが単位流量 q_u で正負になる強さの点源で湧き出しを近似表現すればよい。この点源

Fig. 6 (a) Streamlines start from a streamline source and (b) the flow function in the vicinity of the streamline source is illustrated by a spiral slope.

Fig. 7 (a) Streamlines end at a streamline sink and (b) the flow function in the vicinity of the streamline sink is illustrated by a spiral slope.

は、符号が正の場合は流線の始点となるので「流線始点 (streamline (positive) source)」, 負の場合は流線の終点となるので「流線終点 (streamline sink (negative source))」と名づけ、これらを総称するときは「流線源 (simple source)」と名づける。

3.2 流線源付近の流量関数の模式図

流線源では、単位流量が発生したり、消滅したりする。ここでは、流線源付近の流量関数を模式図で表示する。

流線始点は湧き出しで、Fig. 6 (a)のように面内流線の始点である。これをFig. 6 (b)のように、流量関数の値である流量を高さとすると、流量関数は左回りで登り坂となる螺旋スロープで表現できる。このとき、流量は点源を一周すると単位流量だけ増加する。Fig. 6 (b)の等流量線は流線に対応している。

流線終点は吸い込みで、Fig. 7 (a)のように面内流線の終点である。流量関数はFig. 7 (b)のように左回りで降り坂となる螺旋スロープで表現できる。点源を一周するときの流量変化は流線始点の場合と同じように単位流量である。

3.3 流線源と一本の流線との対応づけ

流量関数は、流線源を一周する経路では単位流量だけ関数値が変化する。しかし、流線源を含まない領域内を一周しても流量は変化しない。すなわち、流量関数は流線源のみが単位流量の差を与える階層構造 (floor structure) となっている。この階層構造の例を模式図としてFig. 8に示す。 $x-Q$ 面と $y-Q$ 面の実線は流量を表しており、これらは階層構造で、流線源の位置で流量に単位流量だけの差を生じ、その他の位置では階の差は単位流量となる。また、等流量面に現れる等流量線は流線で

Fig. 8 The flow function in the field of flow with simple sources has a floor structure as shown here. Each floor is separated by unit flow. The simple source connects the floors. The curves on the top surface indicate the streamlines. Dotted $x-y$ sections separated by the unit flow have the same streamlines as the top surface has.

ある。ここで、等流量面を Fig.8 の点線で示す単位流量間隔ごとに設定すると、各面の流線はすべて一致する。

一般に、湧き出しや吸い込みを流線源で表現した流れの場合では、単位流量だけ異なった等流量線で示される各階層の流線は一致する。これは、ある階層で流線上の点 (x,y) では他の階層でも流量が単位流量の整数倍となるだけなので流線上の点となり、ある階層で流線上にない点 (x,y) では、他の階層でも流線上の点とならないことからわかる。

以上から、単位流量間隔の各等流量面での流線を $x-y$ 面へ投影すると、各面の流線は一致する。したがって、一つの等流量面の流線で代表させることができ、流線源は一つの流線の始点か終点になる。

4. むすび

三次元流の性状を可視化し、定量的に評価するために、三次元流中に任意に設定した二次元面上の流速成分分布をもとに定量性のある面内流線を描くことを提案し、その条件を検討した。

まず、新しく層状関数を定義し、この関数をもとに導出した流量関数で三次元流中の平面内の流れを表現できることを示した。さらに、湧き出しや吸い込みを任意に設定した単位流量で集中定数化した流線源で近似することにより、単位流量間隔の流線を流量関数の等流量線として表示できることを示した。なお、流線源の系統的な設定法の開発は今後の課題である。