211 電気インピーダンス法による導電率分布の可視化

間瀬 周介[○], 早野 誠治, 齋藤 兆古(法政大学)
堀井 清之(白百合女子大学)

Visualization of Conductivity Distribution by Electrical Impedance Tomography

Shusuke MABUCHI, Seiji HAYANO, Yoshifuru SAITO and Kiyoshi HORII

Abstract

Electrical impedance tomography (EIT) is one of the cheapest ways in order to get a tomography. Principal purpose of the EIT is to obtain a conductivity distribution of a two-dimensional cross-sectional target area by injecting the current. EIT utilizes a functional relationship between the injection current and surface potential distribution depending on the conductivity difference. This functional relationship of EIT reveals that EIT has versatile possibilities but it is essentially reduced into solving for an ill-posed inverse problem. In order to develop the EIT, we try to apply the generalized vector sampled pattern matching (GVSPM) method to the inverse problem accompanying with EIT. As an initial test experiment of EIT development, we try to evaluate a resistance distribution in a planer circuit by measuring entire nodal voltages while changing the electrodes for current injection. As a result, it is revealed that a fairly good result could be obtained as an initial test example.

Keywords : Generalized vector sampled pattern matching (GVSPM) method, Electrical impedance tomography

1. はじめに

2次元平面状に存在する物体の投影図を全周辺に亘って得られれば、2次元平面状に存在する物体の形状が再現可能である。これが、いわゆるトモグラフィーの基本的な考え方であり、オーストリアの数学者ラドンによって最初に数学的証明がなされ、ラドン変換と呼ばれた。その後、ラドン変換だけでなく、フーリエ変換法や重み付逆投影法などが開発され、初期は X-線 CT(Computed Tomography)、その後、核磁気共鳴を利用した MRI (Magnetic Resonance Imaging)が開発され、より精緻なトモグラフィーが主として医学分野に広範に用いられている。X-線 CTは、対象に X線を照射した場合の X線吸収率を投影図の代わりに用いる。また、MRIは投影図の代わりに、強静磁界下における、電子の歳差運動に共振するマイクロ波の吸収率を利用する。何れも X線やマイクロ波の吸収率を直接利用するため、数学的根拠も明確である。このため、比較的早く開発され、実用に用いられている¹⁾。

他方、電気インピーダンス法 (EIT) は、X線やマイクロ波の代わりに電流を対象に注入し、その結果として得られる対象の周辺電圧を測定し、対象の導電率分布をトモグラフィーとして得ようとする。X線やマイクロ波は直進性も持ったため、対象の情報が単純な数学的關係で表現可能である。しかし、EITでは、注入電流に対する応答は周辺電圧として得られるため、電磁界の支配方程式の一種であるラプラス方程式の解として得られる。このため、入力とその応答が境界条件と媒質パラメータで

決まる関数型トモグラフィーとなる。EIT装置自身は比較的簡単で安価に構成可能な反面、注入電流毎に逐次、ラプラス方程式の解を求め、その結果から、導電率分布のトモグラフィーを生成する必要がある。問題は、電磁界の支配方程式であるラプラス方程式で媒質を未知として解く必要性が有り、いわゆる媒質推定に関する逆問題を逐次解く事に帰する点にある²⁾。

本報告では、このような EITの現状に鑑み、EIT開発の第1ステップとして、注入電流に対する応答として得られる節点電圧が与えられた場合、平面回路の抵抗分布がどの程度再現可能かを検討し、その結果、EIT実現に関する初期的知見が得られたので此处に報告する。

本報告は、4章で構成され、第1章はまえがきである。第2章は、EIT問題で遭遇する不適切な線形システムの解法である一般化ベクトルサンプルドマッチング (Generalized Vector Sampled Pattern Matching GVSPM)法について述べる。第3章は、EITを集中定数型モデルで置き換えたシミュレーションと検証実験である。第4章はまとめである。

2. 一般化ベクトル型 SPM (GVSPM) 法

2.1 不適切な線形システム方程式とその正規化

(1)式の線形システム方程式を考える。

$$\mathbf{Y} = \mathbf{CX} \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{Y}$, $\mathbf{X}$, $\mathbf{C}$ はそれぞれ n 次の入力ベクトル, m 次出力ベクトル, n 行 m 列の長方形行列である。(1)式は次のように書き直すことができる。

$$\begin{aligned}\mathbf{Y} &= \sum_{i=1}^m x_i \mathbf{C}_i \\ \mathbf{X} &= [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_m]^T \\ \mathbf{C} &= [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2 \quad \dots \quad \mathbf{C}_m]\end{aligned}\quad (2)$$

