気体論による垂直衝撃波の構造と相互作用の 数値解析*

青木 一生**・土井 俊行**

(受付1988年12月6日, 掲載決定1989年2月4日)

Numerical Analysis of Structure and Interaction
of Normal Shock Waves Based on Kinetic Theory

Kazuo AOKI** and Toshiyuki DOI**

(Department of Aeronautical Engineering, Kyoto University, Kyoto 606)

(Received December 6, 1988, Accepted February 4, 1989)

1. ま え お き

衝撃波は通常、非粘性気体力学では、それを横切って物理量が不連続的に変化する不連続面として取り扱われる。しかし実際には衝撃波は厚みを持っており、その内部で物理量は急激ではあるが連続的に変化する。この変化は気体分子の平均自由行程程度の範囲で起こっているため、衝撃波の内部構造が問題となる場合には気体論による取り扱いが必要となる^{1,2)}。最近、差分法による気体論方程式の精密な数値解析によって、平面凝縮相における強い蒸発・凝縮の問題が解析され、それに付随する衝撃波や膨張波の生成、伝播が正確に求められた³⁻⁵⁾。本研究では、同様の数値解析によって任意の強さの垂直衝撃波（波面が流れに垂直な平面衝撃波）の構造を解析し、標準となる正確な結果を与える。さらに2つの垂直衝撃波が相互作用する場合の気体の振舞を調べる。

2. 問 題

[I] 無限に広がった気体中の定常な垂直衝撃波の内部における気体の振舞を調べる。

[II] 無限に広がった気体中を伝播する2つの垂直衝撃波が相互作用（正面衝突、追突）する場合の気体の振舞（時間変化）を調べる。

3. 仮 定

(i) 気体は単原子分子気体でその振舞は Boltzmann-Krook-Welander (B-K-W) 方程式⁶⁾に従う。

(ii) 各無限遠において気体はそれぞれ一様な平衡状態にある。また[II]では、相互作用を開始する前の2つの衝撃波間の気体は一様な平衡状態にある。

4. 解 析

[I] 衝撃波が静止するような座標系をとる。質量流、運動量流、エネルギー流がそれぞれ気体中で一定値をとることから（これはB-K-W方程式のモーメントをとることにより導かれる）、無限上流の平衡状態における密度、流速、温度と無限下流におけるそれらの間には特定の関係が成り立つ（Rankine-Hugoniotの関係）。この関係を満たす様に無限上流及び下流の平衡分布を設定し、適当な初期条件のもとでB-K-W方程式の非定常問題を差分法によって解析する。十分時間が経過した後の定常状態を求めることにより、衝撃波内部における気体の定常的振舞を調べる。

[II] 問題Iで求めた定常な垂直衝撃波の2つを、それらの伝播速度を調節して（すなわち、適当なGalilei変換を行って）一様な平衡状態を挟むように配置する。時間が経過すると2つの衝撃波はそれぞれ一定速度で進行する。これらが相互作用（正面衝突あるいは追突）する場合について、B-K-W方程式を差分法によって数値

* 昭和63年11月10日 第29回真空に関する連合講演会で講演 (10Ba-1)

** 京都大学工学部航空工学教室 (京都市左京区吉田本町)

Fig. 1 Shock wave structure for $M_1=1.5$ ($\rho_2/\rho_1=u_1/u_2=1.714$, $T_2/T_1=1.495$).
a: $(\rho-\rho_1)/(\rho_2-\rho_1)$, b: $(u-u_2)/(u_1-u_2)$,
c: $(T-T_1)/(T_2-T_1)$.

Fig. 3 Shock wave structure for $M_1=5$ ($\rho_2/\rho_1=u_1/u_2=3.571$, $T_2/T_1=8.680$).

Fig. 2 Shock wave structure for $M_1=3$ ($\rho_2/\rho_1=u_1/u_2=3$, $T_2/T_1=3.667$).

Fig. 4 Shock wave structure for $M_1=10$ ($\rho_2/\rho_1=u_1/u_2=3.883$, $T_2/T_1=32.12$).: $\bar{p}(T) \propto T^{0.816}$.

的に解き、相互作用時における気体の振舞を調べる。

5. 結 果

衝撃波に垂直に空間座標の x 軸をとり、気体の密度を ρ 、流速 (x 成分のみを持つ) を u 、温度を T 、圧力を p ($p=R\rho T$, R は単位質量当りの気体定数) とする。

[I] 上流無限遠 ($x=-\infty$) での密度、流速、温度をそれぞれ ρ_1 , u_1 , T_1 、下流無限遠 ($x=\infty$) でのそれらを ρ_2 , u_2 , T_2 とする。また上流無限遠における Mach 数を M_1 ($M_1=u_1[(5/3)RT_1]^{-1/2}$, $1 \leq M_1 < \infty$)、そこでの平均自由行程を l_1 とする。Rankine-Hugoniot の関係より、 M_1 を与えると ρ_2/ρ_1 , u_2/u_1 , T_2/T_1 が一意的に定まる。種々の M_1 に対する衝撃波内部の気体の振舞を Fig. 1 ($M_1=1.5$), Fig. 2 ($M_1=3$), Fig. 3 ($M_1=5$), Fig. 4 ($M_1=10$, 実線) に示す。a, b, c の各曲線はそれぞれ $(\rho-\rho_1)/(\rho_2-\rho_1)$, $(u-u_2)/(u_1-u_2)$, $(T-T_1)/(T_2-T_1)$ を表す [$u=(u_1+u_2)/2$ となる点を $x=0$ にとってある]。 M_1 が大きいと ($M_1=5, 10$) 衝撃波は厚くなり、 $M_1=10$ では

Fig. 5 η/l_1 versus x/l_1 .
——: $M_1=1.5$, ----: $M_1=3$,: $M_1=5$, - · - · - : $M_1=10$.

l_1 の30倍以上になる。なお、上述のように静止衝撃波を横切って質量流、運動量流、エネルギー流は x に依らな

Fig. 6 Head-on collision between A and B.
 $t/t_0 = m$ ($8 \leq m \leq 30$).