(2)式を入力ベクトル $\mathbf{Y}$ のノルムで正規化し, (3)式の関係が得られる。

$$\frac{\mathbf{Y}}{|\mathbf{Y}|} = \sum_{i=1}^m x_i \frac{|\mathbf{C}_i|}{|\mathbf{Y}|} \frac{\mathbf{C}_i}{|\mathbf{C}_i|} \text{ or } \mathbf{Y}' = \mathbf{C}' \mathbf{X}' \quad (3)$$

(3)式でダッシュ(′)は正規化された量を表している。(3)式は正規化された入力ベクトル $\mathbf{Y}'$ が重み解 $x_i |\mathbf{C}_i|/|\mathbf{Y}|$ と正規化された列ベクトル $\mathbf{C}_i/|\mathbf{C}_i|$ の線形結合として得られることを意味している。ここで $\mathbf{Y}'$ と $\mathbf{C}' \mathbf{X}'$ の内積が 1 になるとき解 $\mathbf{X}$ が得られるということに注意しなければならない。これが GVSPM 法の基本的な着想である。

2.2 目標関数

k 回目の反復解 $\mathbf{X}^{(k)}$ で与えられる $\mathbf{C} \mathbf{X}^{(k)}$ と入力ベクトル $\mathbf{Y}$ 間の角度を目標関数 $f(\mathbf{X}^{(k)})$ として(4)式で定義する。

$$f(\mathbf{X}^{(k)}) = \frac{\mathbf{Y}}{|\mathbf{Y}|} \cdot \frac{\mathbf{C} \mathbf{X}^{(k)}}{|\mathbf{C} \mathbf{X}^{(k)}|} = \mathbf{Y}' \cdot \frac{\mathbf{C}' \mathbf{X}'^{(k)}}{|\mathbf{C}' \mathbf{X}'^{(k)}|} \quad (4)$$

(4)式で, 目標関数 $f(\mathbf{X}^{(k)})$ が 1 に収束する時, (1)式の解 $\mathbf{X}$ が求まることを意味する。

$$f(\mathbf{X}^{(k)}) \rightarrow 1 \quad (5)$$

(5)式が GVSPM 法の目標関数である。

2.3 反復解法

反復解の初期値を $\mathbf{X}^{(0)}$ として(6)式で与える。

$$\mathbf{X}^{(0)} = \mathbf{C}'^T \mathbf{Y}' \quad (6)$$

(6)式から, 最初の偏差ベクトル $\Delta \mathbf{Y}^{(1)}$ が(7)式で与えられる。

$$\Delta \mathbf{Y}^{(1)} = \mathbf{Y}' - \frac{\mathbf{C}' \mathbf{X}^{(0)}}{|\mathbf{C}' \mathbf{X}^{(0)}|} \quad (7)$$

(7)式で, 偏差 $\Delta \mathbf{Y}'$ がゼロベクトルであれば, (5)式の目標関数は自動的に満足される。(7)式を一般化し, 第 k 回目の反復解ベクトル $\mathbf{X}^{(k)}$ は, 第 $k-1$ 回目の偏差ベクトル $\Delta \mathbf{Y}^{(k-1)}$ を用いて(8)式で与えられる。

$$\begin{aligned}\mathbf{X}^{(k)} &= \mathbf{X}^{(k-1)} + \mathbf{C}'^T \Delta \mathbf{Y}^{(k-1)} \\ &= \mathbf{C}'^T \mathbf{Y}' + \left(I_m - \frac{\mathbf{C}'^T \mathbf{C}'}{|\mathbf{C}' \mathbf{X}^{(k-1)}|} \right) \mathbf{X}^{(k-1)}\end{aligned}\quad (8)$$

ここで, I_m は m 行 m 列の単位行列である。

2.4 収束条件

線形システム方程式の反復解法の収束条件は, (8)式の状態遷移行列において, すべての固有値が 1 未満でなければならない。(8)式の状態遷移行列 S は(9)式で与えられる。

$$S = I_m - \frac{\mathbf{C}'^T \mathbf{C}'}{\mathbf{C}' \mathbf{X}^{(k-1)}} = I_m - \frac{\mathbf{C}'^T \mathbf{C}'}{\mathbf{Y}^{(k-1)}} \quad (9)$$

(9)式の入力ベクトル $\mathbf{Y}^{(k-1)}$ のノルムは 1 であるから, (9)式は次のように書き直すことができる。

$$S = I_m - \mathbf{C}'^T \mathbf{C}' \quad (10)$$

ここで λ を(10)式の状態遷移行列 S の固有値とすれば, $\mathbf{C}'^T \mathbf{C}'$ の対角線要素が全て 1 である事に注意して, 固有値 λ は(11)の行列式で与えられる。

$$|\lambda I_m - S| = \begin{vmatrix} \lambda & \varepsilon_{12} & \dots & \varepsilon_{1m} \\ \varepsilon_{12} & \lambda & \dots & \varepsilon_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{1m} & \varepsilon_{2m} & \dots & \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (11)$$

(11)式で, 行列 $\mathbf{C}'$ は正規化された列ベクトル $\mathbf{C}_i/|\mathbf{C}_i|$ からなるため, 非対角要素の係数は 1 未満の値をとることは明らかである。すなわち,

$$|\varepsilon_{ij}| < 1, \quad i=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,m \quad (12)$$

となる。(12)式から, 収束条件 $|\lambda| < 1$ が満たされることが判る。拠って, GVSPM 法は常に安定した反復解を与えることが証明された³⁾。

3. EIT の集中定数型モデル

ここでは, 実際の EIT を集中定数型電気抵抗回路モデルに置き換えて, 原理検証を行う。

3.1 線形システム方程式

簡単化のため, Fig.1 に示す抵抗回路を考える。

Fig. 1 Electrical Circuit with 5 Nodes, 8 Resistances

Fig.1 の回路で, $v_1, v_2, \dots, v_5$, $g_1, g_2, \dots, g_8$ はそれぞれ回路に電流を注入した場合の各節点電位と各枝のコンダクタンスである。

Fig.1 で, 節点 1 と 3 の間に電流 I を注入したとする。この場合, 節点方程式は v_3 を基準電位とすると(13)式で与えられる。

$$\begin{aligned}(v_1 - v_2)g_1 + (v_1 - v_4)g_4 + (v_1 - v_5)g_5 &= I \\ (v_2 - v_1)g_1 + v_2 g_2 + (v_2 - v_5)g_6 &= 0 \\ -v_2 g_2 - v_4 g_3 - v_5 g_8 &= -I \\ (v_4 - v_3)g_3 + (v_4 - v_1)g_4 + (v_4 - v_5)g_8 &= 0 \\ (v_5 - v_1)g_5 + (v_5 - v_2)g_6 + v_5 g_7 + (v_5 - v_4)g_8 &= 0\end{aligned}\quad (13)$$

(13)式を書き直すと(14)式となる.

$$\begin{bmatrix} v_1-v_2 & 0 & 0 & v_1-v_4 & v_1-v_3 & 0 & 0 & 0 \\ v_2-v_1 & v_2-v_3 & 0 & 0 & 0 & v_2-v_5 & 0 & 0 \\ 0 & -v_2 & -v_4 & 0 & 0 & 0 & -v_3 & 0 \\ 0 & 0 & v_4-v_3 & v_4-v_1 & 0 & 0 & 0 & v_4-v_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_3-v_1 & v_3-v_2 & v_3 & v_3-v_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \\ g_5 \\ g_6 \\ g_7 \\ g_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ -I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

(14)式で, コンダクタンス $g_1, g_2, \dots, g_8$ が解ベクトルを構成するから, この場合, 式の数が 5 個, 未知数が 8 個の不適切な線形システムを解くこととなる⁴⁾.

3.2 シミュレーション

Fig. 2 A Simulation Model

Fig. 2 に示す網状回路を仮定し, 節点 1 と 3 の間に電流を注入した場合の各節点電位から全抵抗の抵抗値を求める問題を考える.

Fig. 3 Assumed Conductance Distribution

シミュレーションに用いた抵抗値は乱数で生成した. その結果を Fig. 3 に示す. 抵抗値は Fig. 3 に示すように, 明るいほど抵抗値は大きく, 暗いほど小さい. この表示形式は以後の図においても同様とする.

3.1 節の(14)式で述べた方法で, 線形システム方程式を導き, 得られた線形システム方程式を GVSPM 法で解き, 抵抗分布を求める.

Fig. 4 Conductance Distribution Evaluated from a System Having 8×12 System Matrix

Fig. 4 に GVSPM 法で得られた抵抗分布を示す. 明らかに正しい解が得られていないことがわかる. これは(14)式のように未知数が既知数よりも多いため, GVSPM 法で数学的に解くことは可能であるが, 必ずしも得られた解が物理系の抵抗値と一致しない例である.

この問題を解決するため, Fig. 3 で電流を注入する電極対を増加し, それぞれに対して線形システム方程式を(14)式と同様に導き, それらを合成して全体としての線形システム方程式を導く. この場合, 何れの電流を注入する電極対に対しても解ベクトルを構成するコンダクタンスは共通であるから, 式の数(情報)は増加し, 未知数は変わらない.