い定数となる。これらの量のいずれから判断して、本数値計算結果の誤差は0.01%以下である。

B-K-W 方程式では気体の粘性係数 μ は $\mu = RT/A_c$ (A_c は定数で、 $A_c \rho$ が気体分子の衝突頻度を表す) となる。これに対し、上の A_c を温度の関数として μ の温度依存性が経験的法則に合うように B-K-W 方程式を修正する場合がある。一般に粘性係数が温度の任意の関数 $\mu = \bar{\mu}(T)$ であるとき、上で求めた物理量の x における値を

$$\eta = \frac{T_1}{\bar{\mu}(T_1)} \int_0^x \frac{\bar{\mu}[T(x')]}{T(x')} dx' \quad (1)$$

Fig. 7 Head-on collision between B and B.
 $t/t_0 = m$ ($6 \leq m \leq 25$) and $t/t_0 = 10.7, 10.8, 10.9$ for $p/p_0, 10.5, 10.6, 10.7$ for T/T_0 .

で定義される座標 η における値にとることにより、対応する物理量の分布が容易に求められる (η が x の単調増加関数で、 $x = \pm\infty$ に $\eta = \pm\infty$ が対応するものとする)。 $\bar{\mu}(T) = \text{定数} \times T^{0.816}$ (アルゴン気体を想定)²⁾ の場合について、上の η と x の関係を Fig. 5 に示す。また、参考のためこの場合の $M_1 = 10$ の衝撃波の構造を Fig. 4 に点線で示しておく。

[II]問題 I で求めた $M_1 = 1.5$ に対応する衝撃波を A, $M_1 = 3$ に対応するものを B とする。ここでは次の 3 つ

Fig. 8 Rear-end collision between A and B.
 $t/t_0 = 2m$ ($6 \leq m \leq 25$).

の初期状態 ($t=0$, t : 時間) を考える: (i) 圧力 p_0 , 温度 T_0 の静止平衡状態 (この状態の平均自由行程を l_0 とする) を挟んで, x の正方向に進む B と負方向に進む A が, 約 $50 l_0$ 離れたところにある; (ii) 上の平衡状態を挟んで, x の正方向に進む B と負方向に進む B が約 $60 l_0$

離れたところにある; (iii) 上の平衡状態の気体中を x の正方向に進む B があり, その後方約 $40 l_0$ のところにそれを追って同じ方向に進む A がある. これらの初期状態から出発した 2 つの衝撃波が相互作用を開始する直前から, ある程度終状態が形成されるまでの p , T , u の時間変化を Fig. 6[(i)], Fig. 7[(ii)], Fig. 8[(iii)] に示す. ここに $t_0 = l_0(2RT_0)^{-1/2}$ である. [実際の計算は, (i) では $t/t_0 = 68$, (ii) では $t/t_0 = 72$, (iii) では $t/t_0 = 80$ まで行っている.] 図は $t/t_0 = 1$ もしくは 2 毎に変化の様子を示してあるが, Fig. 7 の圧力, 温度については $t/t_0 = 10 \sim 11$ の間をさらに詳しく示してある. Fig. 6 と Fig. 7 の流速分布は, 図を見易くするため, それぞれ $t/t_0 = 13, 11$ で区切ってその前後を別の図に示した. A, B 正面衝突の結果, 相離れて行く 2 つの衝撃波が形成され, その間に接触面に対応するものが現れる (Fig. 6). 一方, B, B 正面衝突では, 相離れて行く強さの等しい 2 つの衝撃波が形成され, その間は一様な静止平衡状態に近づき, 接触面に対応するものは現れない (Fig. 7). A, B 追突の場合には, x の正方向に伝播する強い衝撃波の後方に接触面に対応するものが発生し, さらに気体に相対的に x の負方向に伝わる弱い膨張波が生じる (Fig. 8).

【文 献】

- 1) H. W. Liepmann, R. Narasimha, and M. T. Chahine: *Phys. Fluids* 5 (1962) 1313.
- 2) M. T. Chahine, and R. Narasimha: *Rarefied Gas Dynamics*, ed. J. H. de Leeuw (Academic, New York, 1965) Vol. I, p. 140.
- 3) Y. Sone, K. Aoki, and I. Yamashita: *Rarefied Gas Dynamics*, ed. V. Boffi and C. Cercignani (Teubner, Stuttgart, 1986) Vol. II, p. 323.
- 4) 曾根良夫, 杉元 宏: 真空 31 (1988) 420.
- 5) 杉元 宏, 曾根良夫: 真空 32 (1989) 214.
- 6) 曾根良夫: 希薄気体力学 (分子気体力学) 流体力学ハンドブック, 日本流体力学会編 (丸善, 1987) 第 14 章.