Fig. 5 Conductance Distribution Evaluated from a System Having 16×12 System Matrix

本シミュレーション例では, 電流を注入する電極対を節点 1 と 3, および節点 2 と 3 とした. この場合, 式の数 は 16 個, 未知数の数は 12 個となる. すなわち, 16 行 12 列の長方システム行列を持つ不適切な線形システムを GVSPM で解く. Fig. 5 が結果である. Fig. 3 と比較すれば, 明らかに正しい抵抗分布が得られていることがわかる.

以上のシミュレーション結果から, 電流を注入する電極対数を増加し, 対象とする回路の応答情報を増加することで物理的に存在する解, すなわち, 抵抗分布トモグラフィが可能であることが判明した.

3.3 実験

Fig. 6 は実験に用いた節点数 24, 抵抗数 40 の回路を示す. Fig. 7 は Fig. 6 の供試回路の抵抗値分布を示す.

Fig. 6, 7 で, 節点番号は外側の頂点を 1 とし, 時計回りに順に内側方向へ 1, 2, ..., 24 とし, 番号付けを行う. 基準電位を第 5 節点とし, 電極対 5-1, 5-2, 5-3, 5-4 とし, 電流を注入する. 本実験では, 抵抗値分布を得るために, 96 行 40 列のシステム行列を持つ線形システム方程式を GVSPM 法で解くこととなる. Fig. 8 に結果を示す.

Fig. 8 の抵抗分布は Fig. 7 の抵抗分布と完全に一致していない. 3.2 節で述べたシミュレーション結果によれば情報量を増加すれば精度向上が期待できる. 従って, 最外周の 7 電極対を 1 周 (8 電極) させて, 各節点電圧 (1 電極対に対して 24 節点) の電圧を測定し, それらをすべて連立させることで情報量を増加する. すなわち, 1344 行 40 列のシステム行列を持つ方程式を GVSPM を用いて解く⁵⁾.

その結果を Fig. 9 に示す. Fig. 9 の結果は, 情報量の増加が抵抗分布の対称性と値の違いを明確とするが, 必ずしも精度が向上しないことを意味する.

Fig. 6 The Circuit Used for the Experiment

Fig. 7 Conductance Distribution Used for the Experiment

Fig. 8 Conductance Distribution Evaluated from a System Having 96×40 System Matrix

Fig. 9 Conductance Distribution Evaluated from a System Having 1344×40 System Matrix

情報量の増加は必ずしも高精度な結果に繋がらない原因は、情報が実験によって得られているため、誤差を含むことに起因すると考えられる。換言すれば、情報量を増加しても誤差が多く含まれる場合は無意味である。実験値に含まれる誤差を削減する一方途として、加算平均演算が行われる。ここでは、最外周の7電極対に対して得られる情報を、各電極対毎に独立して得られた抵抗分布の加算平均処理を行う。

Fig. 10のその結果を示す。明らかに、Fig. 7とよく一致した抵抗分布である。

Fig. 10 Conductance Distribution Evaluated by Averaging Operation

4. まとめ

本論文では、EITの基礎実験として、抵抗率分布を回路モデルで置き換え、注入電流と節点電圧から抵抗分布を推定した。その結果、シミュレーションでは妥当な結果が得られた。

しかし、実際の実験では、測定に誤差を伴うため、すべての電極対の組み合わせでも良好な結果が期待出来ないことを述べた。

実験値に含有される測定誤差の影響は加算平均処理で効果的に削減可能であることを述べた。

参考文献

- 1) Avinash C. Kak and Malcolm Slaney : Principles of Computerized Tomographic Imaging, The Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc. 1988.
- 2) Tian Haiyan and et al.; A Study of Reconstruction Algorithm of Electrical Impedance Tomography, Proceedings of 2nd Japan Australia New Zealand Joint Seminar on Applied Electromagnetodynamics, KANAZAWA, Jan. 24-25th 2002 (to be appeared).
- 3) H. Endo, S. Hayano and Y. Saito: Generalized Vector Sampled Pattern Matching Method part-1: Theoretical Background, Japan society of Applied Electromagnetics and mechanics, ENDE, May 17-19th, 2001, Kobe.
- 4) D. Sekijima, S. Hayano and Y. Saito: Time-Domain Visualization of Quasi-3D Current Vector Distributions, Proceedings of PSFVIP-3, F3303, March 18-21th 2001, Maui, Hawaii, U.S.A.
- 5) S. Mabuchi, S. Hayano, Y. Saito, I. Marinova: Generalized Vector Sampled Pattern Matching Method for Inverse Parameter Problems, Proceedings of 2nd Japan Australia New Zealand Joint Seminar on Applied Electromagnetodynamics, KANAZAWA, Jan. 24-25th 2002 (to be appeared).